

Institut für Visualisierung und Interaktive Systeme
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D - 70569 Stuttgart

Bachelorarbeit Nr. 201

Dekonvolution mit Variationsansätzen

Janik M. Hager

Studiengang: Informatik

Prüfer/in: Prof. Dr.-Ing. Andrés Bruhn

Betreuer/in: Prof. Dr.-Ing. Andrés Bruhn

Beginn am: 23. Februar 2015

Beendet am: 21. August 2015

CR-Nummer: G.1.6, G.1.8, I.4.3, I.4.4

KURZFASSUNG

Viele Störungen in Bildern lassen sich durch einen mathematischen Prozess, die sogenannte Faltung, beschreiben. Hierzu gehören insbesondere Bilder, die aufgrund von Bewegung oder Defokussierung bei der Aufnahme unscharf geworden sind. Das Thema dieser Arbeit ist die Dekonvolution, auch Entfaltung genannt, d.h. die Wiederherstellung dieser ursprünglich scharfen Bilder aus ihren gegebenen unscharfen Aufnahmen. Ist die genaue Ursache der Störung, d.h. der sogenannte Faltungskern, bekannt, spricht man von nicht-blinder Dekonvolution. Im Rahmen der Arbeit werden hierfür zwei Klassen von Verfahren miteinander verglichen: Fourier-basierte Filter, die das unscharfe Eingangsbild in den Frequenzbereich transformieren und dort den Faltungsprozess umkehren sowie Variationsansätze, die das gesuchte scharfe Bild als Minimierer eines geeigneten Energiefunktional berechnen. Während als Vertreter der Klasse der Fourier-basierten Verfahren der häufig verwendete Wiener-Filter betrachtet wird, werden als Vertreter der Variationsansätze Varianten mit homogener (quadratischer) und kantenerhaltender (subquadratischer) Regularisierung diskutiert. Auch die numerische Implementierung der einzelnen Verfahren wird im Rahmen der Arbeit untersucht. Während für die Fourier-basierten Verfahren die Schnelle Fourier-Transformation (FFT) verwendet wird, kommen bei den Variationsansätzen ein explizites und ein stabilisiertes explizites Schema als Gradientenabstiegsverfahren zum Einsatz. Im Fall der quadratischen Regularisierung wird zudem noch ein Löser im Frequenzbereich vorgestellt. Ein Vergleich der beiden Klassen anhand eines Testbildes mit verschiedenen Faltungskernen schließt die Arbeit ab.

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	1
1.1	Motivation	1
1.2	Aufgabenstellung	1
1.3	Aufbau der Arbeit	2
2	MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN	5
2.1	Bilder	5
2.2	Statistische Größen	5
2.3	Störungen	6
2.4	Faltung	7
2.4.1	Der eindimensionale Fall	7
2.4.2	Der zweidimensionale Fall	7
2.4.3	Modellierung der Unschärfeeffekte	8
2.5	Fourier-Transformation	10
2.5.1	Die kontinuierliche Fourier-Transformation	11
2.5.2	Die diskrete Fourier-Transformation	12
2.5.3	Schnelle Fourier-Transformation	13
2.5.4	Eigenschaften der Fourier-Transformation	13
2.6	Analyse der Faltungskerne	16
2.7	Partielle Ableitung	19
2.8	Quadratische Variationsansätze zur Entrauschung	20
2.9	Euler-Lagrange-Gleichung	21
2.10	Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung	22
2.11	Diskretisierung der quadratischen Variationsansätze	22
3	VERFAHREN ZUR DEKONVOLUTION	25
3.1	Fourier-basierte Methoden	25
3.1.1	Inverses Filtern	25
3.1.2	Wiener Filter	26
3.2	Variationsansätze	27
3.2.1	Quadratische Variationsansätze zur Dekonvolution	27
3.2.2	Subquadratische Variationsansätze zur Dekonvolution	31
4	EVALUATION	35
4.1	Generelle Grundbedingungen	35
4.2	Parameterverwaltung	37
4.3	Auswertung der Parameter	38
4.3.1	Wiener Filter	38
4.3.2	Quadratischer Variationsansatz (explizit)	41
4.3.3	Quadratischer Variationsansatz (stabilisiert)	46

4.3.4	Quadratischer Variationsansatz (Fourier)	46
4.3.5	Subquadratischer Variationsansatz	50
4.4	Vergleich	54
5	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	59
5.1	Zusammenfassung	59
5.2	Ausblick	60
5.2.1	Faltungskerne	60
5.2.2	Rauschen	60
5.2.3	Faltung	61
5.2.4	Weitere Verfahren	61
5.2.5	Weitere Bilder	62
	LITERATUR	63
	ERKLÄRUNG	65

1. EINLEITUNG

1.1 MOTIVATION

Beim Anfertigen digitaler Fotos treten häufig Schwierigkeiten auf, die unter anderem auf äußere Einflüsse zurückzuführen sind. Unter anderem kommt es vor, dass diverse Störungen auf Bildern auftreten. Dies kann sich beispielsweise durch Störsignale wie Rauschen oder durch Unschärfe wie bei Defokussierungen bemerkbar machen. Eine Möglichkeit ist, erneut ein Bild zu machen, mit der Hoffnung, dass es besser bzw. schärfer wird als das vorherige Bild. Allerdings gibt es häufig einmalige Momente, für die es keinen weiteren Versuch gibt. Als Alternative bleibt dann nur, das Bild nachträglich aufzubereiten, um die Qualität zu verbessern.

Da ein großes Interesse daran besteht, Bilder im Nachhinein zu bearbeiten, besonders sie qualitativ aufzubereiten, wird im Bereich der Bildverarbeitung an entsprechenden Formeln, Algorithmen und Methoden geforscht. Der Einsatz solcher automatisierter Algorithmen ist bei Digitalkameras interessant sein, die nach der Aufnahme eines Bildes beispielsweise die Schärfe verbessern, um ein nicht gelungenes Foto doch noch zu nutzen und brauchbar zu machen.

Um solche Methoden zu entwickeln, ist ein grundlegendes Verständnis von Störungen und Fehlern in Bildern notwendig. Dieses wird erlangt, indem fehlerhafte Bilder, das heißt Bilder, die mit Störungen behaftet sind und unscharf sein können, simuliert werden. Das dient dazu, die Effekte zu verstehen, die beim Fotografieren auftreten können. Aus diesen fehlerhaften Bildern und vor allem deren Erstellungsweise können anschließend verschiedene Algorithmen abgeleitet werden, die diese Effekte rückgängig machen. Da diese Methoden nicht immer fehlerfrei arbeiten, werden unterschiedlichste Ansätze entwickelt, die gewisse Fehler in Bildern schrittweise und durch mehrmaliges Anwenden herausfiltern. Mithilfe solcher Methoden soll im Allgemeinen ungewollten Effekten gegengesteuert und die Bildqualität verbessert werden. Ein Beispiel hierfür ist die Rekonstruktion unscharfer Bilder.

1.2 AUFGABENSTELLUNG

Die Aufbereitung solcher unscharfer Bilder gehört zu den klassischen Problemen der Bildverarbeitung. Hierbei wird oft angenommen, dass sich die Unschärfe mathematisch durch eine lineare ortsabhängige Mittelung benachbarter Grauwerte formulieren lässt - durch eine sogenannte Faltung. Diese Annahme trifft z.B. auf unscharfe Bilder zu, die durch ein Verwackeln der Kamera entstanden sind. Typische Ansätze basie-

ren auf einer Umkehrung der Faltung, der sogenannten Dekonvolution (Entfaltung). Es wird oft angenommen, dass die Charakteristik der Mittelung, der sogenannte Faltungskern, bekannt ist. Daher handelt es sich dabei um nicht-blinde Dekonvolution.

Die am weitesten verbreiteten Ansätze für diese Art der Problemstellung basieren auf einer Dekonvolution im Frequenzbereich, auch Fourier-Bereich genannt. Zu ihnen gehört der sogenannte Wiener-Filter. Solche linearen Ansätze haben jedoch das Problem, dass hohe Frequenzen erhebliche Artefakte verursachen können, da diese Frequenzen bei dem Bildaufnahmeprozess fast vollständig eliminiert wurden. Bei der Dekonvolution ist nicht sicher, ob diese Frequenzen bedeutenden Bilddetails zuzuordnen sind oder ob sie im Wesentlichen nur Rauschen entsprechen, das unterdrückt werden muss, anstatt es durch die Dekonvolution zu verstärken.

In diesem Zusammenhang haben sich globale kontinuierliche Optimierungsansätze, sogenannte Variationsansätze, als echte Alternativen etabliert. Diese berechnen das ursprünglich scharfe Bild als Minimierer eines geeigneten Energiefunktional mit Daten- und Glattheitsterm. Während der Datenterm das gesuchte und das gegebene Bild über das Faltungsmodell in Beziehung setzen, verhindert der Glattheitsterm eine Verstärkung von Rauschen und Artefakten. Um durch ungeeignete Glattheitsannahmen nicht auch die Schärfe des zu bestimmenden scharfen Bildes zu beeinträchtigen, wurden in der Literatur verschiedene adaptive Glattheitsterme vorgestellt. Ein Vergleich einiger dieser sogenannten Regularisierer findet sich in der Arbeit von Welk et al. [1].

Ziel der Arbeit ist es, die verschiedenen in Welk et al. [1] vorgestellten quadratischen und subquadratischen Variationsansätze zu implementieren und zu evaluieren. In allen Fällen soll neben der Modellierung auch eine effiziente Implementierung der Ansätze durch geeignete numerische Verfahren untersucht werden. Die Evaluation der implementierten Ansätze soll anhand eines geeigneten Testbildes erfolgen. Hierbei soll der Wiener-Filter als lineares Vergleichsverfahren dienen. Dieser soll ebenfalls implementiert werden.

1.3 AUFBAU DER ARBEIT

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung verschiedener Methoden, um unscharfe Bilder bestmöglich zu rekonstruieren, wobei diese Methoden besonders auf Zuverlässigkeit und Qualität geprüft werden sollen. Zunächst erfolgt eine Einordnung in den wissenschaftlichen Zusammenhang und die Problemstellung. Danach werden in Kapitel 2 die mathematischen Grundlagen bereitgestellt, wie beispielsweise Hintergründe zur Erstellung von geeigneten Bildern, ein verlässliches Maß zum Vergleich der Qualität der Verfahren und die Fourier-Transformation. Anschließend werden in Kapitel 3 die zu untersuchenden Methoden vorgestellt, welche in Fourier-basierte und Variationale Ansätze unterteilt werden. In Kapitel 4 folgt die Evaluation dieser Methoden. Dies geschieht anhand eines Beispielbildes, das den unterschiedlichen Methoden

unterzogen wird. Die Methoden und deren Ergebnisse werden danach in Kapitel 5 zusammengefasst. Abschließend wird im gleichen Kapitel auf andere Methoden und mögliche Chancen für die Zukunft zur Rekonstruktion von Bildern hingewiesen.

2. MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

Dieses Kapitel befasst sich mit den Grundlagen der Bildverarbeitung, auf denen unter anderem die später vorgestellten Verfahren basieren. Es folgt zunächst eine generelle Einführung in die Eigenschaften von Bildern. Daraufhin werden Möglichkeiten zur Erstellung der Testbilder diskutiert. Abschließend werden die Grundlagen der verwendeten Methoden vorgestellt.

2.1 BILDER

In dieser Arbeit werden Grauwertbilder verwendet. Die Bilder bestehen dabei aus einem rechteckigen, zweidimensionalen Definitionsbereich $\Omega = (1, n_x) \times (1, n_y)$. Diese einzelnen Zellen aus dem Definitionsbereich werden Pixel genannt, denen Zahlen aus dem Wertebereich zugeordnet werden, die dem jeweiligen Grauwert entsprechen. Der Wertebereich geht von 0 bis 255, da er durch ein einzelnes Byte gespeichert wird. Hierbei gilt die Konvention, dass niedrige Zahlen dunkle und hohe Zahlen helle Grauwerte bedeuten. Mithilfe davon lassen sich Bilder durch die Angabe der Größe des Bildes und den entsprechenden Grauwerten der einzelnen Pixel repräsentieren. Häufig wird ein Bild in der Form $f = \{f_{i,j} | i = 1, \dots, n_x; j = 1, \dots, n_y\}$ angegeben, wobei n_x für die Größe des Bildes in x-Richtung und n_y für die Größe des Bildes in y-Richtung steht. Die Information der Bilder kann entweder kontinuierlich oder diskret vorliegen. Handelt es sich um den kontinuierlichen Fall, so entsprechen die Grauwerte eines Bildes oder eines Signals einer stetigen Funktion. Der diskrete Fall unterscheidet sich darin, dass die Grauwerte nur an den Pixeln vorliegen, d.h. es handelt sich um eine Funktion, deren Werte in einem bestimmten festen Abstand abgespeichert sind. Der Abstand entspricht dem Abstand der Pixel. Typischerweise erfolgt die Diskretisierung durch die Integration über die Sensorfläche und nicht, wie häufig im Mathematischen, durch die Abtastung der kontinuierlichen Funktion.

2.2 STATISTISCHE GRÖSSEN

Eine wichtige Eigenschaft von Bildern ist der sogenannte Mittelwert μ , der dem durchschnittlichen Grauwert des Bildes entspricht. Aufgrund der vorherigen Definition von hohen und niedrigen Grauwerten bedeutet ein hoher Mittelwert ein allgemein helles Bild, während ein niedriger Mittelwert einem allgemein dunkleren Bild zugeordnet wird. Zur Bestimmung des Mittelwerts werden alle Grauwerte des Bildes aufsummiert und durch die Größe des Bildes geteilt, wie in Formel 2.1 beschrieben:

$$\mu(f) = \frac{1}{n_x n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f_{i,j} . \quad (2.1)$$

Mithilfe des Mittelwerts kann die Varianz σ^2 berechnet werden, wie in der folgenden Formel 2.2 beschrieben:

$$\sigma^2(f) = \frac{1}{n_x n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (f_{i,j} - \mu)^2 . \quad (2.2)$$

Die Wurzel der Varianz wird Standardabweichung σ genannt. Die Varianz σ^2 und die Standardabweichung σ geben an, wie hoch der Kontrast ist und wie viele Details im Bild vorhanden sind.

2.3 STÖRUNGEN

Störungen treten in Bildern häufig auf und sind ein bekanntes Thema. Dabei gibt es viele Quellen und Arten für solche auftretenden Beeinträchtigungen. Die in dieser Arbeit behandelte Störungsart ist die Unschärfe. Hierbei werden drei Fälle untersucht:

- Defokussierung
- Bewegung, z.B. während der Aufnahme eines Fotos
- atmosphärische Störungen, z.B. bei Teleskopen

Zur Berechnung, wie stark die Störung das Bild beeinflusst hat, gibt es einige Hilfsmittel und entsprechende Ansätze. Sei dazu $f = f_{i,j}$ eine gestörte Version des Bildes $g = g_{i,j}$. Der mittlere quadratische Fehler (MSE) dieser Bilder kann dann durch Summierung der Differenzen aller Pixel beider Bilder und anschließende Mittelung berechnet werden. Hierbei gilt die Konvention, dass ein kleiner MSE eine größere Ähnlichkeit der Bilder bedeutet und damit weniger Störungen vorhanden sind. Also ist die Qualität eines Bildes umgekehrt proportional zum MSE-Wert. Die dazugehörige Formel 2.3 lautet:

$$MSE(f, g) = \frac{1}{n_x n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (f_{i,j} - g_{i,j})^2 . \quad (2.3)$$

Die andere Alternative ist der Spitzen-Signal-Rausch-Abstand (PSNR). Die dazugehörige Einheit ist Dezibel. Je größer der Wert ist, desto ähnlicher sind sich die Bilder. Die folgende Formel 2.4 nimmt als höchsten Grauwert den Wert 255 an:

$$PSNR(f, g) = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{MSE(f, g)} \right) . \quad (2.4)$$

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die jeweilige Störung an allen Stellen des Bildes gleich stark auftritt. Solche Effekte werden modelliert, indem die Grauwerte in einem bestimmten Bereich gewichtet gemittelt werden, um das unscharfe Bild zu berechnen. Die Größe des Einflussbereichs hängt einerseits davon ab, welche Form und welche Größe als Unschärfeeffekt gewählt wird. Dieses gewichtete Mitteln wird mathematisch durch die sogenannte Faltung beschrieben.

2.4 FALTUNG

Im Folgenden wird die Faltung zunächst im eindimensionalen Fall erklärt und anschließend auf den zweidimensionalen Fall ausgeweitet. Dazu werden zwei gleich große Bilder benötigt, die ein neues gefaltetes Bild ergeben. Hierbei werden besonders diskrete Bilder betrachtet. Zum Schluss wird erklärt, wie die Faltung zur Modellierung der Unschärfeeffekte verwendet werden kann.

