Institut für Formale Methoden der Informatik
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D–70569 Stuttgart

Diplomarbeit Nr. 3141

Über die Billaudsche Vermutung

Tobias Walter

Studiengang:	Informatik
Prüfer:	Prof. Dr. Volker Diekert
Betreuer:	Priv.-Doz. Dr. Dirk Nowotka
begonnen am:	1. Februar 2011
beendet am:	3. August 2011
CR-Klassifikation:	F.4.3, G.2.1

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Kombinatorik auf Wörtern ist ein junges Gebiet der Mathematik. Es zählt sowohl als Teilgebiet der theoretischen Informatik als auch der diskreten Mathematik. Erste Arbeiten zur Kombinatorik auf Wörtern wurden von Thue in [Thu1906] anfangs des 20. Jahrhunderts veröffentlicht. Damals wurden Ergebnisse in diesem Teilgebiet oft nur als Hilfsmittel für andere Resultate genutzt. Eine Ausnahme stellte die kombinatorische Gruppentheorie dar. Insbesondere nach der Veröffentlichung von Lothaire [Lot1983] entwickelte sich die Kombinatorik auf Wörtern als eigenes Teilgebiet. Diese und weitere Informationen über die Geschichte der Kombinatorik auf Wörter findet man in [BK2003].

Billaud hat sich zum ersten Mal 1988 mit Fixpunktwörtern beschäftigt, sich jedoch schnell vom Problem abgewandt hat, vgl. [Bil2011]. Sein damaliger Kollege Filé erarbeitete daraufhin in [Fil1989] ein Resultat über die Bilder eines Wortes unter Morphismen. Er zeigte, dass, falls die Menge der Bilder zweier Wörter unter allen möglichen Morphismen dieselbe ist, sich die Wörter mittels eines Morphismus ineinander überführen lassen. Dieses Konzept untersuchten Reidenbach und Schneider in [RS2009]. Dabei definieren sie auch einen zu den Fixpunktwörtern äquivalenten Begriff.

1993 veröffentlichte Billaud dann in der Newsgroup comp.theory seine Vermutung, vgl. [Bil1993]. Seine Vermutung handelt von einer Induktivität der Fixpunktwörter. Sind von einem Wort w alle Teilwörter $\delta_a(w)$, die alle a's löschen, Fixpunktwörter, so ist auch w ein Fixpunktwort. Seitdem wurden wenige Resultate zur Vermutung gefunden. Geser und Zimmermann tauschten sich mit Billaud über die Vermutung aus, vgl. [Ges1993, Zim1993]. Dabei löste Zimmermann die Vermutung, wenn das Alphabet aus drei Elementen besteht.

Levé und Richomme konnten 2005 einen Spezialfall der Billaudschen Vermutung in [LR2005] beweisen. Die Vermutung selbst konnte jedoch nicht signifikant vereinfacht werden.

Holub zeige 2009 in [Hol2009], dass $\mathrm{FW} \in \mathbf{P}$ ist. Damit ist in Polynomialzeit entscheidbar, ob ein Wort ein Fixpunktwort ist. Holubs Algorithmus konstruiert dazu einen Zeugen.

Diese Arbeit baut auf Teilen von [LR2005] auf und versucht weitere Teilresultate zur Billaudschen Vermutung zu zeigen. Dabei könnte die in Kapitel 4 formulierte schwächere Vermutung ein wichtiger Zwischenschritt sein.

In Kapitel 2 werden die Grundlagen dieser Arbeit eingeführt. Es wird der zentrale Begriff des Fixpunktworts definiert. Damit kann man dann die Billaudsche Vermutung formulieren.

Aufbauend wird eine äquivalente kombinatorische Beschreibung von Fixpunktwörtern bewiesen und für die weiteren Kapitel benötigte Lemmata bewiesen.

In Kapitel 3 betrachten wir die Billaudsche Vermutung auf einem kleinen Alphabet. Die Vermutung wird auf einem Alphabet mit drei Buchstaben verifiziert. Mehrere Teilfälle der Vermutung auf vier Buchstaben werden ebenfalls bewiesen.

In Kapitel 4 wird dann eine schwächere Version der Billaudschen Vermutung formuliert. Diese schwächere Vermutung wird teilweise gelöst, so dass man sich nur noch auf endlich viele Teilfälle beschränken muss.

In Kapitel 5 betrachten wir Beispiele für Fixpunktwörter und für Wörter, welche die Billaudsche Vermutung erfüllen.

In Kapitel 6 wird die Arbeit zusammengefasst und ein Fazit gezogen.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel wird in die Grundlagen der vorliegenden Arbeit eingeführt. Dabei werden grundlegende Kenntnisse in der Theorie der formalen Sprachen vorausgesetzt, wie sie beispielsweise in [HU2000] stehen.

Zunächst führen wir den für diese Arbeit zentralen Begriff des Fixpunktwortes ein.

Definition 2.1. Sei w ein beliebiges Wort und sei $\Sigma = \mathrm{alph}(w)$ sein Alphabet. Wir nennen w ein Fixpunktwort, falls es einen Morphismus $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt mit $f \neq \mathrm{id}$ und $f(w) = w$. Wir nennen f einen Zeugen von w und FW die Menge aller Fixpunktwörter.

Die Benennung eines Zeugen wurde von Geser in [Ges1993] vorgeschlagen.

Es wird sich als sinnvoll erweisen das Alphabet eines Fixpunktwortes w geeignet aufzuteilen. Diese Aufteilung erfolgt in Abhängigkeit eines Zeugen f von w und stammt aus [LR2005].