2.4.1 Der eindimensionale Fall

Die Faltung zweier eindimensionaler diskreter Signale $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ wird mathematisch durch folgende Formel 2.5 beschrieben:

$$(f * g)_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{i-k} g_k . \quad (2.5)$$

Falls die beiden eindimensionalen Signale kontinuierlich sind, wird Formel 2.6 angewendet:

$$(f * g)_i = \int_{\mathbb{R}} f(x - x') g(x') dx' . \quad (2.6)$$

2.4.2 Der zweidimensionale Fall

Die Faltung zweier zweidimensionaler diskreter Bilder $f = (f_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ und $g = (g_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ wird mathematisch durch folgende Formel 2.7 beschrieben:

$$(f * g)_{i,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{i-k, j-l} g_{k,l} . \quad (2.7)$$

Falls die beiden zweidimensionalen Signale kontinuierlich sind, wird Formel 2.8 angewendet:

$$(f * g)_{i,j} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x - x', y - y') g(x', y') dx' dy' . \quad (2.8)$$



Abbildung 2.1: Dieser Faltungskern hat die Form eines Punktes in der Mitte des Bildes. Bei dieser Faltung erhält der Faltungskern das zu faltende Bild. Daher sind Resultat und Ursprungsbild gleich. **Links:** Punkt-förmiger erhaltender Faltungskern. **Rechts:** Resultat der Faltung.

2.4.3 Modellierung der Unschärfeeffekte

Bei der Verwendung der Faltung wird die erste Komponente als Signal oder Bild bezeichnet. Die zweite Komponente wird Faltungskern genannt. Um die unterschiedlichen Unschärfeeffekte zu modellieren, wird für das Bild immer das Eingangsbild verwendet, auf das der Effekt angewendet werden soll. Für den Faltungskern gibt es verschiedene Möglichkeiten, je nach gewünschtem Effekt. Da diese Arbeit die drei oben genannten Effekte Defokussierung, Bewegung und atmosphärische Störung behandelt, werden nun die drei dafür vorgesehenen Faltungskerne erklärt. Zuvor wird ein einfacher Faltungskern vorgestellt.

Die Einfachheit dieses Faltungskerns liegt darin, dass ausschließlich das Pixel im Mittelpunkt des Faltungskerns das Gewicht 1 erhält. Alle anderen Pixel besitzen den Wert 0. Die Besonderheit des Faltungskerns ist, dass bei der Faltung mit einem anderen beliebigen Bild stets genau dieses andere Bild resultiert. Das liegt daran, dass für die Berechnung eines Pixels des gefalteten Bildes jedes Mal nur genau das eine Pixel des Bildes verwendet wird, da die anderen Pixel alle mit 0 gewichtet werden. Insbesondere erhält dieser Faltungskern den Grauwert des Ursprungsbildes. Eine zu Visualisierungszwecken skalierte Version des Faltungskerns ist zusammen mit dem gefalteten Resultat auf der Abbildung 2.1 zu sehen.

Um den Effekt einer Defokussierung zu erreichen, wird ein Faltungskern in Form eines Zylinders gewählt (siehe Abbildung 2.2). Dabei entspricht der Mittelpunkt des

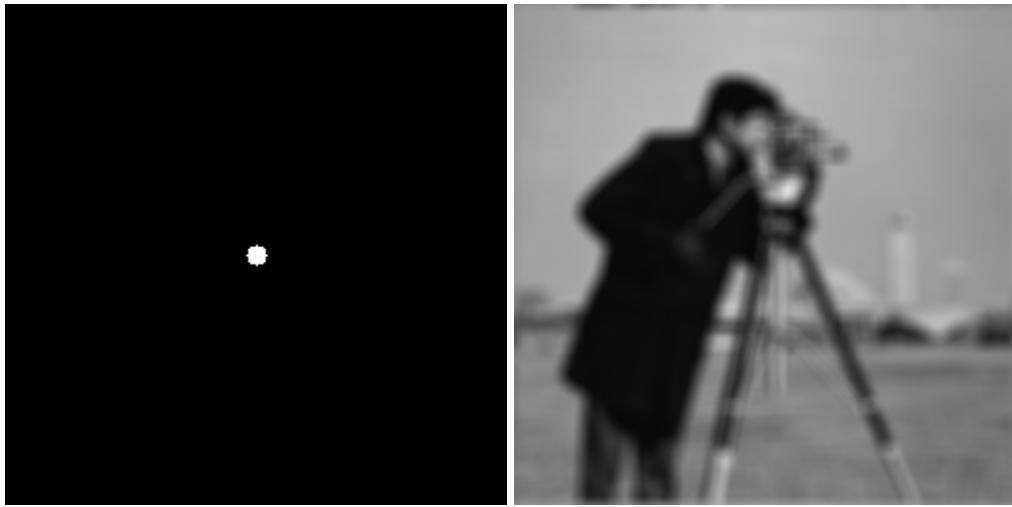


Abbildung 2.2: Dieser Faltungskern hat die Form eines Kreises. Er stellt eine Zylinderfunktion dar und modelliert den Effekt der Defokussierung. **Links:** Zylindrischer Faltungskern. **Rechts:** Resultat der Faltung.

Zylinders dem Mittelpunkt des Faltungskerns. Der Radius kann beliebig gewählt werden, je nachdem, wie stark das Bild hinterher defokussiert sein soll. Als obere Grenze gilt, dass der Radius kleiner als die Hälfte der kleineren Bildlänge sein muss. Alle Werte außerhalb des Radius haben das Gewicht 0, entsprechen also der Farbe Schwarz. Im Gegensatz dazu haben die Pixel innerhalb des Radius ein konstantes Gewicht, welches sich insgesamt zu 1 summiert.

Der zweite zu modellierende Effekt ist die Bewegung. Dazu wird eine sogenannte Boxfunktion genutzt (siehe Abbildung 2.3). Die Eigenschaft dieser Boxfunktion ist, dass sie einer Linie entspricht. Dazu gilt, dass der Mittelpunkt dieser Linie, wie beim ersten Effekt, der Mittelpunkt des Faltungskerns ist. Anschließend wird die Linie definiert, indem mithilfe eines Radius ihre Länge bestimmt wird und ein Winkel die Bewegungsrichtung des Effekts beschreibt. Als obere Grenze des Radius gilt, dass er, wie im ersten Fall, kleiner als die Hälfte der kleineren Länge des Bildes sein muss. Alle Pixel, die auf der dadurch beschriebenen Linie liegen, erhalten wieder ein konstantes Gewicht, welches sich zu 1 summiert; alle anderen bekommen das Gewicht 0.

Die atmosphärische Störung wird durch eine sogenannte Gauß-Funktion modelliert. Im Zweidimensionalen entspricht die Gauß-Funktion der folgenden Gleichung 2.9:

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x - \mu_1)^2 - (y - \mu_2)^2}{2\sigma^2}\right) . \quad (2.9)$$

Als Mittelpunkt dieser Funktion wird, wie in beiden vorhergehenden Fällen, der Mittelpunkt des Faltungskerns gewählt. Da ca. 99,73% aller Messwerte der Funktion im

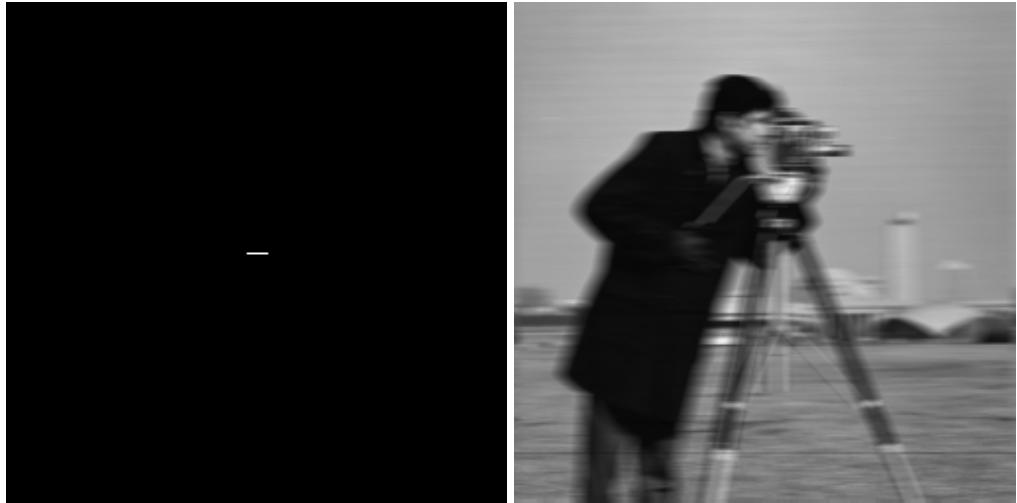


Abbildung 2.3: Dieser Faltungskern hat die Form einer geraden Linie. Er stellt eine Box-Funktion dar und modelliert den Effekt der Bewegung. **Links:** Box-förmiger Faltungskern. **Rechts:** Resultat der Faltung.

Intervall der Abweichung $\pm 3\sigma$ zu finden sind, wird die Funktion auf diese Länge begrenzt. In diesem Fall gibt es eine Abstufung der Gewichte, da der Pixelwert durch die Funktion beschrieben wird und daher nicht nur entweder 0 oder eine Konstante beträgt. Dargestellt wird dieser Faltungskern, nachdem er zu Anschauungszwecken skaliert wurde, zusammen mit dem gefalteten Resultat auf der Abbildung 2.4.

In allen drei Fällen ist die oben bereits angesprochene Normalisierung des Faltungskerns wichtig. Das bedeutet, die Gewichte müssen sich zu 1 summieren. Dies ist nötig, damit sich der durchschnittliche Grauwert des ursprünglichen Bildes nicht verändert und die Helligkeit des Ursprungsbildes nicht manipuliert wird. Nach der Diskussion der verschiedenen Faltungskerne soll nun die Fourier-Transformation vorgestellt werden. Diese Transformation erlaubt die effiziente Faltung von Bildern mit großen Faltungskernen. Insbesondere lässt sich bei n Pixeln die Komplexität der Faltung von $O(n^2)$ auf $O(n \log n)$ im Eindimensionalen und von $O(n^2)$ auf $O(n \log \sqrt{n})$ bei quadratischen Bildern im Zweidimensionalen reduzieren. Dies spart wertvolle Rechenzeit.

2.5 FOURIER-TRANSFORMATION

Die Fourier-Transformation betrachtet Bilder als zweidimensionale Signale und wandelt sie, wie bei Betrachtung von Audiosignalen üblich, in ihre Frequenzen bezüglich x - und y -Richtung um. Sie kann als eine Art Basiswechsel gesehen werden, wobei trigonometrische Basisfunktionen verwendet werden. Zu beachten ist, dass die Fourier-Transformation im komplexen Zahlenbereich arbeitet. Zunächst wird die Fourier-Transfor-



Abbildung 2.4: Dieser Faltungskern hat die Form eines Kreises, der nach außen dunkler wird. Er stellt eine Gauß-Funktion dar und modelliert den Effekt einer atmosphärischen Störung. **Links:** Gauß-förmiger Faltungskern. **Rechts:** Resultat der Faltung.

mation im kontinuierlichen Fall vorgestellt, wobei unter ein- und zweidimensional unterschieden wird. Im Anschluss daran folgt die Fourier-Transformation im diskreten Fall, ebenfalls im Ein- und Zweidimensionalen. Bevor abschließend noch einige Eigenschaften bezüglich der Berechnung der Fourier-Transformation erläutert werden, wird die schnelle Fourier-Transformation kurz erklärt. Grundlagen zur Fourier-Transformation sind in [2] und [3] zu finden.

2.5.1 Die kontinuierliche Fourier-Transformation

Die Formel der Fourier-Transformation im kontinuierlichen eindimensionalen Fall mit einer Funktion $f(x)$ lautet (wobei für die imaginäre Einheit i gilt $i^2 = -1$):

$$\hat{f}(u) = \mathcal{F}[f](u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx . \quad (2.10)$$

Es findet also ein Basiswechsel der Funktion f mit der Basisfunktion $g_u(x) = e^{i2\pi ux}$ statt, wobei u einer bestimmten Frequenz entspricht.

Für die Fourier-Transformation gibt es auch eine Umkehrfunktion. Die inverse Fourier-Transformation zur Funktion \hat{f} , lautet:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) e^{i2\pi ux} du . \quad (2.11)$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Fourier-Transformation ein Signal durch den Basiswechsel in seine Frequenzkomponenten umwandelt. Die inverse Fourier-Transformation hingegen synthetisiert aus den Frequenzen durch Verwendung der gleichen Basis wieder das ursprüngliche Signal.

Aus der Fourier-Transformation lassen sich weitere Besonderheiten berechnen. Das Fourierspektrum wird durch den Absolutwert $|\hat{f}|$ beschrieben. Der Winkel $\arg(\hat{f}(u))$ wird Phasenwinkel genannt. Außerdem lässt sich das Leistungsspektrum durch $|\hat{f}(u)|^2$ berechnen. Der Fokus liegt meist auf dem Fourierspektrum oder dem Leistungsspektrum, da es die Bedeutung einer Frequenz u im Signal f symbolisiert.

Wenn die Fourier-Transformation auf eine zweidimensionale Funktion ausgeweitet wird, ergibt sich folgende Formel:

$$\hat{f}(u, v) = \mathcal{F}[f](u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy . \quad (2.12)$$

Die inverse Fourier-Transformation lässt sich auf eine ähnliche Weise herleiten:

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv . \quad (2.13)$$

Eine wichtige Eigenschaft, welche die Fourier-Transformation bezüglich der Berechnung höherer Dimensionen mit sich bringt, ist die Separierbarkeit. Das bedeutet, dass die Fourier-Transformation im Höherdimensionalen nacheinander durch die Berechnung der einzelnen Dimensionen berechnet werden kann. Gezeigt wird dies in Formel 2.14:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx \right) e^{-i2\pi vy} dy . \quad (2.14)$$

2.5.2 Die diskrete Fourier-Transformation

Im Falle eines diskreten eindimensionalen endlichen Signals $f = (f_0, \dots, f_{M-1})^T$, wird die diskrete Fourier-Transformation angewandt, deren Formel folgendermaßen lautet (für $p = 0, \dots, M - 1$ und der imaginären Einheit i mit $i^2 = -1$):

$$\hat{f}_p = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} f_m \exp \left(-\frac{i2\pi pm}{M} \right) . \quad (2.15)$$

Die dazugehörige inverse Fourier-Transformation im diskreten Fall ist auf folgende Weise definiert (für $m = 0, \dots, M - 1$):

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{p=0}^{M-1} \hat{f}_p \exp \left(\frac{i2\pi pm}{M} \right) . \quad (2.16)$$

Besonderheiten, wie Fourierspektrum, Phasenwinkel und Powerspektrum, die bei der kontinuierlichen Fourier-Transformation aufgetaucht sind, können auf die gleiche Art und Weise im diskreten Fall berechnet werden. Ihre Gültigkeit und Aussagekraft bleibt somit erhalten. Allerdings hat das Fourierspektrum seinen Mittelpunkt bei $(0, 0)$. Um es also in der Mitte des Bildes anzuzeigen, ist es nötig, das Ursprungsbild geeignet zu modifizieren. Dazu wird das Shift-Theorem verwendet, das in den Eigenschaften erklärt wird und dazu dient, ein Bild periodisch zu verschieben.

Auch die diskrete Fourier-Transformation ist, wie im kontinuierlichen Fall, auf höhere Dimensionen erweiterbar. Liegt nun ein zweidimensionales Bild $f = (f_{m,n})$ vor mit $m = 0, \dots, M - 1$ und $n = 0, \dots, N - 1$, so lautet die diskrete Fourier-Transformation (für $p = 0, \dots, M - 1; q = 0, \dots, N - 1$):

$$\hat{f}_{p,q} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{m,n} \exp\left(-\frac{i2\pi pm}{M}\right) \exp\left(-\frac{i2\pi qn}{N}\right). \quad (2.17)$$

Ähnlich lässt sich auch die inverse diskrete zweidimensionale Fourier-Transformation herleiten (mit $m = 0, \dots, M - 1; n = 0, \dots, N - 1$):

$$f_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} \hat{f}_{p,q} \exp\left(\frac{i2\pi pm}{M}\right) \exp\left(\frac{i2\pi qn}{N}\right). \quad (2.18)$$

Wie auch die kontinuierliche, ist die diskrete Fourier-Transformation in die einzelnen Dimensionen separierbar und somit getrennt berechenbar.

2.5.3 Schnelle Fourier-Transformation

Da die Fourier-Transformation quadratische Komplexität besitzt, das heißt $O(n^2)$, und damit eine Vielzahl an Berechnungsschritten benötigt, wird hier zur schnelleren Berechnung die Fast Fourier-Transformation (FFT) vorgeschlagen. Sie macht sich zunutze, dass das Problem der Berechnung der Fourier-Transformation in zwei Subprobleme mit der halben Länge aufgeteilt wird. Dies wird solange fortgesetzt, bis die Signallänge 1 beträgt, um anschließend aus dem Resultat durch schrittweise Verknüpfung die vollständige Fourier-Transformation zu berechnen. Der Vorteil besteht in der hohen Effizienz durch das Teilen des Problems. Dadurch kann die Komplexität auf $O(n \log \sqrt{n})$ reduziert werden. Allerdings bedeutet das, dass die Länge des Signals oder Bildes eine Zweierpotenz sein muss.

2.5.4 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Die hier vorgestellten Eigenschaften beziehen sich sowohl auf die kontinuierliche, als auch auf die diskrete Fourier-Transformation. Die meisten davon gelten in beiden Fällen. Zwei davon bleiben allerdings nur durch Approximation bestehen.

Die erste wichtige Eigenschaft, die in beiden Fällen uneingeschränkt gilt, ist die Linearität. Sie besagt, dass die Fourier-Transformation der Addition zweier Funktionen f und g , die mit den Skalaren a und b multipliziert werden, aufgeteilt werden kann in die einzelnen Fourier-Transformationen der beiden Funktionen, die hinterher durch a und b skaliert und anschließend addiert werden. Formal wird das Theorem durch Formel 2.19 beschrieben.

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g], \quad \forall a, b \in \mathbb{R} . \quad (2.19)$$

Eine zweite wichtige Eigenschaft ist das zuvor kurz erwähnte Shift-Theorem. Es wird durch Formel 2.20 beschrieben. Eine Verschiebung der Funktion führt im Frequenzbereich zur Multiplikation mit einem komplexen Skalar und umgekehrt. Diese Eigenschaft gilt sowohl im kontinuierlichen als auch im diskreten Fall. Zu beachten ist, dass in diesem Fall der Phasenwinkel gedreht, das Fourierspektrum jedoch nicht davon beeinflusst wird. Somit gilt für die Fourier-Transformation die Verschiebungsinvarianz.

$$\mathcal{F}[f(x - x_0, y - y_0)](u, v) = e^{-i2\pi(ux_0 + vy_0)} \mathcal{F}[f](u, v) . \quad (2.20)$$

Eine weitere Eigenschaft ist das Faltungstheorem. Es besagt, dass die Fourier-Transformation einer Faltung zweier Funktionen der Multiplikation der Fourier-Transformation beider Funktionen entspricht. Dies erleichtert die Berechnung der Faltung, da auf diese Weise nur eine Multiplikation pro Pixel stattfindet, was bei n Pixeln zu einer Komplexität von $O(n)$ führt. Zu beachten ist, dass es sich um eine komplexe Multiplikation handelt. Im Gegensatz dazu wurden bei der Faltung ansonsten alle Pixel in die Berechnung mit einbezogen, was einer Komplexität von $O(n^2)$ entspricht. Jedoch ist zu bedenken, dass die Funktionen zuvor mithilfe der Fourier-Transformation umgewandelt und hinterher mit der inversen Fourier-Transformation wieder zurückgewandelt werden müssen. Allerdings ist dieser Rechenaufwand meist geringer als die normale Berechnung der Faltung, vor allem wenn die schnelle Fourier-Transformation (FFT) verwendet wird, was, wie bereits oben beschrieben, eine Komplexität von $O(n \log \sqrt{n})$ bedeutet. Zu beachten ist bei der Anwendung auf diskrete Signale und Bilder, dass die Fourier-Transformation eine unendliche Fortsetzung des Signals oder Bildes durch wiederholte Kopien nebeneinander annimmt. Dies ist typischerweise nicht der Fall, weshalb dieses Verfahren an Grenzen stoßen kann. Als Formel ausgedrückt, lautet das Faltungstheorem:

$$\mathcal{F}[f * g] = c \cdot \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] , \quad (2.21)$$

wobei der Vorfaktor c durch die Definition der Fourier-Transformation als Orthonormalbasiswechsel zustande kommt. Er entspricht dem inversen Vorfaktor der Hintransformation. Diese Definition bezieht sich auch auf die zukünftigen Vorkommen des Vorfaktors c .

Für das Faltungstheorem gibt es ein ähnliches Theorem, das sich auf die Faltung im Fourierbereich bezieht, das Multiplikationstheorem. Es besagt, dass die Fourier-Transformation eines Produkts zweier Funktionen einer Faltung der beiden Fourier-transformierten Funktionen. Definiert wird es in Formel 2.22:

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = c \cdot \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] . \quad (2.22)$$

Bei der nächsten Eigenschaft handelt es sich um das Ableitungstheorem. Es besagt, dass die Fourier-Transformation der Ableitung einer Funktion einer Multiplikation mit der entsprechenden Frequenz im Fourier-Bereich entspricht. Daraus ergibt sich:

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m} \right] = (i2\pi u)^n (i2\pi v)^m \mathcal{F}[f](u, v) . \quad (2.23)$$

Die beiden Eigenschaften, die nur begrenzt im diskreten Bereich gelten, sind das Skalierbarkeitstheorem und die Rotationsinvarianz. Ersteres bezieht sich auf die Fourier-Transformation einer Funktion mit skalierten Funktionsvariablen. Dies hat eine Skalierung der Fourier-Transformation der Funktion und der Funktionsvariablen der Fourier-Transformation zur Folge, wie in Formel 2.24 gezeigt wird.

$$\mathcal{F}[f(ax, by)](u, v) = \frac{1}{|ab|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} . \quad (2.24)$$

Die Rotationsvarianz sagt lediglich aus, dass im Falle einer Drehung des Bildes, auch die Fourier-Transformation mit demselben Winkel gedreht wird.



Abbildung 2.5: Es wird das Bild zusammen mit seinem zugehörigen Fourierspektrum gezeigt.
Links: Originalbild. **Rechts:** Fourierspektrum des Originalbildes.

2.6 ANALYSE DER FALTUNGSKERNE

Es folgt nun eine kurze Analyse der Faltungskerne. Um ihre Auswirkungen besser nachvollziehen zu können, vor allem bei der Faltung, werden sie zunächst im Fourier-

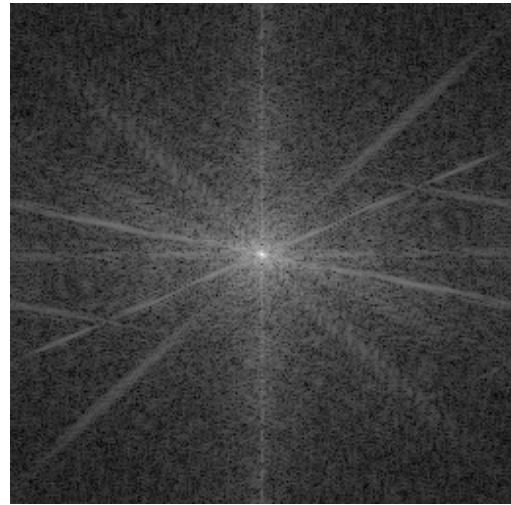


Abbildung 2.6: Es wird das Fourierspektrum des Kernels zusammen mit dem Fourierspektrum des gefalteten Bildes gezeigt. **Links:** Fourierspektrum des Punkt-förmigen erhaltenen Faltungskerns. **Rechts:** Fourierspektrum des gefalteten Bildes.

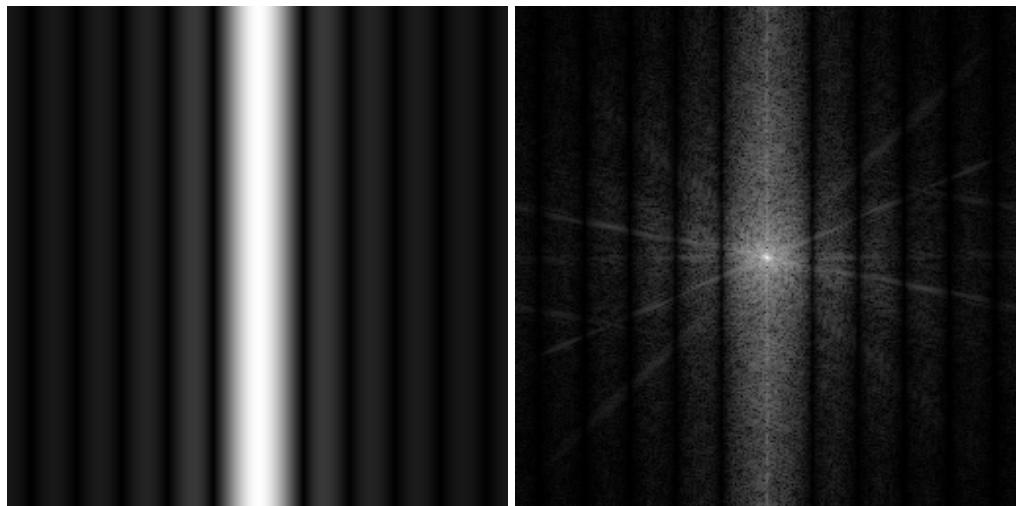


Abbildung 2.7: Es wird das Fourierspektrum des Kernels zusammen mit dem Fourierspektrum des gefalteten Bildes gezeigt. **Links:** Fourierspektrum des Box-förmigen Faltungskerns. **Rechts:** Fourierspektrum des gefalteten Bildes.

bereich betrachtet. Dazu wird am besten das Fourierspektrum verwendet. Die genaue Definition der Faltungskerne wurde bereits oben beschrieben. Wie oben bereits genannt, symbolisiert das Fourierspektrum die Bedeutung einer Frequenz u im Signal bzw. Bild f . Die Spektren wurden so skaliert, dass ein Grauwert von 255 einem Ge-

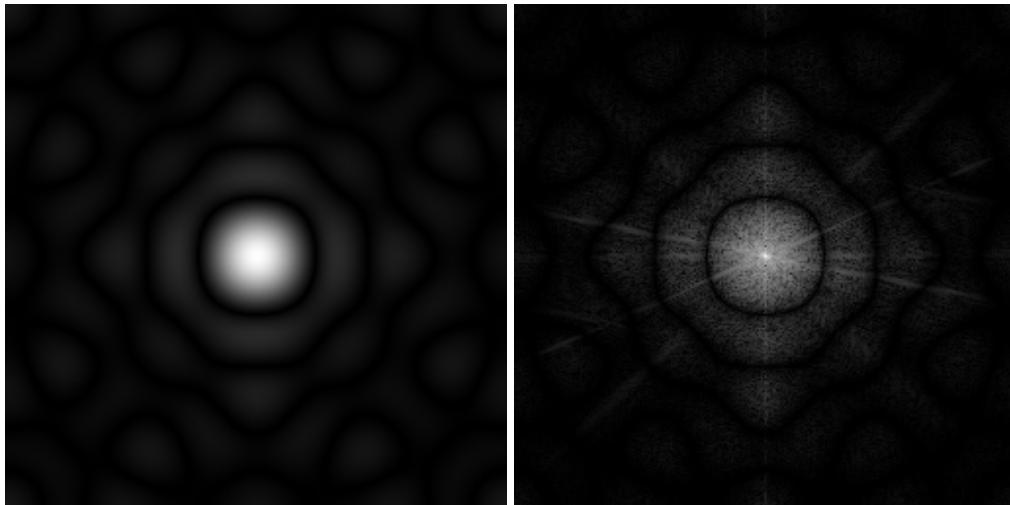


Abbildung 2.8: Es wird das Fourierspektrum des Kernels zusammen mit dem Fourierspektrum des gefalteten Bildes gezeigt. **Links:** Fourierspektrum des Zylinderförmigen Faltungskerns. **Rechts:** Fourierspektrum des gefalteten Bildes.

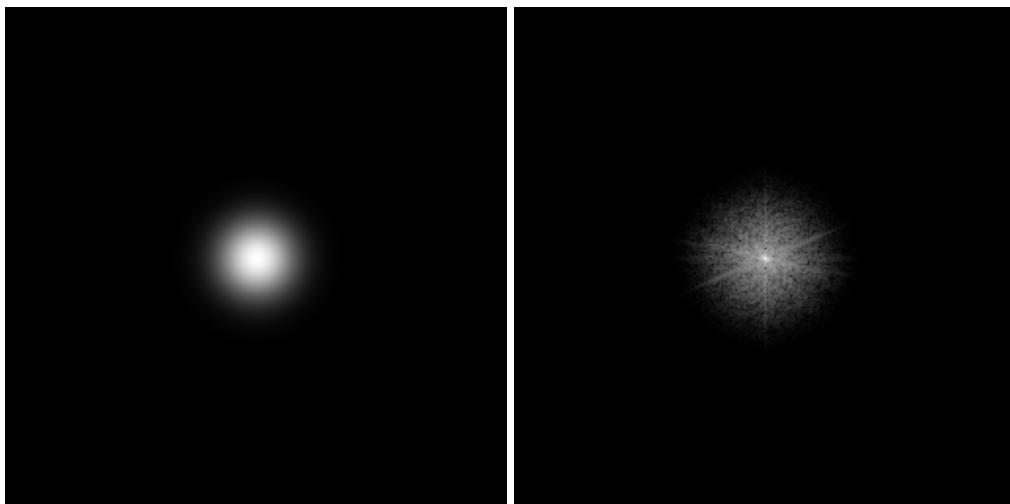


Abbildung 2.9: Es wird das Fourierspektrum des Kernels zusammen mit dem Fourierspektrum des gefalteten Bildes gezeigt. **Links:** Fourierspektrum des Gauß-förmigen Faltungskerns. **Rechts:** Fourierspektrum des gefalteten Bildes.

Tabelle 2.1: MSE-Wertetabelle der Faltungskerne. Der Wert gibt an, wie sehr sich das unscharfe Bild, das mit dem zugehörigen Faltungskern gefaltet wurde, vom Originalbild unterscheidet. Je größer der MSE-Wert, desto größer auch der Unterschied. Die Werte zu den Parametern der Faltungskerne sind in Klammern dahinter aufgeführt.

Faltungskern	MSE
Identität	0
Box (Winkel $\varphi = 0^\circ$, Radius = 5 Pixel)	477,993530
Box (Winkel $\varphi = 35^\circ$, Radius = 8 Pixel)	628,687805
Zylinder (Radius = 5 Pixel)	534,411377
Zylinder (Radius = 8 Pixel)	729,357117
Gauß ($\sigma = 3$)	518,283447
Gauß ($\sigma = 5$)	751,276062

wicht von 1 entspricht. Zunächst ist auf der Abbildung 2.5 das Originalbild mit dem zugehörigen Fourierspektrum zu sehen.

Auf den ersten Blick ist beim Fourierspektrum des Faltungskerns, der das Bild ohne Veränderung nur erhält, wenig zu erkennen (siehe Abbildung 2.6). Es handelt sich um ein vollständig weißes Bild. Dies liegt daran, dass der Wert immer 255 ist, da jedes Pixel des Bildes im Fourierbereich mit 1 multipliziert wird. Das ist notwendig, damit kein Pixel verändert wird, was bedeutet, dass jede Frequenz im Bild gleich wichtig ist. Dies wirkt sich auf das Fourierspektrum des Faltungskerns aus, wodurch er weiß erscheint.

Im Falle der Bewegung wird eine sogenannte Boxfunktion als Faltungskern verwendet. Wird diese in den Fourierbereich transformiert (siehe Abbildung 2.7), so entsteht daraus eine Sinc-Funktion, die folgendermaßen definiert ist:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} . \quad (2.25)$$

Auch im Falle der Defokussierung, bei der eine Zylinderfunktion eingesetzt wird, kommt es zu einem ähnlichen Spektrum (siehe Abbildung 2.8), da eine Zylinderfunktion nur eine einmal im Kreis gedrehte Boxfunktion ist.

Im Gegensatz ändert sich die Gauß-Funktion kaum. Dies liegt daran, dass die Fourier-Transformation einer Gauß-Funktion wieder eine Gauß-Funktion ergibt (siehe Abbildung 2.9).

Eine weitere beobachtbare Auswirkung der Faltung des Bildes mit den unterschiedlichen Faltungskernen ist der MSE. In der folgenden Tabelle 2.1 ist aufgelistet, wie groß der Unterschied im Mittel zwischen dem Ursprungsbild und dem gefalteten Bild ist.