Definition 2.2. Sei $w \in \mathrm{FW}$ gegeben und f ein Zeuge von w. Wir definieren

$$\begin{aligned} C_f &= \{c \in \mathrm{alph}(w) \mid f(c) = c\}, \\ M_f &= \{c \in \mathrm{alph}(w) \mid f^n(c) = \varepsilon \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}, \\ E_f &= \{c \in \mathrm{alph}(w) \mid f(c) = ucv \text{ für Wörter } u, v \text{ mit } uv \in M_f^+\}. \end{aligned}$$

Die Buchstaben aus C_f nennen wir konstant, jene aus M_f sterblich und die Buchstaben aus E_f heißen expandierend oder erzeugend. Wir setzen auf $\exp(f)$ die kleinste natürliche Zahl, so dass $f^{\exp(f)}(a) = \varepsilon$ für $a \in M_f$ gilt und nennen $\exp(f)$ den Exponenten von f.

Wir zeigen zunächst, dass die Aufteilung in konstante, sterbliche und expandierende Buchstaben eine disjunkte Zerlegung des Alphabets darstellt. Dazu benötigen wir eine Klassifikation der Menge der Fixpunktwörter eines festen Morphismus.

Satz 2.3. *Sei f ein Morphismus. Die Menge der Fixpunktwörter von f ist die Menge $f^{\exp(f)}\,(C_f \cup E_f)^*$.*

Beweis. Vergleiche [Hea1981, HS1999]. □

Folgendes Lemma aus [LR2005] zeigt nun das oben angekündigte Resultat.

Lemma 2.4. *Sei $w \in \mathrm{FW}$ und f ein Zeuge von w. Dann gilt*

$$\mathrm{alph}(w) = C_f \mathbin{\dot\cup} M_f \mathbin{\dot\cup} E_f.$$

Beweis. Man sieht anhand der Definition sofort, dass die Vereinigung disjunkt sein muss. Offensichtlich gilt $C_f \cup M_f \cup E_f \subseteq \mathrm{alph}(w)$ nach Definition. Da $f(w) = w$ ist, gilt $w \in f^{\exp(f)}(C_f \cup E_f)^*$ nach Satz 2.3. Man sieht leicht, dass $f(C_f) = C_f$ und $f(E_f) \subseteq (E_f \cup M_f)^*$ ist. Also gilt $w \in (C_f \cup M_f \cup E_f)^*$ und somit ist $\mathrm{alph}(w) \subseteq C_f \mathbin{\dot\cup} M_f \mathbin{\dot\cup} E_f$. ☐

Das folgende Lemma aus [LR2005] zeigt, dass wir uns auf Zeugen konzentrieren können, die idempotent sind. Idempotente Zeugen f haben die Eigenschaft, dass $f(a) = \varepsilon$ gilt für $a \in M_f$. Dies erleichtert die Suche nach Zeugen und ist auch essentiell für die kombinatorische Beschreibung von Fixpunktwörtern in Proposition 2.10. Außerdem gilt für idempotente Zeugen f, dass der Träger von f genau $C_f \cup E_f$ ist. Es gilt somit $\mathrm{supp}(f) := \{x \in \mathrm{alph}(w) \mid f(x) \neq \varepsilon\} = C_f \cup E_f$.

Lemma 2.5. *Für jedes $w \in \mathrm{FW}$ gibt es einen idempotenten Zeugen. Genauer gibt es für jeden Zeugen f einen idempotenten Zeugen g mit $E_f = E_g$, $M_f = M_g$ und $C_f = C_g$.*

Beweis. Sei f ein Zeuge von w. Jede Potenz von f ist auch ein Zeuge von w da $f^n(w) = f^{n-1}(w) = \ldots = w$. Wir setzen $g := f^{\exp(f)}$. Der Morphismus g ist dann ein Zeuge von w. Offensichtlich gilt $C_f \subseteq C_g$, $E_f \subseteq E_g$ und $M_f \subseteq M_g$. Nach Lemma 2.4 gilt $\mathrm{alph}(w) = C_f \mathbin{\dot\cup} M_f \mathbin{\dot\cup} E_f = C_g \mathbin{\dot\cup} M_g \mathbin{\dot\cup} E_g$. Da die Mengen disjunkt sind, folgt bereits die geforderte Gleichheit. Noch zu zeigen bleibt also, dass g idempotent ist. Für $a \in M_g$ gilt $g^2(a) = g(a) = \varepsilon$. Für $a \in C_g$ gilt $g^2(a) = g(a) = a$ und für $a \in E_g$ gibt es Faktoren $\alpha, \beta \in M_g^*$ so, dass $g(a) = \alpha a \beta$ gilt. Es gilt dann $g^2(a) = g(\alpha a \beta) = \varepsilon g(a) \varepsilon = g(a)$. Mit $\mathrm{alph}(w) = C_g \mathbin{\dot\cup} M_g \mathbin{\dot\cup} E_g$ und der universellen Eigenschaft für Morphismen auf dem freien Monoid $\mathrm{alph}(w)^*$ folgt dann, dass g idempotent ist. ☐

Für idempotente Morphismen f vereinfacht sich Satz 2.3 zu folgendem Korollar. Dieses findet vor allem in Kapitel 3 Anwendung.

Korollar 2.6. *Sei f ein idempotenter Morphismus. Die Menge der Fixpunktwörter von f ist die Menge $(C_f \cup f(E_f))^*$.*

Beweis. Für idempotente Morphismen f gilt $\exp(f) = 1$. Wegen $f(C_f) = C_f$ folgt die Aussage direkt aus Satz 2.3. ☐

Definition 2.7. Sei w ein Wort und $A \subseteq \mathrm{alph}(w)$. Wir definieren die beiden Morphismen δ_A und π_A auf $\mathrm{alph}(w)$ durch die universelle Eigenschaft. Für $x \in \mathrm{alph}(w)$ setzen wir dazu

$$\delta_A(x) = \begin{cases} x & \text{, falls } x \notin A \\ \varepsilon & \text{, falls } x \in A \end{cases}$$

$$\pi_A(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{, falls } x \notin A \\ x & \text{, falls } x \in A. \end{cases}$$

Für ein Teilwort w' von w schreiben wir auch $\delta_{w'}$ und $\pi_{w'}$ anstatt $\delta_{\mathrm{alph}(w')}$ und $\pi_{\mathrm{alph}(w')}$. Intuitiv löscht also δ_A alle Buchstaben aus w die in A enthalten sind, wobei π_A das Wort w auf die Buchstaben in A projiziert.

Es gilt offensichtlich $\delta_A(w) = \pi_{\mathrm{alph}(w)\setminus A}(w)$ und $\pi_A(w) = \delta_{\mathrm{alph}(w)\setminus A}(w)$. Zur besseren Lesbarkeit werden jedoch beide Morphismen benutzt. Damit lässt sich bequem die Anzahl der Buchstaben innerhalb eines Wortes definieren.

Definition 2.8. Sei $w \in \Sigma^*$ ein Wort. Wir definieren $|w|$ als die Länge von w. Außerdem setzen wir $|w|_\Sigma = |\pi_\Sigma(w)|$ und insbesondere $|w|_a = |w|_{\{a\}}$ für einen Buchstaben $a \in \Sigma$. Die Menge aller Buchstaben, die in w minimal vorkommen, nennen wir

$$\mathrm{minLetters}(w) := \left\{ a \in \mathrm{alph}(w) \;\middle|\; |w|_a \leq |w|_x \; \forall x \in \mathrm{alph}(w) \right\}.$$

Wir betrachten ein Beispiel für den Begriff des Fixpunktwortes.

Beispiel 2.9. Sei der Morphismus f gegeben durch $f(a) = \varepsilon, f(b) = \varepsilon$ und $f(c) = w$. Dann ist $f \neq \mathrm{id}$. Wir betrachten das Wort $w = abacab$. Es ist $f(w) = w$, also ist w ein Fixpunktwort. Man sieht direkt, dass dies für alle Wörter funktioniert, die einen Buchstaben c besitzen mit $|w|_c = 1$. Das Wort $w' = abba$ ist kein Fixpunktwort, denn jeder Zeuge f' müsste einen Buchstaben löschen. Dann wäre $w' = f'(ab)^2$, aber w' ist kein Quadrat.

Wir formulieren eine kombinatorische Aussage, die äquivalent zum Begriff des Fixpunktwortes ist. Ein ähnlich formuliertes Resultat findet sich auch in [Hol2009].

Proposition 2.10. *Sei $w \in \Sigma^*$. Genau dann ist w ein Fixpunktwort, wenn es eine Faktorisierung $w = \prod_{i=1}^n u_i$ gibt, mit $u_i \in \{v_1, \ldots, v_k\}$, $k < |\mathrm{alph}(w)|$ und Buchstaben a_i mit $|v_j|_{a_i} = \delta_{ij}$.*

Beweis. Sei $w \in \mathrm{FW}$ und f ein idempotenter Zeuge von w. Wir wählen die Buchstaben a_i als die Elemente aus $E_f \cup C_f$ und setzen $v_i = f(a_i)$. Dies liefert nach Korollar 2.6 eine Zerlegung der gewünschten Form. Sei nun eine Faktorisierung vorgegeben. Wir setzen umgekehrt $f(a_i) = v_i$ und $f(b) = \varepsilon$ für $b \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$. Dann ist f ein Zeuge für w. □

Proposition 2.10 ist nützlich um Beispiele effizient auf die Zugehörigkeit zu FW zu testen. Man muss auf diese Weise keine Abbildung suchen, sondern nur eine geeignete Faktorisierung finden.

Wir demonstieren dies an einem Beispiel.

Beispiel 2.11. Sei $w = abacabdeedeeabacab$. Das Wort hat die folgende Faktorisierung.

$$a\ b\ a\ c\ a\ b \mid d\ e\ e \mid d\ e\ e \mid a\ b\ a\ c\ a\ a$$

Es ist also $v_1 = abacab$ und $v_2 = dee$. Die dazugehörigen Buchstaben sind $a_1 = c$ und $a_2 = d$. Ein Zeuge f von w ergibt sich nun mit $f(a_1) = v_1$, $f(a_2) = v_2$ und $f(x) = \varepsilon$ für $x \in \{a, b, e\}$.

Wir formulieren jetzt die Vermutung von Billaud aus [Bil1993]. Billaud formulierte diese als Kontraposition von der folgenden Vermutung.

Vermutung 2.12 (Billaud)**.** *Sei w ein Wort und $\delta_a(w) \in \mathrm{FW}$ für alle $a \in \mathrm{alph}(w)$. Dann ist auch $w \in \mathrm{FW}$.*

Auf einem einelementigen Alphabet gibt es keine Fixpunktwörter, da $f(a) = a$ gelten müsste und f somit die Identität ist. Dies impliziert, dass ein Wort w, das die Voraussetzung für Vermutung 2.12 erfüllt, mindestens drei verschiedene Buchstaben enthält. Das Wort $abcab$ liefert dazu ein Beispiel mit genau drei verschiedenen Buchstaben.

Der Zeuge für $\delta_a(w)$ wird oft f_a genannt. Wir schreiben dann kurz für die Mengen E_{f_a}, M_{f_a} und C_{f_a} auch E_a, M_a und C_a.

Das folgende Lemma aus [LR2005] wird in Kapitel 3 genutzt. Es zeigt, dass sich minimale Buchstaben unter bestimmten Voraussetzungen immer als erzeugend wählen lassen.

Lemma 2.13. *Sei $w \in \mathrm{FW}$ ein beliebiges Wort und $a \in \mathrm{minLetters}(w)$. Sei f ein Zeuge von w. Falls $a \in E_f \cup M_f$ gilt, so kann man einen idempotenten Zeugen g wählen mit $|E_f| = |E_g|$ und $a \in E_g$.*

Beweis. Wir nehmen nach Lemma 2.5 an, dass f idempotent ist. Sei

$$F = \left\{ x \in E_f \;\middle|\; |f(x)|_a > 0 \right\}$$

die Menge aller $x \in E_f$, die a erzeugen. Falls $a \in F$ gilt, so können wir $g = f$ wählen.