2.7 PARTIELLE ABLEITUNG

Es folgt eine kurze Erläuterung bezüglich der Notationen und Bedeutungen hinsichtlich partieller Ableitungen, wie sie beispielsweise auch in [3] beschrieben sind. Dies ist insbesondere bei Funktionen mit mehreren Variablen interessant. Als Bedingung gilt, dass die Funktion stetig und differenzierbar sein muss. Die partielle Ableitung einer Funktion entspricht dann der Ableitung der Funktion nach genau einer Variablen, wobei andere Variablen als Konstanten angesehen werden. Es folgt ein einfaches Beispiel, bei dem zunächst die Funktion, definiert in Formel 2.26, und anschließend jeweils die partielle Ableitung einer Variablen gebildet wird, wie in den Formeln 2.27 und 2.28 gezeigt wird:

$$f(x, y) = \sin(x) + xy^3 , \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x) + y^3 , \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3xy^2 . \quad (2.28)$$

Folgende Notationen können für partielle Ableitungen verwendet werden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x . \quad (2.29)$$

Partielle Ableitungen können auch nacheinander erfolgen, um Ableitungen höherer Ordnung zu ermöglichen. Hierbei ist es möglich, nacheinander nach verschiedenen Variablen abzuleiten. Es gilt die folgende Schreibweise, wobei die Indizes vertauschbar sind:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = f_{yx} . \quad (2.30)$$

Werden die partiellen Ableitungen als Spaltenvektor angeordnet, so handelt es sich um den Nabla-Operator ∇ . Er ist im Zweidimensionalen folgendermaßen definiert:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} . \quad (2.31)$$

Wird der Nabla-Operator auf eine Funktion angewendet, ergibt dies die partiellen Ableitungen der Funktion als Spaltenvektor, beschrieben durch Formel 2.32:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} . \quad (2.32)$$

Das Produkt einer Vektor-wertigen Funktion $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))^T$ mit dem Nabla-Operator wird Divergenz genannt. Die Definition lautet wie folgt:

$$\operatorname{div} f = \nabla^T f = (\partial_x, \partial_y) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \partial_x f_1 + \partial_y f_2 . \quad (2.33)$$

Die letzte Definition, die für partielle Ableitungen wichtig ist, gilt dem Laplace-Operator. Er setzt sich zusammen aus dem Produkt der Divergenz und dem Gradient einer Funktion, wie in Formel 3.11 gezeigt wird:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = (\partial_x, \partial_y) \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} = \partial_{xx} f + \partial_{yy} f . \quad (2.34)$$

2.8 QUADRATISCHE VARIATIONSANSÄTZE ZUR ENTRAUSCHUNG

Variationale Ansätze gehören zu einer Klasse von Verfahren zur Bildentrauschung. Ansätze zum Bildentrauschen sind beispielsweise in [4] und [5] zu finden. Sie basieren auf der Annahme, dass das entrauschte Bild ein Optimalitätskriterium erfüllt, das in Form eines Energiefunktionalen gegeben ist. Wenn man dazu annimmt, dass im Bild etwas Rauschen enthalten ist, kann folgendes variationales Modell verwendet werden. Die Formel verbindet zwei Anforderungen an das gefilterte Bild: Einerseits soll es so ähnlich wie möglich am Ursprungsbild f sein, andererseits soll es so glatt wie möglich sein. Für den zweidimensionalen kontinuierlichen Fall ergibt sich daraus folgende Formel (f und u sind zweidimensionale kontinuierliche Funktionen):

$$E_f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((u - f)^2 + \alpha |\nabla u|^2) dx dy . \quad (2.35)$$

Hierbei soll das gefilterte Signal u dieses Energiefunktional minimieren, damit es der optimalen Lösung möglichst nahe kommt. Der erste Teil dieses Terms, bestehend aus der quadrierten Differenz der beiden Signale, sorgt für die Ähnlichkeit zwischen dem Ursprungsbild f und dem gefilterten Bild u . Es handelt sich dabei um den Datenterm. Der zweite Teil, also der Gradient von u mit seinem Vorfaktor, ist für die Glattheit verantwortlich. Daher wird dieser Term Glattheitsterm genannt. Der Glattheitsterm wird in dieser Methode quadriert, welche häufig auch Whittaker-Tikhonov-Regularisation genannt wird. Bei α handelt es sich um einen Parameter, der zur Regularisierung dient, das heißt, wie stark die Glättung eingreift. Je größer α ist, desto glatter wird das Bild und desto weniger fallen kleine Störungen auf.

Um das Energiefunktional zu minimieren und damit eine bestmögliche Lösung zu erhalten, muss die Ableitung des Energiefunktional gebildet und nach u gelöst werden. Dazu wird als Hilfsmittel die Euler-Lagrange-Gleichung verwendet, welche in den folgenden beiden Kapiteln vorgestellt und auf das Energiefunktional angewendet werden soll.

2.9 EULER-LAGRANGE-GLEICHUNG

Da es sich beim Theorem zur Euler-Lagrange-Gleichung um ein sehr komplexes Theorem handelt, wird nur die Hauptaussage festgehalten. Weitergehende Informationen dazu und der Anwendung sind beispielsweise in [6] und [7] zu finden. Im Fall dieser Arbeit bezieht sich das Theorem auf das Minimieren des Energiefunktionalen. Es wird angenommen, dass eine Funktion $u(x)$ zwischen zwei Grenzen a und b existiert, die das folgende Funktional in Formel 2.36 minimiert:

$$E(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx . \quad (2.36)$$

Gilt obiges, so muss die Funktion $u(x)$ die Euler-Lagrange-Gleichung in Formel 2.37 erfüllen, die folgendermaßen definiert ist:

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} = 0 . \quad (2.37)$$

Hinzu kommen sogenannte natürliche Randbedingungen, die für $x = a$ und $x = b$ ebenfalls immer erfüllt sein müssen. Sie lauten wie folgt:

$$F_{u'} = 0 . \quad (2.38)$$

Daraus folgt, dass wenn ein u gesucht ist, welches das gegebene Funktional minimiert, zur Lösung des Problems die Euler-Lagrange-Gleichungen nach diesem u gelöst werden müssen, um das Optimum zu finden. Dieser Zusammenhang erleichtert das Finden und Berechnen des Optimums u zur Minimierung des Funktionalen. Das Optimum u^* ist so definiert, dass es sich dabei um das u handelt, welches das Energiefunktional zu 0 minimiert.

Die Euler-Lagrange-Gleichung lässt sich auch auf den zweidimensionalen Fall übertragen. Es handelt sich also um ein Funktional der folgenden Form:

$$E(u) = \int_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy . \quad (2.39)$$

Daraus ergibt sich die folgende Euler-Lagrange-Gleichung:

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} - \frac{d}{dy} F_{u_y} = 0 . \quad (2.40)$$

Die natürlichen Randbedingungen für den Bildrand $\partial\Omega$ mit dem Normalenvektor n lauten in diesem Fall:

$$n^T \begin{pmatrix} F_{u_x} \\ F_{u_y} \end{pmatrix} = 0 . \quad (2.41)$$

Die Erweiterung auf noch höhere Dimensionen verläuft entsprechend.

2.10 ANWENDUNG DER EULER-LAGRANGE-GLEICHUNG

Um die Euler-Lagrange-Gleichung als Löser für das Minimierungsproblem eines Energiefunktionalen anzuwenden, wird hier zunächst von zweidimensionalen kontinuierlichen Bildern ausgegangen. Damit ergibt sich für das Funktional folgende Abhängigkeit, gezeigt in den Formeln 2.42, 2.43, 2.44 und 2.45:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{1}{2}(u - f)^2 + \frac{\alpha}{2}(u_x^2 + u_y^2) . \quad (2.42)$$

Als partielle Ableitungen ergibt sich daraus:

$$F_u = (u - f) , \quad (2.43)$$

$$F_{u_x} = \alpha u_x , \quad (2.44)$$

$$F_{u_y} = \alpha u_y . \quad (2.45)$$

Das führt zu folgender Euler-Lagrange-Gleichung für ein minimierendes u :

$$0 = u - f - \alpha \Delta u . \quad (2.46)$$

Die dazugehörige natürliche Randbedingung für den Rand des Bildes mit dem Normalenvektor n lautet:

$$0 = n^T \nabla u = \partial_n u . \quad (2.47)$$

2.11 DISKRETIERUNG DER QUADRATISCHEN VARIATIONSANSÄTZE

Variationale Ansätze sind selbstverständlich auch auf diskrete Fälle erweiterbar. Dadurch handelt es sich bei f und u nicht mehr um kontinuierliche Funktionen, sondern um diskrete Vektoren. Die zu minimierende Formel lautet im eindimensionalen diskreten Fall (f und u sind eindimensionale Signale der Länge N):

$$E_f(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (u_k - f_k)^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (u_{k+1} - u_k)^2 . \quad (2.48)$$

Um dieses Energiefunktional zu minimieren, muss die Ableitung insgesamt gleich 0 sein. Dazu werden die partiellen Ableitungen bestimmt, wobei für jede gilt, dass auch sie 0 ergeben muss. Wird dies auf ein Signal u mit der Länge N angewendet, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial E_f}{\partial u_1} = u_1 - f_1 + \alpha(u_1 - u_2) , \quad (2.49)$$

$$0 = \frac{\partial E_f}{\partial u_i} = u_i - f_i + \alpha(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}), \quad (i = 2, \dots, N-1) , \quad (2.50)$$

$$0 = \frac{\partial E_f}{\partial u_N} = u_N - f_N + \alpha(u_N - u_{N-1}) . \quad (2.51)$$

Die erste und letzte Gleichung, Formeln 2.49 und 2.51, lassen sich so interpretieren, dass das Signal am Rand gespiegelt ist. Das bedeutet, dass $u_0 = u_1$ und $u_{N+1} = u_N$ gilt. Formel 2.50 beschreibt dagegen den allgemeinen Fall für die Pixel, welche sich nicht am Rand befinden. Durch diese Gleichungen lässt sich ein lineares Gleichungssystem aufstellen, welches gelöst werden muss. Sie bilden eine diskretisierte Variante der Euler-Lagrange-Gleichung.

Es ist möglich, die Formel 2.48 für das Energiefunktional auf den zweidimensionalen diskreten Fall auszuweiten. Bei $\mathcal{N}(i, j)$ handelt es sich um alle benachbarten Pixel des aktuell betrachteten Pixels (i, j) . Im zweidimensionalen Fall kommen zur Berechnung für jedes Pixel, je nach Position, unterschiedlich viele Nachbarn in Frage. Dies darf nicht außer Acht gelassen werden, weswegen die einzelnen Fälle separat betrachtet werden müssen. Befindet sich das betrachtete Pixel in einer Ecke, so hat es nur zwei angrenzende Nachbarn, wobei diese sich für jede Ecke an unterschiedlichen Seiten des Pixels befinden. Falls sich das Pixel am Rand befindet, gibt es drei Nachbarn, deren Position abhängig davon ist, an welchem Rand sich das betrachtete Pixel befindet. Der letzte Fall ist eher trivial, da es sich hierbei um alle restlichen Pixel handelt, das heißt alle Pixel, die sich weder am Rand noch in einer Ecke befinden. Diese Pixel haben immer vier angrenzende Nachbarn, die sich um das Pixel herum befinden. Es ist in allen Fällen bei der Berechnung des betrachteten Pixels nicht von Bedeutung, an welcher Position sich seine Nachbarn befinden, das heißt, welchem dieser obigen Fälle der jeweilige Nachbar zugeordnet wird. Somit folgt für das Energiefunktional im Zweidimensionalen:

$$E_f(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left((u_{i,j} - f_{i,j})^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{p,q} - u_{i,j})^2 \right) . \quad (2.52)$$

Auch im zweidimensionalen Fall muss das Energiefunktional minimiert werden, um die bestmögliche Lösung zu erhalten. Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$u_{i,j} + \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{p,q} - u_{i,j}) = f_{i,j} . \quad (2.53)$$

Die Erweiterung auf Dimensionen mit $m > 2$ ist ebenfalls auf diese Weise möglich. Je höher die Dimension m jedoch ist, desto größer wird dadurch der Rechen- und Specheraufwand, um das Gleichungssystem zu lösen. Daher werden dafür meist iterative Löser verwendet, da sie effizienter sind.

Insgesamt gilt bei diesen Energiefunktionalen, dass sie minimiert werden sollen. Die Berechnung des gefilterten Bildes u wird wie durch die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung realisiert. Nach der Diskretisierung erhalten wir ebenfalls [2.53](#).

3. VERFAHREN ZUR DEKONVOLUTION

Dieses Kapitel behandelt verschiedene Methoden zur Rekonstruktion von Bildern, die durch einen Faltungsprozess unscharf geworden sind. Dies wird unter anderem durch eine Dekonvolution, also eine Entfaltung des Bildes, versucht. Dabei werden zwei Hauptansätze betrachtet. Einerseits gibt es Fourier-basierte Methoden, andererseits variationale Ansätze. Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, dass unscharfe Bilder folgendem Bildgebungsprozess unterlegen haben:

$$f(x, y) = (h * u)(x, y) + n(x, y) . \quad (3.1)$$

Hierbei steht f für das unscharfe Bild, h ist der (bekannte) Faltungskern und u entspricht dem (unbekannten) idealen Bild. In dieser Arbeit handelt es sich bei dem idealen Bild um das Originalbild, n steht für Rauschen, welches das Bild zusätzlich stört. Ist das Rauschen hinreichend klein, ist n vernachlässigbar und wir erhalten die Vereinfachung:

$$f(x, y) = (h * u)(x, y) . \quad (3.2)$$

3.1 FOURIER-BASIERTE METHODEN

Diese Methoden beschäftigen sich damit, die Bilder durch eine Fourier-Transformation in den Fourier-Bereich zu überführen und anschließend durch geeignete Berechnungen die Fehler im Frequenzbild möglichst zu eliminieren. Zu beachten ist, dass auch der gegebene Kernel in den Fourier-Bereich transformiert wird, um die Dekonvolution zu ermöglichen. Wird nun obige Formel 3.2 zur Beschreibung eines unscharfen Bildes verwendet und diese in den Fourier-Bereich transformiert, so ergibt sich durch das Faltungstheorem die Grundlage für die folgenden Verfahren:

$$\hat{f} = c \cdot \hat{h} \cdot \hat{u} , \quad (3.3)$$

wobei c eine Konstante ist, die von der Definition der Fourier-Transformation abhängt (siehe Abschnitt 2.5.4).

3.1.1 *Inverses Filtern*

Das inverse Filtern macht sich Formel 3.3 zunutze, um das ideale Bild nach dieser Formel zu berechnen:

$$\hat{u} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\hat{f}}{\hat{h}} . \quad (3.4)$$

Dadurch sollte es möglich sein, das Bild genau so wieder herzustellen, wie es vor der Faltung war. Allerdings handelt es sich beim Faltungskern h meist um einen Tiefpassfilter. Das heißt, dass er niedrige Frequenzen ungehindert durchlässt und hohe Frequenzen schwächt und teilweise herausfiltert. Wird nun \hat{h} im Fourier-Bereich betrachtet, bedeutet das, dass der Faltungskern gegen 0 geht und somit bei der Division einen hohen Multiplikationsfaktor erzeugt. Dadurch werden hohe Frequenzen wie Rauschen um ein Vielfaches verstärkt. Somit ist das inverse Filtern im Normalfall ohne zusätzliche Stabilisation nicht verwendbar. Häufig wird deshalb das pseudoinverse Filtern mit einer einfachen Stabilisierung benutzt, definiert durch die folgende Formel:

$$\hat{u} = \begin{cases} \frac{1}{c} \cdot \frac{\hat{f}}{\hat{h}}, & \text{falls } |\hat{h}| > \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Wie sich anhand der Formel zeigt, wird der Wert von \hat{u} auf 0 gezwungen, sollte der Fall eintreten, dass $|\hat{h}|$ zu klein wird. Dies fängt die mögliche Verstärkung hoher Frequenzen ab. Jedoch ist abzuwegen, welcher Wert sich für ε eignet, da nicht zu viele Details gelöscht werden sollen.

3.1.2 Wiener Filter

Um eine verbesserte Stabilisierung des inversen Filterns zu garantieren, wurde der Wiener Filter eingeführt. Vorgestellt wurde sie in [8]. \hat{u} wird dabei nicht mehr exakt mit Hilfe der Formel 3.4 berechnet, sondern nur noch approximiert. Die dazugehörige Formel für das Wiener Filtern lautet:

$$\hat{u} \approx \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\hat{h}} \cdot \frac{|\hat{h}|^2}{|\hat{h}|^2 + K} \cdot \hat{f} . \quad (3.6)$$

Der mittlere Term sorgt für die Stabilisierung, welche von K abhängt. Bei K handelt es sich um einen positiven Parameter, der verhindert, dass bei einem Tiefpassfilter h hohe Frequenzen verstärkt werden, falls \hat{h} gegen 0 geht. Stattdessen geht der Funktionswert ebenfalls gegen 0. Der Parameter K , der das Verfahren stabilisiert und den Stabilisierungsterm steuert, muss meist abgeschätzt werden. Dadurch wird deutlich, dass diese Formel wie ein Bandpassfilter agiert, falls es sich bei h um einen Tiefpassfilter handelt. Tiefe Frequenzen werden durch das inverse Filtern und hohe Frequenzen durch die Stabilisierung abgeschwächt, während mittlere Frequenzen wie beim inversen Filtern verstärkt werden. Das macht das Wiener Filtern robuster gegenüber Rauschen und anderen zusätzlichen Störungen im Bild. Deswegen wird es auch als eines der besten linearen Verfahren gesehen, was die Dekonvolution von Bildern angeht.

3.2 VARIATIONSANSÄTZE

Eine zweite Klasse von Verfahren zur Dekonvolution, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, wie sie in [1] vorgestellt wurden, sind variationale Ansätze. Diese wurden bereits in den Abschnitten 2.8 und 2.11 vorgestellt. Als Hilfsmittel zur Minimierung des Energiefunktionalen wird die Euler-Lagrange-Gleichung verwendet (siehe Abschnitte 2.9 und 2.10). Dieses Verfahren soll nun bei der Dekonvolution angewendet werden.