Sei also ohne Einschränkungen $a \notin F$. Wir können die Anzahl aller a auf folgende Weise zählen:

$$|w|_a = \sum_{x \in F} |w|_x \cdot |f(x)|_a.$$

Da $|w|_a$ minimal gewählt wurde, muss $F = \{e\}$ gelten für ein $e \in \text{alph}(w)$. Außerdem muss $|f(e)|_a = 1$ und somit $|w|_a = |w|_e$ gelten. Da $a \in M_f$ und f idempotent ist, gilt $f(a) = \varepsilon$. Wir ersetzen nun den Erzeugenden e durch a. Setze dafür $g(e) = \varepsilon,\ g(a) = f(e)$ und $g(x) = f(x)$ für $x \notin \{e, a\}$. Es gilt damit $C_g = C_f$, $E_g = (E_f \setminus \{e\}) \cup \{a\}$ und $M_g = (M_f \setminus \{a\}) \cup \{e\}$. Es gilt $g^2(x) = f^2(x) = f(x) = g(x)$ für $x \notin \{e, a\}$. Außerdem gilt $g^2(e) = \varepsilon = g(e)$ und $g^2(a) = g(f(e)) = g(a)$. Damit ist g idempotent. Nach Korollar 2.6 gibt es eine Faktorisierung

$$w = w_0 \prod_{i=1}^{l} f(e) w_i$$

mit Wörtern $w_i \in (f(E_f \setminus \{e\}) \cup C_f)^* = (g(E_g \setminus \{a\}) \cup C_g)^*$. Es gilt also

$$w = w_0 \prod_{i=1}^{l} g(a) w_i.$$

Somit ist der Morphismus g nach Korollar 2.6 ein Zeuge von w. □

Unter gewissen Voraussetzungen lässt sich aus den reduzierten Wörtern $\delta_a(w)$ auch das Wort w rekonstruieren. Dies wird sich insbesondere in Kapitel 4 als wichtig erweisen.

Lemma 2.14. *Seien $w_1, \ldots, w_n$ Wörter in Σ^* und a, b, c paarweise verschiedene Buchstaben. Gilt $\delta_a(w_i) = \delta_a(w_j)$, $\delta_b(w_i) = \delta_b(w_j)$ und $\delta_c(w_i) = \delta_c(w_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$, so ist $w_1 = w_2 = \ldots = w_n$.*

Beweis. Mit Induktion kann man sich auf den Fall $n = 2$ beschränken. Da $\delta_a(w_1) = \delta_a(w_2)$ und $\delta_b(w_1) = \delta_b(w_2)$ gilt, ist $|w_1| = |w_2|$. Die Position der a's und b's lässt sich jedoch mit Hilfe von $\delta_c(w_1) = \delta_c(w_2)$ bestimmen. Also gilt $w_1 = w_2$. □

3 Billauds Vermutung auf beschränkter Buchstabenanzahl

3.1 Billauds Vermutung auf drei Buchstaben

1993 stellte Billaud die Vermutung 2.12 in [Bil1993] auf. Im gleichem Jahr löste Zimmermann diese auf drei Buchstaben in [Zim1993]. Wir beweisen Vermutung 2.12 hier nochmals für drei Buchstaben.

Lemma 3.1. *Sei w ein Wort mit* $\mathrm{alph}(w) = \{a, b, c\}$. *Erfüllt w die Bedingung $\delta_x(w) \in \mathrm{FW}$ für alle $x \in \mathrm{alph}(w)$, dann ist w ein Fixpunktwort.*

Beweis. Seien Zeugen f_a, f_b, f_c gegeben für die Wörter $\delta_a(w), \delta_b(w)$ und $\delta_c(w)$. Wir führen eine Fallunterscheidung nach der Anzahl der Vorkommen der Buchstaben durch. Dabei sei ohne Einschränkung $|w|_a \leq |w|_b \leq |w|_c$.

Fall 1: $|w|_a = |w|_b = |w|_c$.

Sei nach Lemma 2.13 ohne Einschränkung $E_a = \{b\}$. Es ergibt sich $f_a(b) = bc$ oder $f_a(b) = cb$. Wir nehmen einmal an, dass $f_a(b) = bc$ gilt. Es gilt somit $\delta_a(w) = (bc)^{|w|_b}$. Außerdem sei $E_b = \{a\}$. Es gilt entweder $f_b(a) = ac$ oder $f_b(a) = ca$. Sei $f_b(a) = ac$. Damit gilt $\delta_b(w) = (ac)^{|w|_a}$. Also ist vor jedem c entweder ein a oder ein b. Durch Betrachten von $\delta_c(w)$, wobei $\delta_c(w) = (ab)^{|w|_a}$ oder $\delta_c(w) = (ba)^{|w|_a}$ ist, kann die relative Position der a's zu den b's bestimmt werden. In jedem Fall gibt es eine Permutation $\sigma : \{a, b, c\} \rightrightarrows \{a, b, c\}$ mit $w = (\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c))^{|w|_a}$. Dies zeigt mit Proposition 2.10, dass $w \in \mathrm{FW}$ ist.

Fall 2: $|w|_a < |w|_b \leq |w|_c$.

Mit Lemma 2.13 erhalten wir $E_b = E_c = \{a\}$. Gilt $f_a(c) \neq \varepsilon$, so ergibt sich

$$|w|_b = |w|_c \cdot |f_a(c)|_b \geq |w|_c \geq |w|_b$$

und man kann die Rollen von b und c vertauschen. Sei also ohne Einschränkung $f_a(c) = \varepsilon$. Seien $i, j, l, k, m, p \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$\delta_c(w) = (b^i a b^j)^{|w|_a}$$
$$\delta_b(w) = (c^l a c^k)^{|w|_a}$$
$$\delta_a(w) = (c^m b c^p)^{|w|_b}$$

gilt. Damit lässt sich w als

$$w = \prod_{r=1}^{|w|_a} \underbrace{(c^m bc^p)^{i-1} c^m bc^{q_r}}_{:=\alpha_r} \, a \, \underbrace{c^{p-q_r} (c^m bc^p)^j}_{:=\beta_r}$$

darstellen. Mit $|\alpha_r|_c = l$ und $|\beta_r| = k$ folgt $q_r = q_{r'}$ für alle $r, r' \in \{1, \ldots, |w|_a\}$. Also ist

$$w = \left((c^m bc^p)^{i-1} c^m bc^q ac^{p-q} (c^m bc^p)^j\right)^{|w|_a} \in \mathrm{FW}$$

mit Proposition 2.10.

Fall 3: $|w|_a = |w|_b < |w|_c$.

Mit Lemma 2.13 können wir $E_a = \{b\}$ und $E_b = \{a\}$ annehmen. Sei $f_a(b) = c^i bc^j$ und $f_b(a) = c^k ac^l$. Wir nehmen ohne Einschränkung $E_c = \{a\}$ an. Sei wegen $|w|_a = |w|_b$ ohne Einschränkung $f_c(a) = ab$ und $i \leq k$. Dann gilt

$$w \in \left\{c^i bc^{k-i} ac^l\right\}^*$$

und Proposition 2.10 liefert, dass $w \in \mathrm{FW}$ ist. □

3.2 Billauds Vermutung auf vier Buchstaben

Die Beweisidee von Lemma 3.1 stellt eine Klassifikation aller Wörter mit drei Buchstaben, welche die Billaudvermutung erfüllen, dar. In den nächsten Lemmata versuchen wir diese Strategie auch auf Wörter mit vier Buchstaben anzuwenden. Wir beweisen zunächst ein allgemeineres Resultat, das dann in Korollar 3.4 auf einen Teilfall mit 4 Buchstaben angewendet wird.

Lemma 3.2. *Sei w ein Wort mit $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathrm{alph}(w)$. Erfüllt w die Bedingung $\delta_x(w) \in \mathrm{FW}$ für alle $x \in \{a, b, d\}$ und es gibt Zeugen, so dass $E_a = \{b, c\}$, $M_a = \{d\} = M_b$, $E_b = \{a, c\}$, $E_d = \{a, b\}$ und $M_d = \{c\}$ gilt, dann ist w ein Fixpunktwort.*

Beweis. Seien f_x Zeugen von $\delta_x(w)$ für alle $x \in \{a, b, c, d\}$. Sei nun

$$\begin{array}{lll} f_a(b) = d^{b_1} bd^{b_2} & f_a(c) = d^{c_1} cd^{c_2} & f_a(d) = \varepsilon, \\ f_b(a) = d^{a_1} ad^{a_2} & f_b(c) = d^{c_3} cd^{c_4} & f_b(d) = \varepsilon, \\ f_d(a) = c^l ac^k & f_d(b) = c^i bc^j & f_d(c) = \varepsilon. \end{array}$$

Mit Korollar 2.6 ergibt sich dann, dass die reduzierten Wörter $\delta_x(w)$ mit $x \in \{a, b, d\}$ in den folgenden Mengen enthalten sind

$$\begin{aligned} \delta_a(w) &\in \left(\left\{d^{b_1} bd^{b_2}, d^{c_1} cd^{c_2}\right\} \cup C_a\right)^* \\ \delta_b(w) &\in \left(\left\{d^{a_1} ad^{a_2}, d^{c_3} cd^{c_4}\right\} \cup C_b\right)^* \\ \delta_d(w) &\in \left(\left\{c^l ac^k, c^i bc^j\right\} \cup C_d\right)^*. \end{aligned}$$

Das Wort $\delta_d(w)$ gibt Aufschluss über die relative Positionierung von a, b und c. Die Faktoren $c^i bc^j$ in $\delta_d(w)$ liefern Faktoren $(d^{c_1}cd^{c_2})^i d^{b_1}bd^{b_2}(d^{c_1}cd^{c_2})^j$ in $\delta_a(w)$ und die Faktoren $c^l ac^k$ in $\delta_d(w)$ liefern Faktoren $(d^{c_1}cd^{c_2})^{l+k}$ in $\delta_a(w)$. Es ergibt sich somit

$$\delta_a(w) \in \left(\left\{(d^{c_1}cd^{c_2})^i d^{b_1}bd^{b_2}(d^{c_1}cd^{c_2})^j, (d^{c_1}cd^{c_2})^{l+k}\right\} \cup C_a\right)^*$$

und analog für $\delta_b(w)$ ergibt sich

$$\delta_b(w) \in \left(\left\{(d^{c_3}cd^{c_4})^l d^{a_1}ad^{a_2}(d^{c_3}cd^{c_4})^k, (d^{c_3}cd^{c_4})^{l+k}\right\} \cup C_b\right)^*.$$

Um Aussagen über die Exponenten c_i zu bekommen betrachten wir $\delta_{ab}(w)$. Eine Darstellung davon ergibt sich, indem man $\delta_a(w)$ bzw. $\delta_b(w)$ nochmals reduziert. Wir erhalten die folgende Darstellung von $\delta_{ab}(w)$

$$\begin{aligned}\delta_{ab}(w) \in &\left(\left\{(d^{c_1}cd^{c_2})^i d^{b_1}d^{b_2}(d^{c_1}cd^{c_2})^j, (d^{c_1}cd^{c_2})^{l+k}\right\} \cup C_a\right)^* \\ &\cap \left(\left\{(d^{c_3}cd^{c_4})^l d^{a_1}d^{a_2}(d^{c_3}cd^{c_4})^k, (d^{c_3}cd^{c_4})^{l+k}\right\} \cup C_b\right)^*.\end{aligned}$$

Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass $\pi_{ab}(w)$ mit a beginnt. Wir unterscheiden drei Fälle für Werte von l.