3.2.1 Quadratische Variationsansätze zur Dekonvolution

Dieser bisherige Ansatz ist jedoch allgemein und löst nicht das Problem der Dekonvolution. Um dies zu ermöglichen, muss die Formel erweitert werden, indem der Datenterm durch den Faltungskern modifiziert wird. Dies ist dadurch begründet, dass als Bild f das gefaltete Bild verwendet wird. Das gefilterte Bild u soll jedoch nicht f ähnlich werden, sondern dem ursprünglichen Originalbild. Damit dies möglich ist, wird u so gefiltert, dass es f genau dann ähnlich wird, wenn u mit dem Faltungskern h gefaltet wurde. Daraus folgt im kontinuierlichen Fall:

$$E_f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((h * u - f)^2 + \alpha |\nabla u|^2) dx dy . \quad (3.7)$$

Auch hier muss der Minimierer gefunden werden, weswegen folgende Euler-Lagrange-Gleichung entsteht:

$$0 = h * (h * u - f) - \alpha \Delta u , \quad (3.8)$$

mit der reflektierenden Randbedingung $n^T \nabla u = 0$. Hierbei wird angenommen, dass der Faltungskern symmetrisch ist. Diese Gleichung muss nun diskretisiert und anschließend gelöst werden. Das diskrete Äquivalent zum Funktional 3.7 im Zweidimensionalen lautet zum Beispiel:

$$E_f(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(([h * u]_{i,j} - f_{i,j})^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} \frac{1}{2} (u_{p,q} - u_{i,j})^2 \right) , \quad (3.9)$$

mit der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung:

$$0 = [h * h * u]_{i,j} - [h * f]_{i,j} - \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{p,q} - u_{i,j}) . \quad (3.10)$$

Die folgenden Methoden verwenden zur Berechnung des gefilterten Bildes u nun eben diese Formel 3.10, wobei sich bei den einzelnen Verfahren jeweils Unterschiede bei der Vorgehensweise ergeben, auf welche Weise die Gleichung gelöst wird.

3.2.1.1 Lösung durch explizites Verfahren

Das erste Verfahren zur Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung in 3.10 versucht, sie mit Gradientenabstieg zu lösen. Das bedeutet, dass die berechnete Lösung, ausgehend von einem Startwert, iterativ verfeinert wird, um der optimalen Lösung u^* näher zu kommen. Als Beginn der Iteration, also u^0 , wird das gefaltete Bild f gewählt. Dadurch, dass die Faltung mit einem Faltungskern hinzukommt, erhöht sich die Komplexität des Gleichungssystems und somit der Rechenaufwand, es zu lösen. Dieser Ansatz wird im Folgenden ausschließlich diskret betrachtet.

Bei diesem Variationsansatz wird nun die ausmultiplizierte Euler-Lagrange-Gleichung verwendet, um die einzelnen Komponenten separat berechnen zu können. Da dieser Variationsansatz im Diskreten betrachtet wird, wird der Laplace-Operator des Glättungsterms folgendermaßen ersetzt:

$$\alpha[\Delta u]_{i,j} = \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{p,q} - u_{i,j}) . \quad (3.11)$$

Zunächst wird bei der Euler-Lagrange-Gleichung von der Trennung der beiden Bilder u und f ausgegangen, um den Zusammenhang zwischen dem gefalteten Bild f und dem Originalbild u nachzuvollziehen. Es folgt:

$$[h * h * u]_{i,j} - \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{p,q} - u_{i,j}) = [h * f]_{i,j} . \quad (3.12)$$

Anschließend wird die Formel 3.12 umgestellt, damit ein Gleichungssystem mit 0 als Lösung entsteht, worauf die nächsten Schritte basieren, um das Optimum zu bestimmen:

$$0 = -[h * h * u]_{i,j} + \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{p,q} - u_{i,j}) + [h * f]_{i,j} . \quad (3.13)$$

Nun wird ein iterativer Lösungsprozess eingeführt. Es wird angenommen, dass nach einer bestimmten Anzahl an Schritten das optimale u^* für diese Gleichung gefunden wird. Wird also obige Gleichung 3.13 auf das gefundene Optimum u^* angewendet, ergibt sich wiederum u^* . Das bedeutet, dass die Differenz zwischen diesen zwei Zeitschritten gleich 0 ist. Damit gilt für einen bestimmten Zeitpunkt k mit einer Zeitschrittweite τ :

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = 0 . \quad (3.14)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems wird diese Annahme in die Euler-Lagrange-Gleichung 3.13 eingesetzt:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = -[h * h * u^k]_{i,j} + \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{p,q} - u_{i,j}) + [h * f]_{i,j} . \quad (3.15)$$

Das neue u^{k+1} des neuen Zeitschritts berechnet sich also aus dem u^k des alten Zeitschritts durch folgende Berechnungsvorschrift:

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \tau \left(-[h * h * u^k]_{i,j} + \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{p,q} - u_{i,j}) + [h * f]_{i,j} \right) . \quad (3.16)$$

Nun wird klar, dass ausgehend vom alten Bild u^k das neue Bild u^{k+1} berechnet wird, indem dem negativen Gradienten mit Schrittweite τ gefolgt wird. Durch dieses Abwärtsgehen in der Energielandschaft wird die zugrunde liegende Energie (lokal) minimiert. Auf diese Weise können nach beliebig vielen Zeitschritten immer neue u^k berechnet werden, die dazu dienen, ein weiteres u^{k+1} zu berechnen. Iterationsbeginn u^0 ist das gegebene Bild f , welches dem mit dem Faltungskern h gefalteten Originalbild entspricht. Die Variable, die unter anderem bestimmt, wie schnell sich der Lösung angenähert wird, ist τ . Sie entspricht der Zeitschrittweite. Die Schwierigkeit bei der Wahl der Größe von τ ist, dass τ nicht zu groß gewählt werden darf, da sonst die Zeitschrittweite zu groß ist und möglicherweise über das Ziel hinausgegangen und dem Optimum u^* nicht sehr nahe gekommen wird. Wird τ allerdings zu klein gewählt, wird eine sehr große Anzahl an Iterationen benötigt, bis die Distanz zum Optimum u^* gering genug ist. Eine Möglichkeit diesem Problem entgegenzuwirken, ist, zu Beginn ein großes τ zu wählen. Nach einer bestimmten Anzahl an Iterationsschritten wird das Lösen des Gleichungssystems mit einem kleineren τ fortgesetzt. Dies kann beliebig oft wiederholt werden, bis das Optimum u^* nahe genug ist. Insgesamt gilt, dass die Anzahl an Iterationsschritten, bis das Verfahren abgebrochen wird, auf unterschiedliche Weise festgelegt werden kann. Eine Möglichkeit ist, eine feste Zahl festzulegen. Alternativ kann so lange gerechnet werden, bis die Energie klein genug ist oder sich nur noch wenig ändert.

3.2.1.2 Lösung durch stabilisiertes explizites Verfahren

Der folgende Variationsansatz ist eine Variante des eben vorgestellten Lösungsansatzes. Dieser Ansatz basiert hauptsächlich auf der Berechnungsvorschrift in Formel 3.15, verwendet jedoch zusätzlich die Annahme, dass bei der Diskretisierung des Laplace-Operators das momentan berechnete Pixel und seine Nachbarn getrennt betrachtet werden. $|\mathcal{N}(i,j)|$ entspricht dabei der Anzahl an Nachbarn des aktuell betrachteten Pixels (i,j) . Es gilt dabei:

$$\sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{p,q} - u_{i,j}) = \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} u_{p,q} - \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} u_{i,j} = \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} u_{p,q} - |\mathcal{N}(i,j)|u_{i,j} . \quad (3.17)$$

Nun basiert die Berechnung darauf, dass das zentrale Pixel aus dem neuen Iterationsschritt $k+1$ ist, während seine Nachbarn aus dem alten Iterationsschritt k sind. Damit entspricht die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = -[h * h * u^k]_{i,j} - \alpha |\mathcal{N}(i,j)| u_{i,j}^{k+1} + \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} u_{p,q}^k + [h * f]_{i,j} . \quad (3.18)$$

Wird diese Gleichung 3.18 nach dem neuen Iterationsschritt umgestellt, um das neue u^{k+1} zu berechnen, folgt:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i,j}^k + \tau(-[h * h * u^k]_{i,j} + \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} u_{p,q}^k + [h * f]_{i,j})}{1 + \tau\alpha|\mathcal{N}(i,j)|} . \quad (3.19)$$

Hier gelten, genau wie beim vorherigen Variationsansatz, die Vorschläge zur Anzahl der Iterationsschritte und Größe der Zeitschrittweite τ . Allerdings kann durch die Stabilisierung die Zeitschrittweite τ größer gewählt werden als beim vorherigen Lösungsansatz, weswegen das stabilisierte Verfahren dadurch meist schneller zu einer guten Lösung kommt.

3.2.1.3 Lösung im Fourier-Bereich

Der nächste Ansatz zur Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung in 3.10 ist Fourierbasiert. Es wird dabei das Faltungstheorem (siehe Abschnitt 2.5.4) genutzt, um die Euler-Lagrange-Gleichung zu lösen. Zu beachten ist, da hier im Fourier-Bereich gerechnet wird, dass alle Rechenoperationen im Komplexen stattfinden. Wird die Fourier-Transformation auf die Euler-Lagrange-Gleichung 3.10 angewendet, folgt:

$$c \cdot \mathcal{F}(h) \cdot (c \cdot \mathcal{F}(h) \cdot \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(f)) - \alpha \mathcal{F}(u_{xx}) - \alpha \mathcal{F}(u_{yy}) = 0 . \quad (3.20)$$

Für die beiden Ableitungen zweiter Ordnung wird das Ableitungstheorem verwendet (siehe Abschnitt 2.5.4). Damit lautet deren Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = (i2\pi p)^2 \mathcal{F}(u) , \quad (3.21)$$

$$\mathcal{F}(u_{yy}) = (i2\pi q)^2 \mathcal{F}(u) . \quad (3.22)$$

Um nun das gewünschte Bild zu erhalten, muss die Fourier-transformierte Euler-Lagrange-Gleichung nach u aufgelöst werden:

$$\mathcal{F}(u) = \frac{c \cdot \mathcal{F}(h)\mathcal{F}(f)}{c^2 \cdot \mathcal{F}(h)\mathcal{F}(h) + \alpha \cdot 4\pi^2(p^2 + q^2)} . \quad (3.23)$$

Bei Formel 3.23 ist die Ähnlichkeit dieses Ansatzes zum Inversen Filtern, genauer gesagt zum Wiener Filter, zu beachten. Durch eine Umformung lässt sich zeigen, dass sich die Vorgehensweisen zur Berechnung von u ähneln. Allerdings wird beim Wiener Filter die Stabilisierung durch den konstanten Parameter K gewährleistet, wohingegen in diesem Ansatz der nicht-konstante Glattheitsterm zu einer Stabilisierung im Nenner führt.

Das Ergebnis wird durch den Parameter α beeinflusst, der die Glattheit des Bildes während der Rekonstruktion reguliert. Üblicherweise wird dieser Parameter recht klein gewählt, um Kanten im Bild zu behalten und diese nicht zu stark zu glätten. Nachdem u entsprechend berechnet wurde, muss das Ergebnis zurücktransformiert werden. Somit folgt zur Berechnung von u mithilfe der Fourier-Transformation die Gleichung 3.24:

$$u = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{c \cdot \mathcal{F}(h)\mathcal{F}(f)}{c^2 \cdot \mathcal{F}(h)\mathcal{F}(h) + \alpha \cdot 4\pi^2(p^2 + q^2)} \right) . \quad (3.24)$$

Dieser Ansatz macht sich also die Euler-Lagrange-Gleichung zur Minimierung des Energiefunktionalen zunutze, um sie durch eine Fourier-Transformation zu lösen. Da hier sofort eine Lösung approximiert werden kann, ohne durch mehrfache Iterationen ein Optimum zu finden, handelt es sich bei diesem Verfahren um den schnellsten quadratischen Ansatz. Allerdings hängt die Qualität ausschließlich vom Parameter α ab.

3.2.2 Subquadratische Variationsansätze zur Dekonvolution

Die vorherigen Variationsansätze haben einen quadratischen Glattheitsterm, wodurch sich auch der Name dafür ableiten lässt. Es handelt sich um quadratische Variationsansätze. Der Nachteil ist, dass Abweichungen von der Glattheit quadratisch eingehen und damit aus Energiesicht sehr teuer sind. Das Ergebnis ist deshalb typischerweise zu glatt. Um scharfe Kanten im Ergebnisbild attraktiver zu machen, müssen Abweichungen von der Glattheit weniger stark, zum Beispiel linear, bestraft werden. Hierzu wird eine subquadratische Bestrafungsfunktion ψ eingeführt. Damit lässt sich das Energiefunktional subquadratischer Ansätze zu folgender Formel im kontinuierlichen zweidimensionalen Fall umschreiben:

$$E_f(u) = \int_{\Omega} (h * u - f)^2 + \alpha \psi(|\nabla u|^2) dx dy . \quad (3.25)$$

Anhand der Formel 3.25 lässt sich erkennen, dass der Datenterm, der sich auf die Ähnlichkeit bezieht, gleich belassen wird, während der Glattheitsterm um die bereits

erwähnte Funktion erweitert wird. Daraus lässt sich die erforderliche Euler-Lagrange-Gleichung 3.26 ableiten, die gleich 0 gesetzt werden muss, um das Energiefunktional, wie bei den quadratischen Ansätzen, zu minimieren.

$$0 = h * (h * u - f) - \alpha \operatorname{div}(\psi'(|\nabla u|^2) \nabla u) , \quad (3.26)$$

mit reflektierender Randbedingung $n^T \nabla u = 0$.

Wird für die Funktion ψ der Wert selbst verwendet, also $\psi(s^2) = s^2$, so ergibt sich für die Ableitung $\psi'(s^2) = 1$, was, wenn es in das Energiefunktional 3.25 und die Euler-Lagrange-Gleichung 3.26 eingesetzt wird, den quadratischen Ansatz ergibt. Für ψ muss eine passende Funktion gefunden werden, die Kanten erhält, also einen großen Wert für den Gradienten berücksichtigt. Dagegen soll sie glätten, wenn der Gradient klein ist. Mit diesen Vorschriften ergibt sich beispielsweise folgende subquadratische Funktion 3.27 und deren Ableitung 3.28, die im Weiteren verwendet wird.

$$\psi(s^2) = 2\lambda^2 \sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}} - 2\lambda^2 , \quad (3.27)$$

$$\psi'(s^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}} . \quad (3.28)$$

Die Funktion 3.27 ist abhängig von einem Parameter λ , der die Bewertung des Gradienten beeinflusst. Es kann gezeigt werden, dass die Funktion ψ' für große Werte für λ gegen 1 geht und somit lineare Diffusion erzeugt. Werden hingegen kleine Werte für λ gewählt, dominiert der Gradient, weswegen Kanten erhalten bleiben, da dort ψ' gegen 0 geht und der Diffusionsterm abgeschaltet wird. Daher eignen sich kleinere Werte besser zur Kantenerhaltung, wodurch bessere Resultate erzielt werden sollen. Das Energiefunktional wird im diskreten zweidimensionalen Fall verwendet, daher lautet die für diesen Fall abgewandelte Formel folgendermaßen:

$$E_f(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(([h * u]_{i,j} - f_{i,j})^2 + \frac{\alpha}{2} \cdot \psi \left(\sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} \frac{1}{2} (u_{p,q} - u_{i,j})^2 \right) \right) . \quad (3.29)$$

Es folgt für die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$0 = [h * h * u]_{i,j} - [h * f]_{i,j} - \alpha \cdot \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} \left(\frac{(\psi'_{i,j} + \psi'_{p,q})}{2} \cdot (u_{i,j} - u_{p,q}) \right) . \quad (3.30)$$

Für die Auswertung der Ableitung von ψ gilt für einen Pixel (i,j)

$$\psi'_{i,j} = \psi' \left(\frac{1}{2} (u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + \frac{1}{2} (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2 + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2 \right) , \quad (3.31)$$

wobei für Pixel in den Ecken und am Rand separate Fälle betrachtet werden müssen, falls nicht von einem gespiegelten Rand ausgegangen wird.

3.2.2.1 Lösung durch explizites Verfahren

Auch für den subquadratischen Ansatz wird das explizite Verfahren des quadratischen Ansatzes verwendet, gezeigt in Formel 3.15, indem die Differenz zwischen zwei Berechnungsschritten u^{k+1} und u^k genutzt wird, abhängig von einem Parameter τ . Damit ergibt sich für die allgemeine Berechnungsvorschrift folgende Formel:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = -[h * h * u^k]_{i,j} + [h * f]_{i,j} + \alpha \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} \left(\frac{(\psi'_{i,j} + \psi'_{p,q})}{2} \cdot (u_{i,j}^k - u_{p,q}^k) \right). \quad (3.32)$$

Um den neuen Iterationsschritt u^{k+1} aus dem vorherigen Zeitschritt u^k zu berechnen, wird die Formel 3.32 umgestellt, sodass sich dafür folgendes ergibt:

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \tau \left(-[h * h * u^k]_{i,j} + [h * f]_{i,j} + \alpha \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}(i,j)} \left(\frac{(\psi'_{i,j} + \psi'_{p,q})}{2} \cdot (u_{i,j}^k - u_{p,q}^k) \right) \right). \quad (3.33)$$

Weiterhin können hier ähnliche Modifikationen wie beim quadratischen Variationsansatz vorgenommen werden, wie beispielsweise das stabilisierte explizite Schema. Eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung im Fourier-Bereich wie beim quadratischen Variationsansatz ist beim subquadratischen Ansatz aufgrund der Nichtlinearität und Pixelabhängigkeit von ψ' nicht möglich.