Fall 1: $l = 0$.

Es gilt dann $k > 0$, da $a \in E_d$ liegt. Betrachte ein Vorkommen von a in w. Dies liefert einen Faktor der Form $ad^\beta c$ in w. Da dieser auch in $\delta_b(w)$ vorkommen muss, gilt $ad^\beta c = ad^{a_2}d^{c_3}c$. Also ist der Faktor von a zum nächsten c bei jedem Vorkommen von a derselbe. Falls $k > 1$ ist, ergibt sich also

$$w \in \left(\left\{(d^{c_1}cd^{c_2})^i d^{b_1}bd^{b_2}(d^{c_1}cd^{c_2})^j, a(d^{c_1}cd^{c_2})^k\right\} \cup C_a\right)^*.$$

Falls $k = 1$ ist, ergibt sich

$$w \in \left(\left\{(d^{c_1}cd^{c_2})^i d^{b_1}bd^{b_2}(d^{c_1}cd^{c_2})^j, d^{a_1}ad^\beta cd^{c_2}\right\} \cup C_a\right)^*.$$

In beiden Fällen sieht man wieder direkt mit Proposition 2.10, dass $w \in \mathrm{FW}$ ist.

Fall 2: $l = 1$.

Man kann ohne Einschränkung $k > 0$ annehmen. Der Fall $k = 0$ lässt sich symmetrisch zu Fall 1 beweisen. Jedes Vorkommen von a induziert also einen Faktor der Form $cd^\alpha ad^\beta c$. Durch Betrachten von $\delta_b(w)$ ergibt sich $\alpha = c_4 + a_1$ und $\beta = a_2 + c_3$. Die Umgebung von jedem a ist also fest. Damit ergibt sich

$$w \in \left(\left\{(d^{c_1}cd^{c_2})^i d^{b_1}bd^{b_2}(d^{c_1}cd^{c_2})^j, d^{c_1}cd^{c_4+a_1}ad^{c_3+a_2}cd^{c_2}(d^{c_1}cd^{c_2})^{k-1}\right\} \cup C_a\right)^*$$

und somit $w \in \mathrm{FW}$.

Fall 3: $l > 1$.

Da $\pi_{ab}(w)$ mit a beginnt, folgt nach Betrachten von $\delta_a(w)$ und $\delta_b(w)$, dass $\delta_a(w)$ die Präfixe $(d^{c_1}cd^{c_2})^l(d^{c_1}cd^{c_2})^k$ und $(d^{c_3}cd^{c_4})^l d^{a_1}d^{a_2}(d^{c_3}cd^{c_4})^k$ hat. Es folgt, dass $c_1 = c_3$ und $c_2 = c_4$ ist. Falls $k > 0$ gilt, so muss $a_1 + a_2 = 0$ sein, was im Widerspruch zu $a \in E_b$ steht. Also gilt $k = 0$. Dieser Fall ist symmetrisch zu Fall 1. □

Um das nächste Korollar zu formulieren, definieren wir ein weiteres Attribut von Fixpunktwörtern.

Definition 3.3. Sei $w \in \mathrm{FW}$ beliebiges Fixpunktwort. Wir setzen

$$\mathrm{minCardExp}(w) = \min\left\{|E_f| \;\middle|\; f \text{ Zeuge von } w\right\}.$$

Korollar 3.4. *Sei w ein Wort mit $|\mathrm{alph}(w)| = 4$. Erfüllt w die Bedingung $\delta_x(w) \in \mathrm{FW}$ und $\mathrm{minCardExp}(\delta_x(w)) = 2$ für alle $x \in \mathrm{alph}(w)$, dann ist w ein Fixpunktwort.*

Beweis. Sei $\mathrm{alph}(w) = \{a, b, c, d\}$. Ohne Einschränkung sei a so gewählt, dass $a \in \mathrm{minLetters}(w)$ ist. Wir wählen ohne Einschränkung $E_a = \{b, c\}$. Nach Lemma 2.13 können wir $a \in E_y$ für $y \neq a$ annehmen. Falls $d \in E_b$ gilt, so ist $|w|_c \geq |w|_a + |w|_d \geq |w|_a + |w|_b + |w|_c$. Dies ergibt einen Widerspruch. Damit ist $E_b = \{a, c\}$ und analog können wir $E_c = \{a, b\}$ folgern. Ohne Einschränkung kann man dann $E_d = \{a, b\}$ wählen. Die Aussage ergibt sich nun mit Lemma 3.2. □

In [LR2005] wurde für ein allgemeines Alphabet der Fall $\mathrm{minCardExp}(\delta_x(w)) = 1$ für alle $x \in \mathrm{alph}(w)$ bewiesen. Eine mögliche Strategie um Billauds Vermutung auf vier Buchstaben zu zeigen, ist nun eine Fallunterscheidung nach der Anzahl der Buchstaben y zu führen, so dass $\mathrm{minCardExp}(\delta_y(w)) = 1$ ist. Der Fall, dass es genau einen Buchstaben y gibt, mit $\mathrm{minCardExp}(\delta_y(w)) = 1$, wird im folgenden Lemma behandelt.