4. EVALUATION

Dieses Kapitel thematisiert die Ausarbeitung, Implementierung und Evaluierung der Ergebnisse der im vorherigen Kapitel erwähnten Ansätze und Methoden. Dabei ist vor allem der Vergleich der Verfahren miteinander interessant, um ein aussagekräftiges Fazit zu ermöglichen. Einerseits werden die variationalen Ansätze mit den Fourier-basierten Methoden verglichen, andererseits müssen sie einander gegenübergestellt werden. Hierbei sind insbesondere die Unterschiede zwischen den MSE-Werten der Verfahren zueinander bedeutsam, weshalb diese Werte als Maß genommen werden. Speziell um die Variationsansätze miteinander zu vergleichen, wird die Anzahl an Iterationsschritten variiert. Zunächst folgen einige Grundbedingungen, die für die Experimente festgesetzt wurden. Daraufhin werden die Parameter diskutiert und ihre Auswirkungen auf die Verfahren getestet. Abschließend erfolgt der Vergleich.

4.1 GENERELLE GRUNDBEDINGUNGEN

Bei der Evaluation der Verfahren wurde als originales Ursprungsbild das Bild des Kameramanns (siehe Abbildung 4.2) verwendet. Es handelt sich dabei um ein Bild ausschließlich in Graustufen, wobei die Skala für diese Grauwerte von 0, dem niedrigsten Wert und damit dem dunkelsten Grauton, also Schwarz, bis hin zu 255, dem höchsten und somit hellsten Grauton, also Weiß, reicht. Die Größe des Bildes ist 256 x 256 Pixel.

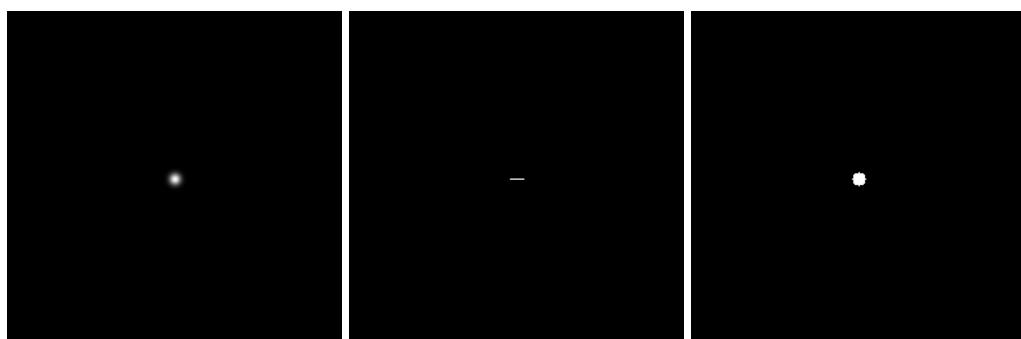


Abbildung 4.1: Hier werden die drei Faltungskerne gezeigt, mit denen das Originalbild gefaltet wird. **Links:** Gauß-förmiger Faltungskern, der eine atmosphärische Störung modelliert. **Mitte:** Box-förmiger Faltungskern, der eine Bewegung modelliert. **Rechts:** Zylinder-förmiger Faltungskern, der eine Defokussierung modelliert.



Abbildung 4.2: Hier werden das Originalbild und die gefalteten Bilder gezeigt. Die gefalteten Bilder werden den vorgestellten Verfahren unterzogen und die Resultate mit dem Originalbild verglichen. **Oben links:** Originalbild. **Oben rechts:** Gauß-gefaltetes Bild. **Unten links:** Box-gefaltetes Bild. **Unten rechts:** Zylinder-gefaltetes Bild.

Für die Modellierung der Unschärfeeffekte wurde dieses Bild jeweils mit einem Effekt versehen. Die Defokussierung wird, wie bereits erwähnt, durch einen Faltungskern in Form eines Zylinders dargestellt, wobei im Folgenden für die Größe des Radius der Wert 5 gewählt wurde. Auch die Größe des Radius der Boxfunktion, welche eine Bewegung modelliert, entspricht dem Wert 5. Der Winkel φ wurde gleich 0 gewählt, das heißt, es handelt sich um eine horizontale Bewegung. Um den letzten Effekt darzustellen, wurde die Gauß-Funktion mit dem Wert 3 für die Standardabweichung σ

verwendet. Es folgen die Bilder der drei Faltungskerne (siehe Abbildung 4.1), welche zu Anschauungszwecken und zur späteren Berechnung ebenfalls die Größe von 256 x 256 Pixeln haben.

Die Faltung der Faltungskerne mit dem Bild wurde im Fourier-Bereich realisiert, um die Rechenzeit zu verkürzen. Da es sich bei der Größe der Bilder um 2er-Potenzen handelt, wurde bei der Fourier-Transformation die FFT verwendet. Die Ergebnisse der Faltung (siehe Abbildung 4.2) entsprechen den zuvor erwähnten Unschärfeeffekten.

Die Verfahren wurden jedes Mal mit den gleichen Voraussetzungen auf jedes der gefalteten Bilder angewendet.

4.2 PARAMETERVERWALTUNG

Vor dem eigentlichen Vergleich folgen nun einige Voraussetzungen, die für die einzelnen Verfahren getroffen wurden. Es wird die Qualität der Parameter getestet, die in den Methoden verwendet werden. Um die Auswirkungen der Parameter besser einschätzen zu können, wird immer nur ein Parameter verändert.

Beim Wiener Filter ist K der einzige beeinflussbare Parameter, der im Term zur Stabilisierung vorhanden ist. Dieser Parameter wirkt sich darauf aus, wie stark die Stabilisierung in die Berechnung eingreift, was insbesondere bei Rauschen erforderlich ist. Üblicherweise werden jedoch für K sehr kleine Zahlen gewählt.

Der explizite quadratische Variationsansatz und der stablisierte explizite quadratische Variationsansatz haben die gleichen Parameter. Einerseits handelt es sich um den Parameter α , der sich auf den Glattheitsterm auswirkt. Der zweite Parameter, der nur bei den iterativen Lösungsverfahren existiert, jedoch nicht bei der Fourier-basierten Lösung, ist τ . Er entspricht der sogenannten Zeitschrittweite und sagt im Prinzip aus, wie groß der Schritt zwischen zwei Iterationsschritten k und $k + 1$ ist. Das bedeutet, er bestimmt, wie schnell sich der Lösung, also dem Minimum des Energiefunktional, genähert wird. Wird τ zu groß gewählt, so kann es passieren, dass zu große Schritte gemacht werden und das Minimum passiert wird, also die Lösung wieder größer wird. Ein möglicher Vorschlag, der bereits bei den angewandten Methoden vorgeschlagen wurde, ist die Anpassung von τ während des Rechenprozesses. Ist die Distanz zum Optimum sehr groß, so eignen sich große Werte für τ besser. Sollte die Entfernung zum Optimum sehr gering werden oder das Optimum sogar überschritten worden sein, so kann der letzte Iterationsschritt mit einem kleineren τ wiederholt werden. Die Wahl des Wertes für diesen Parameter beeinflusst direkt die Anzahl an Iterationsschritten. So ergeben 10 Iterationen mit $\tau = 1$ das gleiche Ergebnis wie 100 Iterationen mit $\tau = 0,1$. Der letzte Parameter, der ebenfalls nur bei den iterativen Lösungen eine Rolle spielt, ist die Anzahl der Iterationsschritte. Je größer die Anzahl, desto näher liegt die optimale Lösung, also das Minimum. Jedoch bedeutet eine höhere Anzahl an

Iterationsschritten eine längere Rechenzeit. Deshalb ist zu entscheiden, wie viele Iterationsschritte sinnvoll sind. Wie bereits erwähnt, ist eine Möglichkeit, eine feste Zahl an Schritten vorzugeben. Die Alternative dazu ist, die Anzahl entweder vom MSE oder von der Größe des Energiefunktional abhängig zu machen. Wenn der MSE oder das Energiefunktional klein genug sind, bedeutet das, dass die Lösung sehr nah ist und der Rechenprozess somit mit der aktuellen Lösung abgebrochen werden kann.

Beim subquadratischen Variationsansatz kommt zu den Parametern des quadratischen Ansatzes noch ein weiterer Parameter dazu, nämlich λ , der die Funktion ψ reguliert und sich auf die Kantenglättung auswirkt. Das bedeutet, dass hier vier verschiedene Parameter einwirken, durch deren Zusammenhang sich das Ergebnis bei Veränderung von Parameterwerten teilweise stärker variieren kann.

4.3 AUSWERTUNG DER PARAMETER

Im Folgenden werden die eigentlichen Experimente der Verfahren an den unscharfen Bildern und deren Ergebnisse vorgestellt. Zunächst gilt es, jedes Verfahren einzeln zu testen und die Auswirkungen der Parameter auf den jeweiligen Ansatz festzustellen. Hierbei wird jede Methode auf jedes der gefalteten Bilder angewendet, welche die drei unterschiedlichen Unschärfeeffekte simulieren. Die Auswertung der Ergebnisse findet anhand des resultierenden MSE-Wert statt.

4.3.1 Wiener Filter

Der Wiener Filter hat nur einen Parameter, der beeinflussbar ist. Es handelt sich dabei um K , einen Parameter, der den Term zur Stabilisierung reguliert. Die Hypothese vor Ausführung des Experiments ist, dass je größer K , desto größer ist der Stabilisierungsterm. Daraus folgt, dass das Ergebnisbild nach der Berechnung für ein größeres K schlechter, das heißt weiter entfernt vom ursprünglichen Originalbild ist, als für ein

Tabelle 4.1: MSE-Wertetabelle des Wiener Filters. In der Zeile steht der jeweilige Wert des Parameters K , während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Parameterwert	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
$K = 10^{-1}$	601,703674	461,375458	562,387329
$K = 10^{-5}$	219,979202	1,757151	9,749884
$K = 10^{-10}$	50,765614	0,000004	0,029170



Abbildung 4.3: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des Wiener Filters mit unterschiedlichen Werten für den Parameter K . In diesem Fall wurde der Wiener Filter auf das Gauß-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** Originalbild. **Oben rechts:** Wiener Filter mit $K = 10^{-1}$. **Unten links:** Wiener Filter mit $K = 10^{-5}$. **Unten rechts:** Wiener Filter mit $K = 10^{-10}$.

kleineres K . Das Experiment wird für drei unterschiedliche Werte für K durchgeführt. Es werden die Werte 10^{-1} , 10^{-5} und 10^{-10} getestet und deren MSE-Werte verglichen, um die Hypothese zu überprüfen.

Werden die MSE-Werte aus der Tabelle 4.1 für jedes Bild getrennt betrachtet, wird deutlich, dass die Hypothese in allen drei Fällen stimmt. Je kleiner das K im Stabilisierungsterm gewählt wird, desto kleiner ist der zugehörige MSE-Wert im Vergleich mit dem Originalbild, was bedeutet, dass das berechnete Ergebnisbild dadurch ähnlicher



Abbildung 4.4: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des Wiener Filters mit unterschiedlichen Werten für den Parameter K . In diesem Fall wurde der Wiener Filter auf das Box-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** Originalbild. **Oben rechts:** Wiener Filter mit $K = 10^{-1}$. **Unten links:** Wiener Filter mit $K = 10^{-5}$. **Unten rechts:** Wiener Filter mit $K = 10^{-10}$.

dem Originalbild wird. Insbesondere ist zu sehen, dass für das kleinste gewählte K das berechnete Bild im Falle des Box- und des Zylinder-Faltungskerns fast exakt dem Originalbild entspricht. Dies bedeutet eine gute Lösung. Im Gegensatz dazu kann für den größten Wert festgestellt werden, dass das Ergebnis im Falle des Gauß- und des Zylinder-Faltungskerns schlechter ist als das gefaltete Bild.



Abbildung 4.5: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des Wiener Filters mit unterschiedlichen Werten für den Parameter K . In diesem Fall wurde der Wiener Filter auf das Zylinder-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** Originalbild. **Oben rechts:** Wiener Filter mit $K = 10^{-1}$. **Unten links:** Wiener Filter mit $K = 10^{-5}$. **Unten rechts:** Wiener Filter mit $K = 10^{-10}$.

4.3.2 Quadratischer Variationsansatz (explizit)

Im Gegensatz zum vorherigen Ansatz gibt es beim expliziten quadratischen Variationsansatz mit Gradientenabstieg drei Parameter, die das Resultat beeinflussen. Der erste Parameter ist α , der sich auf den Glattheitsterm auswirkt. Es gilt der Zusammenhang zwischen Parameter und Term, dass je größer α ist, desto größer wird der Glattheitsterm und desto glatter wird das Ergebnisbild. Beim zweiten Parameter handelt es sich

Tabelle 4.2: MSE-Wertetabelle des expliziten Verfahrens. In der Zeile steht der jeweilige Wert des Parameters α , während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Parameterwert	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
$\alpha = 10^{-1}$	391,709717	287,494263	371,147827
$\alpha = 10^{-3}$	331,116943	112,018044	218,962311
$\alpha = 10^{-5}$	330,414459	104,770164	212,561523

Tabelle 4.3: MSE-Wertetabelle des expliziten Verfahrens. In der Zeile steht der jeweilige Wert des Parameters τ , während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Parameterwert	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
$\tau = 10^{-2}$	478,404999	436,903290	496,214203
$\tau = 10^{-1}$	399,707092	301,609619	398,057465
$\tau = 1$	330,414459	104,770164	212,561523

um den Parameter τ , welcher für die Zeitschrittweite steht. Er gibt an, wie groß die Schritte Richtung Optimum gemacht werden, das heißt, wie schnell sich der optimalen Lösung angenähert wird. Hinweise zur Wahl von Werten für τ wurden bereits weiter oben genannt. Der letzte Parameter bezieht sich auf die Anzahl an Iterationsschritten, die bei der Berechnung durchgeführt werden sollen. Je mehr Berechnungsschritte gemacht werden, desto geringer ist die Distanz zur Lösung. Dieser Parameter beeinflusst nicht direkt die Qualität der Lösung. Bei der Wahl dieses Parameters ist zu beachten, dass je größer er ist, desto länger wird gerechnet und desto länger braucht es, um an eine Lösung zu kommen. Es ist empfehlenswert, die Zahl an Iterationsschritten zu begrenzen oder nach einer bestimmten Anzahl abzubrechen, sobald die Lösung nahe genug ist oder sich nicht mehr viel ändert. Im Folgenden werden die drei Parameter einzeln getestet, um ihre Auswirkungen auf die Lösung besser zu beobachten. Die anderen beiden Parameter werden während des Tests mit einem konstanten Wert belegt.

Der erste Test beschäftigt sich mit dem Parameter α . Für α wurden die drei Werte 10^{-1} , 10^{-3} und 10^{-5} getestet. τ wurde für diesen Test der Wert 1 zugewiesen und es wurden 100 Iterationsschritte durchgeführt. Bei diesem Verfahren ist anhand der



Abbildung 4.6: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des expliziten quadratischen Variationsansatzes mit Gradientenabstieg nach unterschiedlich vielen Iterationen. In diesem Fall wurde der explizite quadratische Variationsansatz auf das Gauß-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** 100 Iterationen. **Oben mittig:** 300 Iterationen. **Oben rechts:** 500 Iterationen. **Unten links:** 1000 Iterationen. **Unten mittig:** 2000 Iterationen. **Unten rechts:** 3000 Iterationen.

Tabelle 4.4: MSE-Wertetabelle des expliziten Verfahrens. In der Zeile steht die jeweilige Anzahl an Iterationsschritten, während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Parameterwert	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
100 Iterationen	330,414459	104,770164	212,561523
300 Iterationen	305,849640	61,547993	140,473389
500 Iterationen	295,874390	50,786339	116,434662
1000 Iterationen	283,314178	41,529095	95,148331
2000 Iterationen	271,968903	36,884361	87,931831
3000 Iterationen	266,149658	36,213993	90,060371



Abbildung 4.7: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des expliziten quadratischen Variationsansatzes mit Gradientenabstieg mit unterschiedlichen Werten für den Parameter α . In diesem Fall wurde der explizite quadratische Variationsansatz auf das Box-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** 100 Iterationen. **Oben mittig:** 300 Iterationen. **Oben rechts:** 500 Iterationen. **Unten links:** 1000 Iterationen. **Unten mittig:** 2000 Iterationen. **Unten rechts:** 3000 Iterationen.

Tabelle 4.2 zu sehen, dass je kleiner α gewählt wird, desto kleiner ist der MSE-Wert und desto besser ist das Ergebnisbild. Wird α bei diesem Verfahren kleiner als 10^{-5} gewählt, so wird die Lösung nur geringfügig besser, sodass dadurch keine wirkliche Verbesserung erfolgt. Außerdem sollte α nicht zu klein gewählt werden, um hohe Frequenzen weiterhin abzuschwächen und für ein glatteres Ergebnis zu sorgen. Da in diesem Verfahren die Qualität abhängig ist von mehr als einem Parameter und insbesondere vom Zusammenhang zwischen α und τ , erreicht man nicht schon nach 100 Iterationen das Optimum. Dennoch ist das Ergebnis in allen Fällen besser als das gefaltete Bild.