Lemma 3.5. *Sei w ein Wort mit $|\mathrm{alph}(w)| = 4$. Falls $\delta_x(w) \in \mathrm{FW}$ mit Zeugen f_x für alle $x \in \mathrm{alph}(w)$ gilt und es einen Buchstaben $y \in \mathrm{alph}(w)$ gibt mit $|E_y| = 1$ und $|E_z| = 2$ für alle $x \neq z \in \mathrm{alph}(w)$, dann ist w ein Fixpunktwort.*

Beweis. Sei $\mathrm{alph}(w) = \{a, b, c, d\}$ und $a \in \mathrm{minLetters}(w)$. Für $x \neq a$ mit $|E_x| = 2$ gilt wegen $|\mathrm{alph}(\delta_x(w))| = 3$ bereits $C_x = \emptyset$. Also ist $a \in M_x \cup E_x$. Da $a \in \mathrm{minLetters}(w)$ ist, wählen wir nach Lemma 2.13 einen Zeugen f_x, so dass $a \in E_x$ ist. Wir unterscheiden drei Fälle. Ohne Einschränkung gilt nach Lemma 2.13, dass entweder $E_b = \{a\}$ oder $C_b = \{a\}$ oder $|E_a| = 1$ und $|w|_a < |w|_x$ für $x \in \{b, c, d\}$ ist.

Fall 1: $C_b = \{a\}$.

Sei ohne Einschränkung $E_b = \{c\}$ und $M_b = \{d\}$. Es gilt dann wieder mit Korollar 2.6

$$\delta_b(w) \in \left\{a, d^i c d^j\right\}^*.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach den Erzeugenden aus E_c. Weil nach Obigem $a \in E_c$ ist, sind dies die Fälle $b \in E_c$ oder $d \in E_c$.

Fall 1.1: $b \in E_c$.

Wegen $\delta_b(w) \in \left\{a, d^i c d^j\right\}^*$ ist $|w|_c \leq |w|_d$ und da $d \in M_c$ ist, erhalten wir

$$|w|_d = |w|_b \cdot |f_c(b)|_d + |w|_a \cdot |f_c(a)|_d \geq |w|_b + |w|_a > |w|_b.$$

Wir betrachten $\delta_a(w)$.

Fall 1.1(i): $d \in E_a$.

Falls $b \in M_a$ ist, so gilt $|w|_d < |w|_d + |w|_c \leq |w|_b$, was im Widerspruch zu $|w|_b < |w|_d$ steht. Falls $c \in M_a$ gilt, so ist $|w|_d < |w|_c$ und wir erhalten einen Widerspruch zu $|w|_c \leq |w|_d$. Somit kann dieser Fall nicht auftreten.

Fall 1.1(ii): $E_a = \{b, c\}$.

Die Voraussetzung $E_a = \{b, c\}$ impliziert, dass

$$\delta_a(w) \in \left\{d^\alpha b d^{\alpha'}, d^\beta c d^{\beta'}\right\}^*$$

ist. Wegen der Gestalt von $\delta_a(w)$ und $\delta_b(w)$ existieren Zahlen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $i = \beta + k_1(\alpha + \alpha')$ und $j = \beta' + k_2(\alpha + \alpha')$. Es folgt

$$\delta_a(w) \in \left\{(d^\alpha b d^{\alpha'})^{k_1} d^\beta c d^{\beta'} (d^\alpha b d^{\alpha'})^{k_2}\right\}^*.$$

Man sieht nun leicht, dass

$$w \in \left\{a, (d^\alpha b d^{\alpha'})^{k_1} d^\beta c d^{\beta'} (d^\alpha b d^{\alpha'})^{k_2}\right\}^*$$

ist und nach Proposition 2.10 das Wort w somit ein Fixpunktwort ist.

Fall 1.2: $d \in E_c$.

In diesem Fall ist

$$\delta_c(w) \in \left\{b^{d_1} d b^{d_2}, b^{a_1} a b^{a_2}\right\}^*.$$

Insbesondere folgt die Ungleichung $|w|_d < |w|_b$. Sei zunächst $i, j > 0$. Es gilt dann

$$w \in \left\{b^{a_1} a b^{a_2}, (b^{d_1} d b^{d_2})^{i-1} b^{d_1} d b^q c b^p d b^{d_2} (b^{d_1} d b^{d_2})^{j-1} \mid p + q = d_1 + d_2\right\}^*.$$

Wir betrachten nun das Wort $\delta_d(w)$. Wenn $b \in E_d$ gilt, so ist $c \in M_d$ und damit $|w|_b \leq |w|_c$. Da $\delta_b(w) \in \left\{a, d^i c d^j\right\}^*$ ist, gilt allerdings auch $|w|_c \leq |w|_d$. Oben wurde aber bereits $|w|_d < |w|_b$ festgestellt, was einen Widerspruch darstellt. Somit muss $E_d = \{a, c\}$ gelten. Dann gilt

$$\delta_d(w) \in \left\{b^\alpha a b^{\alpha'}, b^\beta c b^{\beta'}\right\}^*.$$

Durch β und β' sind die Zahlen p und q eindeutig bestimmt. Mit Proposition 2.10 folgt, dass $w \in \mathrm{FW}$ ist. Die Fälle $i = 0$ und $j = 0$ lassen sich ähnlich beweisen.

Fall 2: $E_a = \{b\}$ und $|w|_a < |w|_x$ für $x \in \{b, c, d\}$.

Im Folgenden machen wir eine Fallunterscheidung nach E_c.

Fall 2.1: $E_c = \{a, d\}$.

Es folgt direkt, dass $|w|_b = |w|_a \cdot |f_c(a)|_c + |w|_d \cdot |f_c(d)|_c$ ist und damit insbesondere die Ungleichung $|w|_b > |w|_d$ erfüllt ist. Es gibt drei Möglichkeiten dafür, welche sterblichen Buchstaben für $\delta_a(w)$ in Frage kommen.

Fall 2.1(i): $C_a = \{c\}$ und $M_a = \{d\}$.

Es folgt

$$|w|_d = |w|_b \cdot |f_a(b)|_d \geq |w|_b,$$

so dass wir einen Widerspruch zu $|w|_b > |w|_d$ erhalten.

Fall 2.1(ii): $M_a = \{c, d\}$.

Es gilt dann $|w|_d \geq |w|_b$, im Widerspruch zu $|w|_b > |w|_d$.