Der zweite Test zur Beobachtung des Verhaltens von τ in Hinsicht auf den Rechenprozess erfolgte mit dem Wert 10^{-5} für α , da sich dieser Wert im vorherigen Test als geeignet herausgestellt hat. Weiterhin wurden wieder 100 Iterationen durchgeführt. Für τ wurden die Werte 10^{-2} , 10^{-1} und 1 verwendet. Bei τ verhält es sich laut Tabelle 4.3, wie es durch die Hypothese bereits vermutet wurde, genau gegenteilig wie bei α . Je größer der Wert für τ , desto besser wird das Ergebnis. Wird τ jedoch zu groß



Abbildung 4.8: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des expliziten quadratischen Variationsansatzes mit Gradientenabstieg mit unterschiedlichen Werten für den Parameter α . In diesem Fall wurde der explizite quadratische Variationsansatz auf das Zylinder-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** 100 Iterationen. **Oben mittig:** 300 Iterationen. **Oben rechts:** 500 Iterationen. **Unten links:** 1000 Iterationen. **Unten mittig:** 2000 Iterationen. **Unten rechts:** 3000 Iterationen.

gewählt, was hier nicht aufgezeigt wird, da es schwierig zu modellieren ist, wird das gewünschte Optimum überschritten und teilweise ein schlechteres Bild erhalten, als das vorherige gefaltete Bild. Auch hier ist das Zusammenspiel zwischen den Parametern τ und α bemerkbar, weswegen nicht sofort nach bereits 100 Iterationen ein Bild berechnet wurde, das fast exakt dem Optimum entspricht. Die Ergebnisse sind aber wie bereits beim vorherigen Test besser als das vorherige gefaltete Bild.

Der letzte Test für den Parameter, der die Zahl an Iterationsschritten vorgibt, wurde mit dem Wert 10^{-5} für α und dem Wert 1 für den Parameter τ durchgeführt, da diese Werte bei den vorherigen Experimenten gute Resultate lieferten. Für die Zahl an Iterationsschritten wurden die Werte 100, 300, 500, 1000, 2000 und 3000 gewählt. Auch bei der Anzahl der Iterationen ist in Tabelle 4.4 zu sehen, dass je häufiger der Rechenprozess durchgeführt wird, das heißt, je mehr Iterationen gemacht werden, desto besser wird das Resultat. Das bedeutet, dass auch in diesem Fall die Hypothese bestätigt wird. Hinsichtlich der MSE-Werte beim letzten Wert von 3000 Iterationsschritten ist zu sehen, dass das Ergebnis im Falle des Box- und des Zylinder-Faltungskerns relativ

nahe am Optimum ist. Allerdings bedeutet dies, dass für ein gutes Ergebnis eine hohe Anzahl an Iterationsschritten nötig ist, was wiederum zu einer langen Laufzeit des Rechenprozesses führt. Eine Möglichkeit, dies zu verhindern, ist, nach einer bestimmten Anzahl von Schritten aufzuhören, wenn die Lösung gut genug ist oder sich nur geringfügig verbessert, um weitere Rechenzeit einzusparen. Für alle gefalteten Bilder ist zu sehen, dass der MSE-Wert immer weiter abnimmt und insbesondere nie größer als der MSE-Wert des gefalteten Bildes wird. Nur im Falle des Zylinder-Faltungskerns ist eine geringe Verschlechterung des MSE-Werts von 2000 nach 3000 Iterationen zu erkennen. Deswegen ist anzunehmen, dass das bestmögliche Ergebnis mit diesen Parametereinstellungen zwischen 2000 und 3000 Iterationen liegt.

4.3.3 Quadratischer Variationsansatz (stabilisiert)

Die Parameter des stabilisierten expliziten quadratischen Variationsansatzes entsprechen denen des expliziten Verfahrens. Da die Parameter übereinstimmen und die gleichen Terme bei der Berechnung beeinflussen, kann deren Bedeutung und Wirkweise auf diesen Fall übertragen werden. Daher wird auf deren Test und die Überprüfung der Hypothesen verzichtet, da sie durch das vorherige Verfahren bereits belegt wurden. Wie bereits bei der Vorstellung des stabilisierten expliziten Verfahrens erwähnt wurde, können durch die Stabilisierung allerdings größere Werte für die Zeitschrittweite τ gewählt werden, wodurch dieses Verfahren schneller zu einer Lösung kommt.

4.3.4 Quadratischer Variationsansatz (Fourier)

Wie auch der Wiener Filter hat der quadratische Variationsansatz mit Lösung im Fourier-Bereich nur einen Parameter, welcher sich auf die Berechnung auswirkt. In diesem Fall reguliert er den Glattheitsterm, der bestimmt, wie stark das Bild an sich und insbesondere Kanten geglättet werden. Die Hypothese dazu besagt, dass je größer

Tabelle 4.5: MSE-Wertetabelle der Lösung im Fourier-Bereich. In der Zeile steht der jeweilige Wert des Parameters α , während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Parameterwert	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
$\alpha = 10^{-1}$	401,059387	294,161896	382,607605
$\alpha = 10^{-5}$	223,674255	3,966199	17,799452
$\alpha = 10^{-10}$	60,596283	0,000006	0,073349



Abbildung 4.9: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des Fourier-basierten quadratischen Variationsansatzes mit unterschiedlichen Werten für den Parameter α . In diesem Fall wurde der Fourier-basierte quadratische Variationsansatz auf das Gaußgefaltete Bild angewendet. **Oben links:** Originalbild. **Oben rechts:** Fourier-basierter quadratischer Variationsansatz mit $\alpha = 10^{-1}$. **Unten links:** Fourier-basierter quadratischer Variationsansatz mit $\alpha = 10^{-5}$. **Unten rechts:** Fourier-basierter quadratischer Variationsansatz mit $\alpha = 10^{-10}$.

der Wert von α ist, desto größer ist der Glattheitsterm, wodurch die Glättung stärker eingreift. Für das Resultat bedeutet dies, dass es vermutlich für größere α schlechter und weiter entfernt vom Originalbild ist, als für kleinere α . Daher werden für α die drei Werte 10^{-1} , 10^{-5} und 10^{-10} getestet.



Abbildung 4.10: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des Fourier-basierten quadratischen Variationsansatzes mit unterschiedlichen Werten für den Parameter α . In diesem Fall wurde der Fourier-basierte quadratische Variationsansatz auf das Box-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** Originalbild. **Oben rechts:** Fourier-basierter quadratischer Variationsansatz mit $\alpha = 10^{-1}$. **Unten links:** Fourier-basierter quadratischer Variationsansatz mit $\alpha = 10^{-5}$. **Unten rechts:** Fourier-basierter quadratischer Variationsansatz mit $\alpha = 10^{-10}$.

Anhand der MSE-Werte aus der Tabelle 4.5 ist zu sehen, dass die Hypothese für jeden der drei Fälle, das heißt für jedes der drei Bilder, stimmt. Das bedeutet, dass sich bei kleineren Werten für α bessere Resultate für das Ergebnisbild im Vergleich zum Originalbild erzielen lassen. Auch bei diesem Verfahren ist beim kleinsten gewählten Wert zu sehen, dass der MSE-Wert bei den Bildern, die mit dem Box-Faltungskern und mit



Abbildung 4.11: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des Fourier-basierten quadratischen Variationsansatzes mit unterschiedlichen Werten für den Parameter α . In diesem Fall wurde der Fourier-basierte quadratische Variationsansatz auf das Zylinder-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** Originalbild. **Oben rechts:** Fourier-basierter quadratischer Variationsansatz mit $\alpha = 10^{-1}$. **Unten links:** Fourier-basierter quadratischer Variationsansatz mit $\alpha = 10^{-5}$. **Unten rechts:** Fourier-basierter quadratischer Variationsansatz mit $\alpha = 10^{-10}$.

dem Zylinder-Faltungskern gefaltet wurden, sehr klein ist, was bedeutet, dass deren Endergebnisse nach der Berechnung fast exakt dem Originalbild entsprechen. Im Gegensatz zum Wiener Filter, der ebenfalls nur von einem Parameter beeinflusst wurde, kann hier selbst beim größten Wert für α festgestellt werden, dass eine Verbesserung vorliegt.

4.3.5 Subquadratischer Variationsansatz

Drei der Parameter des subquadratischen Variationsansatzes stimmen zwar mit denen des quadratischen überein, jedoch werden ihre Auswirkungen auf das Ergebnis nochmals untersucht, da noch ein weiterer Parameter das Resultat beeinflusst. Die Aufgabe der drei Parameter α , τ und Iterationszahl wurde bereits beim vorherigen

Tabelle 4.6: MSE-Wertetabelle des subquadratischen Variationsansatzes. In der Zeile steht der jeweilige Wert des Parameters α , während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Parameterwert	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
$\alpha = 10^{-1}$	329,326752	103,840309	212,928452
$\alpha = 10^{-3}$	330,393860	104,683777	212,494446
$\alpha = 10^{-5}$	330,407013	104,697884	212,495239

Tabelle 4.7: MSE-Wertetabelle des subquadratischen Variationsansatzes. In der Zeile steht der jeweilige Wert des Parameters τ , während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Parameterwert	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
$\tau = 10^{-2}$	478,418884	436,890747	396,200073
$\tau = 10^{-1}$	399,690765	301,684723	398,001038
$\tau = 1$	329,326752	103,840309	212,928452

Tabelle 4.8: MSE-Wertetabelle des subquadratischen Variationsansatzes. In der Zeile steht der jeweilige Wert des Parameters λ , während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Parameterwert	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
$\lambda = 1$	324,067780	108,601463	222,902115
$\lambda = 10^{-1}$	329,326752	103,840309	212,928452
$\lambda = 10^{-2}$	330,274719	104,564674	212,496231

Tabelle 4.9: MSE-Wertetabelle des expliziten subquadratischen Variationsansatzes. In der Zeile steht die jeweilige Anzahl an Iterationsschritten, während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Parameterwert	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
100 Iterationen	329,326752	103,840309	212,928452
300 Iterationen	301,861572	54,338737	135,996246
500 Iterationen	289,210785	38,761833	106,131157
1000 Iterationen	271,343353	22,952026	72,634109
2000 Iterationen	253,151520	14,059612	50,602684
3000 Iterationen	243,255356	11,803420	43,677567



Abbildung 4.12: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des expliziten subquadratischen Variationsansatzes nach unterschiedlich vielen Iterationen. In diesem Fall wurde der explizite subquadratische Variationsansatz auf das Gauß-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** 100 Iterationen. **Oben mittig:** 300 Iterationen. **Oben rechts:** 500 Iterationen. **Unten links:** 1000 Iterationen. **Unten mittig:** 2000 Iterationen. **Unten rechts:** 3000 Iterationen.

Ansatz beschrieben und ist beim subquadratischen Ansatz gleich. Beim vierten Parameter handelt es sich um λ , der angibt, wie stark bzw. schwach Kanten durch die Funktion ψ geglättet werden sollen. Je kleiner der Wert von λ , desto mehr sollen sie erhalten bleiben, da dadurch der Wert des Gradienten in der Funktion wichtiger wird.

Wie auch beim quadratischen Ansatz beschäftigt sich der erste Test mit der Auswirkung des Parameters α . Dazu werden die drei Werte 10^{-1} , 10^{-3} und 10^{-5} für α getestet. Die Konstanten in diesem Test sind 100 Iterationen, $\tau = 1$ und $\lambda = 10^{-1}$. Es ist zu sehen, dass in allen Fällen eine Verbesserung zum vorherigen gefalteten Bild vorliegt. Anhand der MSE-Werte aus Tabelle 4.6 wird deutlich, dass je größer α wird, desto besser wird im Allgemeinen das entstehende Resultat. Allerdings ist der Unterschied zwischen den Werten so gering, dass andere Werte für α nur geringfügig bessere oder schlechtere Ergebnisse liefern. Dieses Ergebnis unterscheidet sich vom Ergebnis des expliziten quadratischen Ansatzes, bei dem für kleinere Werte ein deutlich besseres Bild herauskam. Der Grund dafür ist die bereits angesprochene Funktion ψ , die sich auf die Erhaltung von Kanten auswirkt. Dadurch wird mit einem größeren Wert für



Abbildung 4.13: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des expliziten subquadratischen Variationsansatzes mit unterschiedlichen Werten für den Parameter α . In diesem Fall wurde der explizite subquadratische Variationsansatz auf das Box-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** 100 Iterationen. **Oben mittig:** 300 Iterationen. **Oben rechts:** 500 Iterationen. **Unten links:** 1000 Iterationen. **Unten mittig:** 2000 Iterationen. **Unten rechts:** 3000 Iterationen.

α ein glatteres Bild mit wenigen hohen Frequenzen erzeugt, welches aber gleichzeitig Kanten besitzt. Da das Bild am Ende glatt genug und hohe Frequenzen abgeschwächt sein sollen, wird in den folgenden Tests für den Parameter α der Wert 10^{-1} gewählt.

Im zweiten Test ging es um die Auswirkungen von τ auf den Rechenprozess. Getestet wurden die Werte 10^{-2} , 10^{-1} und 1. Die Werte für λ und die Zahl an Iterationsschritten bleiben wie beim ersten Test, während α , wie bereits erwähnt, mit dem konstanten Wert von 10^{-1} belegt wird. Auch in diesem Fall bestätigt die Tabelle 4.7 die gleichen Auswirkungen von τ auf das Resultat, wie bereits bei den quadratischen Ansätzen. Je größer τ gewählt wird, mit desto größeren Schritten wird sich der optimalen Lösung u^* in der gleichen Anzahl an Iterationen genähert. Auch hier wird eine Verbesserung zum gefalteten Bild deutlich.

Diesmal werden verschiedene Werte für den Parameter λ getestet. Dazu wurden die Werte 1, 10^{-1} und 10^{-2} verwendet. Die Zahl an Iterationsschritten wurde wieder auf 100 festgelegt, während α der Wert 10^{-1} und τ der Wert 1 zugewiesen wurde. Zu be-



Abbildung 4.14: Zu sehen sind die Ergebnisbilder des expliziten subquadratischen Variationsansatzes mit unterschiedlichen Werten für den Parameter α . In diesem Fall wurde der explizite subquadratische Variationsansatz auf das Zylindergefaltete Bild angewendet. **Oben links:** 100 Iterationen. **Oben mittig:** 300 Iterationen. **Oben rechts:** 500 Iterationen. **Unten links:** 1000 Iterationen. **Unten mittig:** 2000 Iterationen. **Unten rechts:** 3000 Iterationen.

obachten ist, dass sich für jedes Bild ein anderer Wert eignet. Das liegt unter anderem an der Form der Faltungskerne, ihre Auswirkungen bei der Faltung und ihr Einfluss auf Kanten. Da der Wert 10^{-1} im Mittel das beste Resultat liefert, wird er bei den Tests zur Erhaltung von Kanten verwendet. Weiterhin ist aus der Tabelle abzuleiten, dass die resultierenden Bilder nie schlechter als das gefaltete Bild sind.

Beim letzten Test wurde die Anzahl an Iterationsschritten variiert, während α , τ und λ konstant waren. Dazu galt $\alpha = 10^{-1}$, $\tau = 1$ und $\lambda = 10^{-1}$. Es wurden 100, 300, 500, 1000, 2000 und 3000 Iterationen durchgeführt. Je mehr Iterationsschritte gemacht werden, desto geringer ist die Distanz zum Optimum. Dies ist auch anhand der MSE-Werte aus der Tabelle 4.9 zu erkennen. Allerdings gibt es kein Maximum an Iterationsschritten, weshalb ab einer bestimmten Anzahl die Berechnung abgebrochen werden kann, wenn die Lösung gut genug ist oder sich nicht mehr viel ändert. Das ist der Fall, wenn beispielsweise der MSE-Wert klein genug ist. Insbesondere ist anhand der MSE-Werte aus der letzten Zeile mit 3000 Iterationen zu erkennen, dass die Lösung nur noch sehr langsam besser wird und deswegen eine große Anzahl an Iterationen notwendig ist, um eine erkennbare Verbesserung zu erzeugen. Für alle gefalteten Bilder ist abzulesen, dass der MSE-Wert immer abnimmt und insbesondere immer kleiner ist als der MSE-Wert des gefalteten Bildes.

4.4 VERGLEICH

Nun sollen die Verfahren mit geeigneten Parametern bewertet und verglichen werden. Dazu dient vor allem der MSE-Wert, der sich als Maß für die Qualität gut eignet, da er angibt, wie sehr sich das berechnete Bild vom tatsächlichen Originalbild unterscheidet. Je kleiner der MSE-Wert ist, desto besser das Ergebnis und desto besser der

Tabelle 4.10: MSE-Wertetabelle aller Verfahren im Vergleich. Es wurden die besten Ergebnisse der Methoden verglichen. In der Zeile steht der jeweilige Ansatz, während in der Spalte das unscharfe Bild steht, auf welches das Verfahren angewendet wurde.

Verfahren	Gauß	Box	Zylinder
Vorher	518,283447	477,993530	534,411377
Wiener Filter	50,765614	0,000004	0,029170
Quadratischer Variationsansatz (explizit)	266,149658	36,213993	87,931831
Quadratischer Variationsansatz (stabilisiert)	266,138367	36,238888	87,932693
Quadratischer Variationsansatz (Fourier)	60,596283	0,000006	0,073349
Subquadratischer Variationsansatz (explizit)	243,255356	11,803420	43,677567



Abbildung 4.15: Zu sehen sind die Ergebnisbilder aller vorgestellten Verfahren. In diesem Fall wurden die Ansätze auf das Gauß-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** Originalbild. **Oben mittig:** Wiener Filter. **Oben rechts:** Quadratischer Variationsansatz (explizit). **Unten links:** Quadratischer Variationsansatz (stabilisiert). **Unten mittig:** Quadratischer Variationsansatz (Fourier). **Unten rechts:** Subquadratischer Variationsansatz (explizit).

angewandte Ansatz. Es werden die besten Resultate aller Verfahren und damit die dazugehörigen verwendeten Parameter zum Vergleich benutzt. Anschließend soll eine mögliche Erklärung für die Resultate gefunden werden. Es folgt nun eine Zusammenfassung der MSE-Werte für alle gefalteten Bilder (Gauß, Box und Zylinder).

Wie anhand der Tabelle 4.10 zu sehen ist, erzielen der Wiener Filter und der quadratische Variationsansatz im Fourier-Bereich mit den gewählten Parametern die besten Ergebnisse. Insbesondere stellen sie im Falle des Box- und des Zylinder-Faltungskerns das Originalbild mit einer minimalen Abweichung wieder her. Der Wiener Filter und der Fourier-basierte quadratische Variationsansatz liefern vermutlich deshalb so gute Ergebnisse, da die Faltung mithilfe der Fourier-Transformation realisiert wurde. Da deren Berechnungen ebenfalls im Fourier-Bereich stattfinden, werden die Nachteile der Fourier-Transformation rückgängig gemacht und gute Resultate erzielt. Die anderen Variationsansätze liefern im Falle des Box- und des Zylinder-gefalteten Bildes auch gute Ergebnisse, die durch weitere Iterationen verfeinert werden können. Allerdings ist anhand der MSE-Werte für das Gauß-gefaltete Bild abzuleiten, dass der



Abbildung 4.16: Zu sehen sind die Ergebnisbilder aller vorgestellten Verfahren. In diesem Fall wurden die Ansätze auf das Box-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** Originalbild. **Oben mittig:** Wiener Filter. **Oben rechts:** Quadratischer Variationsansatz (explizit). **Unten links:** Quadratischer Variationsansatz (stabilisiert). **Unten mittig:** Quadratischer Variationsansatz (Fourier). **Unten rechts:** Subquadratischer Variationsansatz (explizit).

explizite quadratische, der stabilisierte explizite quadratische und der explizite subquadratische Variationsansatz den MSE-Wert im Vergleich zum Wert des vorherigen gefalteten Bildes nur halbieren konnten. In diesem Fall ist eine Verfeinerung entweder durch weitere Iterationen oder durch Anpassung der Parameterwerte, besonders α zur Regulierung der Glattheit, möglich. Der explizite subquadratische Ansatz erzielt bessere MSE-Werte als der explizite quadratische und der stabilisierte explizite quadratische Variationsansatz. Das lässt sich darauf zurückführen, dass der subquadratische Variationsansatz die Kanten besser erhält und damit schärfere Bilder liefert. Die MSE-Werte des expliziten quadratischen und des stabilisierten expliziten quadratischen Variationsansatzes unterscheiden sich nur geringfügig. Der Grund dafür sind die gleichen Parameterwerte. Zu betonen ist dennoch, dass das stabilisierte Verfahren über die Möglichkeit verfügt, schneller Ergebnisse zu erzielen, da die Stabilisierung die Wahl größerer Werte für die Zeitschrittweite τ erlaubt.



Abbildung 4.17: Zu sehen sind die Ergebnisbilder aller vorgestellten Verfahren. In diesem Fall wurden die Ansätze auf das Zylinder-gefaltete Bild angewendet. **Oben links:** Originalbild. **Oben mittig:** Wiener Filter. **Oben rechts:** Quadratischer Variationsansatz (explizit). **Unten links:** Quadratischer Variationsansatz (stabilisiert). **Unten mittig:** Quadratischer Variationsansatz (Fourier). **Unten rechts:** Sub-quadratischer Variationsansatz (explizit).

Es folgt die Darstellung der Ergebnisse als Bilder. In den Abbildungen 4.15, 4.16 und 4.17 sind die resultierenden Bilder der Verfahren für die drei Unschärfeeffekte (Gauß, Box und Zylinder) zu sehen.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass alle Verfahren die Bildqualität im Vergleich zu vorher verbessern. Vor allem bei den Variationsansätzen hängt die Qualität des Resultats von den Werten der Parameter ab, da eine Abhängigkeit zwischen ihnen besteht und sich das auf die Berechnung auswirkt. Die besten Ergebnisse erzielten der Wiener Filter und der Fourier-basierte quadratische Ansatz. Dennoch bilden die anderen Variationsansätze eine Alternative zu diesen Verfahren, insbesondere da ihre Ergebnisse durch weitere Iterationen verbessert werden können.

5. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

5.1 ZUSAMMENFASSUNG

Das Thema der Dekonvolution, also der sogenannten Entfaltung, beschäftigt sich mit der Rekonstruktion unscharfer Bilder, bei der ihre Qualität verbessert werden soll. Das Ziel ist also, durch eine Berechnung das Bild schärfer werden zu lassen. In der Einleitung wurde zunächst gezeigt, dass das Thema besonders im Alltag bei der Aufnahme von Fotos Anwendung findet und die Entwicklung geeigneter Methoden daher notwendig ist. Es folgte eine Zusammenfassung mathematischer Grundlagen, die zum Verständnis der später vorgestellten Ansätze notwendig sind. Im anschließenden Kapitel wurden dann die einzelnen Methoden vorgestellt. Die Verfahren lassen sich dabei in zwei Gruppen aufteilen: die Fourier-basierten und die variationalen Ansätze. Zur ersten Gruppe gehören das Inverse Filtern und der Wiener Filter. Ihre Vorgehensweise basiert auf der Fourier-Transformation des unscharfen Bildes und der dortigen Berechnung. Variationale Ansätze hingegen lösen ein Optimierungsproblem, bei dem ein Energiefunktional minimiert werden soll. Es wird dabei Unterschieden zwischen quadratischen und subquadratischen Variationsansätzen. Vorgestellt wurde das explizite und das stabilisierte explizite Lösungsverfahren mit Gradientenabstieg für quadratische Variationsansätze. Danach wurde eine schnellere Variante im Fourier-Bereich gezeigt. Der subquadratische Variationsansatz wurde ebenfalls mit einem expliziten Verfahren gelöst.

Bei der abschließenden Evaluation der verschiedenen Verfahren wurden zunächst generelle Grundbedingungen zu den Experimenten vorgegeben. Da alle Verfahren über Parameter verfügen, welche die Qualität der Berechnung beeinflussen, wurden zuerst ihre Auswirkungen jeweils getestet, um passende Parameterwerte für den Vergleich zu finden. Anschließend wurden die Ansätze bewertet und miteinander verglichen. Dabei stellte sich heraus, dass der Wiener Filter und der Fourier-basierte quadratische Variationsansatz die besten Ergebnisse liefern. Vor allem beim Box- und beim Zylinder-gefalteten Bild wurde eine fast exakte Wiederherstellung erzielt. Der subquadratische Variationsansatz erzeugt bessere und insbesondere schärfere Bilder als die quadratischen Ansätze, da die Kanten durch die subquadratische Funktion besser erhalten, hohe Frequenzen jedoch geglättet werden. Dennoch bilden der explizite quadratische, der stabilisierte explizite quadratische und der explizite subquadratische Variationsansatz eine gute Alternative, da ihre Ergebnisse durch weitere Iterationen verfeinert werden können. Zudem hängt ihre Qualität von der Wahl geeigneter Parameterwerte ab. Die Ergebnisse sind unter Vorbehalt zu betrachten, da die Faltung aus Komplexitätsgründen mithilfe der Fourier-Transformation realisiert wurde und damit

die Resultate beeinflusst. Bei einer Berechnung der Faltung auf herkömmliche Weise würden die Variationsansätze wahrscheinlich bessere Ergebnisse erzeugen als die Fourier-basierten Verfahren.

5.2 AUSBLICK

In diesem Abschnitt sollen weitere Möglichkeiten aufgeführt werden, die bei den Experimenten dieser Arbeit aufgrund von Komplexitätsgründen oder zur Vereinfachung nicht berücksichtigt oder ausgelassen wurden.

5.2.1 *Faltungskerne*

Um in dieser Arbeit die Unschärfeeffekte, die in Bildern auftreten können, zu modellieren, wurden ausschließlich symmetrische Faltungskerne benutzt. Nicht getestet wurden nicht-symmetrische Faltungskerne, die in eine beliebige Richtung verschoben wurden. Daraus ergeben sich neue gefaltete Bilder, die mit den hier erzeugten Bildern nicht übereinstimmen. Zu beachten ist bei Experimenten mit nicht-symmetrischen Faltungskernen, dass bei der Faltung der Fall auftreten kann, dass eine gespiegelte Version des Faltungskerns verwendet werden muss. Dies tritt beispielsweise bei den Variationsansätzen auf, bei denen während des Rechenprozesses das zu berechnende u zwei Mal mit dem Faltungskern gefaltet werden muss. Solche Besonderheiten bei nicht-symmetrischen Faltungskernen müssen berücksichtigt werden, um ein korrektes Ergebnis zu gewährleisten.

Eine weitere Möglichkeit, die mit den Faltungskernen zusammenhängt, ist, andere Faltungskerne zu verwenden. In dieser Arbeit wurden für die Modellierung von Unschärfeeffekten Box-, Zylinder- und Gauß-Faltungskerne verwendet. Allerdings ist es möglich, noch andere Funktionen zu nutzen, um Faltungskerne zu erstellen, die wiederum andere Auswirkungen auf das Ursprungsbild haben. Dadurch ist es möglich, die Verfahren auf diese neuen Bilder anzuwenden und ihre Qualität weiter zu testen.

5.2.2 *Rauschen*

Beim Rauschen handelt es sich um einen Störeffekt in Bildern, der in dieser Arbeit ausgelassen wurde, da die Verfahren ausschließlich auf Unschärfeeffekte getestet werden sollten. Um Rauschen zu erzeugen, wird der ursprüngliche Wert von Pixeln verändert. Dabei gibt es unterschiedliche Vorangehensweisen. Eine Möglichkeit ist additives Rauschen. Hierbei wird zum Originalbild ein Rauschwert addiert. Einerseits kann der Wert beispielsweise aus einer konstanten Funktion oder aus einer Gauß-Funktion gewählt werden. Die Alternative ist multiplikatives Rauschen, bei dem zum Originalwert ein Teil dieses Wertes hinzugefügt wird. Diese beiden Möglichkeiten zum Er-

zeugen von Rauschen beziehen sich auf alle Pixel. Es ist auch möglich, eine zufällige Anzahl an Pixeln zu wählen und ausschließlich deren Wert zu verändern. Ein Beispiel hierfür ist, den Wert entweder auf den höchsten oder niedrigsten Grauwert zu setzen. Es wird ein sogenanntes Salt-and-Pepper Rauschen erzeugt.

Wird Rauschen in einem Bild verwendet und faltet es anschließend, so kann es sein, dass die Verfahren an diese Aufgabe angepasst werden müssen oder sich teilweise gar nicht mehr eignen. Daher muss das bei Experimenten mit solchen Bildern berücksichtigt werden.

5.2.3 Faltung

Die Faltung wurde in dieser Arbeit immer durch eine Fourier-Transformation, anschließende Multiplikation im Fourier-Bereich und darauf folgende Rücktransformation berechnet. Diese Methode spart Rechenzeit, da sie schneller zu berechnen ist, weswegen sie für die Erzeugung von gefalteten Bildern verwendet wurde. Allerdings ist es möglich, die Faltung auch auf die herkömmliche Weise zu berechnen, was eventuell die Resultate mancher Verfahren beeinflusst und insbesondere die Variationsansätze bessere Ergebnisse als die Fourier-basierten Ansätze liefern lassen würde. Dies gewährleistet eine korrekte Faltung, ohne die im Fourier-Bereich angenommene unendliche Fortsetzung des gefalteten Signals. Wie bereits erwähnt, benötigt diese Art der Faltung mehr Rechenzeit, da für jedes einzelne berechnete Pixel die Werte aller anderen Pixel mit in die Berechnung einfließen.

5.2.4 Weitere Verfahren

In dieser Arbeit wurden einige Ansätze vorgestellt, um unscharfe Bilder durch Berechnung wieder zu rekonstruieren. Hierbei handelt es sich allerdings nur um eine beispielhafte Auswahl an Verfahren, die auf dieses Problem angewendet werden können. Es gibt noch weitere Ansätze, die es möglich machen, eine Entfaltung des Bildes zu berechnen. Insbesondere wurde bei den hier vorgestellten Methoden die Kenntnis über den Faltungskern, der auf das Ursprungsbild angewendet worden war, genutzt, um das Ursprungsbild genauer und effizienter zu berechnen. Daher handelte es sich dabei um nicht-blinde Dekonvolution. Allerdings ist dies in der Realität üblicherweise nicht der Fall, den genauen Faltungskern zu kennen. Es gibt Berechnungsweisen, die sogenannte blinde Dekonvolution durchführen, wie unter anderem in [9] und [10] gezeigt wird. Dabei wird neben der Berechnung des Ursprungsbildes auch versucht, den dazugehörigen Faltungskern zu bestimmen und auf diese Weise das Optimum zu erhalten. Diese Methoden erfordern weitere Berechnungsvorschriften, die über die hier vorgestellten Verfahren hinausgehen, wobei meist Variationsansätze verwendet werden.

5.2.5 Weitere Bilder

Für die Versuche zur Qualität der Verfahren wurde als Ursprungsbild das Bild des Kameramanns genutzt. Eine mögliche Erweiterung der Experimente ist die Verwendung anderer Bilder in Graustufen. Daran können die beschriebenen und weitere Methoden ebenfalls getestet werden. Außerdem ist eine Ausweitung auf farbige Bilder möglich. Allerdings benötigt dies auch einen Ausbau der Verfahren, da sie bisher nur auf Bilder in Graustufen ausgelegt sind. Farbige Bilder sind meist in mehrere Farbkanäle aufgeteilt. So haben beispielsweise Bilder im RGB-Format drei Farbkanäle, in denen jeweils der Anteil der entsprechenden Farbe gespeichert ist. Vorstellbar ist dies als eine Speicherung von drei Bildern in der jeweiligen Farbe, die zusammengesetzt das eigentliche farbige Bild ergeben. Daher ist für die Verfahren nötig, die Berechnung auf die einzelnen Farbkanäle auszuweiten und jeden separat zu bestimmen, um das ursprüngliche Bild zu berechnen. Da die Farbkanäle gemeinsam das Bild ergeben, besteht dennoch eine weitere Abhängigkeit, weswegen die bisherigen Berechnungsvorschriften nicht ausreichen und entsprechend an den bestehenden Fall angepasst werden müssen. Daher erfordert die Erhaltung gemeinsamer Kanten der Farbkanäle im Bild erweiterte Modelle.

LITERATUR

- [1] M. Welk, D. Theis, T. Brox und J. Weickert, "PDE-based deconvolution with forward-backward diffusivities and diffusion tensors.", in *Proc. International Conference on Scale-Space*, Springer, 2005, S. 585–597.
- [2] R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*. 1965.
- [3] I. N. Bronstein, J. Hromkovic, B. Luderer, H.-R. Schwarz, J. Blath, A. Schied, S. Dempe, G. Wanka, S. Gottwald, E. Zeidler u. a., *Taschenbuch der Mathematik*. Springer-Verlag, 2012, Bd. 1.
- [4] A. Marquina und S. Osher, "A new time dependent model based on level set motion for nonlinear deblurring and noise removal", in *Proc. International Conference on Scale-Space*, Springer, 1999, S. 429–434.
- [5] L. I. Rudin, S. Osher und E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Bd. 60, Nr. 1, S. 259–268, 1992.
- [6] G. Aubert und P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] I. M. Gelfand, S. V. Fomin und R. A. Silverman, *Calculus of Variations*. Courier Corporation, 2000.
- [8] N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. MIT Press Cambridge, MA, 1949, Bd. 2.
- [9] Y.-L. You und M. Kaveh, "Blind image restoration by anisotropic regularization", *IEEE Transactions on Image Processing*, Bd. 8, Nr. 3, S. 396–407, 1999.
- [10] T. F. Chan und C.-K. Wong, "Total variation blind deconvolution", *IEEE Transactions on Image Processing*, Bd. 7, Nr. 3, S. 370–375, 1998.

ERKLÄRUNG

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst zu haben. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommene Aussagen als solche gekennzeichnet. Weder diese Arbeit noch wesentliche Teile daraus waren bisher Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens. Ich habe diese Arbeit bisher weder teilweise noch vollständig veröffentlicht. Das elektronische Exemplar stimmt mit allen eingereichten Exemplaren überein.

I hereby declare that the work presented in this thesis is entirely my own. I did not use any other sources and references than the listed ones. I have marked all direct or indirect statements from other sources contained therein as quotations. Neither this work nor significant parts of it were part of another examination procedure. I have not published this work in whole or in part before. The electronic copy is consistent with all submitted copies.

Ort, Datum, Unterschrift