Fall 2.1(iii): $C_a = \{d\}$ und $M_a = \{c\}$.

Sei

$$\delta_a(w) \in \left\{c^i bc^j, d\right\}^*$$

und

$$\delta_c(w) \in \left\{b^n ab^m, b^k db^l\right\}^*.$$

Da $d \in C_a$ ist, liefert jeder Faktor $b^k db^l$ aus $\delta_c(w)$ einen Faktor $(c^i bc^j)^k d(c^i bc^j)^l$ in w. Sei $n > 0$ und $m > 0$. Dann liefern Faktoren der Form $b^n ab^m$ aus $\delta_c(w)$ einen Faktor der Form $(c^i bc^j)^{n-1} c^i bc^p ac^q bc^j (c^i bc^j)^{m-1}$ in w. Es gilt also

$$w \in \left\{(c^i bc^j)^k d(c^i bc^j)^l, (c^i bc^j)^{n-1} c^i bc^p ac^q bc^j (c^i bc^j)^{m-1} \mid p + q = i + j\right\}^*.$$

Zu zeigen ist nun, dass p und q in jedem Vorkommen gleich sind, denn dann ist $w \in \mathrm{FW}$. Falls $E_d = \{a, c\}$ gilt, so ist $|w|_c \leq |w|_b$ und wegen $M_a = \{c\}$ gilt damit, dass $|w|_c = |w|_b$ ist. Ohne Einschränkung gilt also, dass $i = 0$ und $j = 1$ ist. Dann muss $p = 1$ und $q = 0$ gelten und somit ist $w \in \mathrm{FW}$. Sei $E_d = \{a, b\}$ und deshalb gilt $f_d(a) = c^{a_1} ac^{a_2}$ und $f_d(b) = c^{b_1} bc^{b_2}$. Damit erhalten wir, dass $p = b_2 + a_1$ und $q = b_1 + a_2$ ist. Mit Proposition 2.10 folgt, dass $w \in \mathrm{FW}$ ist. Die Fälle $n = 0$ und $m = 0$ lassen sich ähnlich zeigen.

Fall 2.2: $E_c = \{a, b\}$.

Sei $f_c(a) = d^{a_1} ad^{a_2}$ und $f_c(b) = d^i bd^j$. Wir unterscheiden für C_a drei Fälle.

Fall 2.2(i): $C_a = \{d\}$, $M_a = \{c\}$.

Es gilt dann $f_a(b) = c^k b c^l$ und

$$\delta_a(w) \in \left\{c^k b c^l, d\right\}^* .$$

Wegen $f_c(b) = d^i b d^j$ erhalten wir

$$\delta_a(w) \in \left\{d^i c^k b c^l d^j, d\right\}^* .$$

Aus der Betrachtung von $\delta_{ac}(w)$ folgt

$$\delta_a(w) \in \left\{d^i c^k b c^l d^j, d^{a_1} d^{a_2}\right\}^* .$$

Wegen der Gestalt von $\delta_c(w)$ hat ein Faktor $d^i c^k b c^l d^j$ aus $\delta_a(w)$ kein a im Urbild w. Es folgt

$$w \in \left\{d^i c^k b c^l d^j, d^{a_1} a d^{a_2}\right\}^*$$

und damit $w \in \mathrm{FW}$ nach Proposition 2.10.

Fall 2.2(ii): $C_a = \{c\}$, $M_a = \{d\}$.

Falls $E_d = \{a, b\}$ gilt, so kann man dies analog zu Fall 2.2(i) beweisen. Falls $E_d = \{a, c\}$ gilt, so ist $|w|_a \geq |w|_b$. Dies ist nicht möglich, da nach Annahme $|w|_a < |w|_b$ gilt.

Fall 2.2(iii): $M_a = \{c, d\}$.

Sei $f_a(b) = ubv$. Es gilt

$$\delta_{ac}(w) \in \left\{\delta_c(u) b \delta_c(v)\right\}^* \cap \left\{d^{a_1} d^{a_2}, d^i b d^j\right\}^* .$$

Daraus folgt, dass zu jedem b mindestens ein a gehört, da die Anzahl der d's in uv immer gleich ist und deshalb größer als $i + j$ sein muss. Es gilt also $|w|_a \geq |w|_b$, ein Widerspruch zu $|w|_a < |w|_b$.

Fall 3: $E_b = \{a\}$.

Sei $f_b(a) = uav$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $d \in M_b$ gilt. Wir unterscheiden die beiden Fälle $E_c = \{a, b\}$ und $E_c = \{a, d\}$.

Fall 3.1: $E_c = \{a, b\}$.

Sei $f_c(a) = d^i a d^j$ und $f_c(b) = d^k b d^l$, also

$$\delta_c(w) \in \left\{d^i a d^j, d^k b d^l\right\}^* .$$

Durch das Betrachten von $\delta_b(w)$ folgt $|u|_d = i + (k + l)z_1$ und $|v|_d = j + (k + l)z_2$ für Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$. Dies liefert für $\delta_c(w)$ die Form

$$\delta_c(w) \in \left\{(d^k b d^l)^{z_1} d^i a d^j (d^k b d^l)^{z_2}\right\}^* .$$

Für $C_b = \{c\}$ ergibt sich

$$w \in \left\{(d^k b d^l)^{z_1} d^i a d^j (d^k b d^l)^{z_2}, c\right\}^*.$$

Wir können also $C_b = \emptyset$ annehmen. In diesem Fall gilt

$$\delta_b(w) \in \{uav\}^*.$$

Wir führen eine Fallunterscheidung nach E_d durch.

Fall 3.1(i): $E_d = \{a, b\}$.

Sei

$$\delta_d(w) \in \left\{c^{a_1} a c^{a_2}, c^{b_1} b c^{b_2}\right\}^*.$$

Durch Betrachten von $\delta_c(w)$ ergibt sich dann

$$\delta_d(w) \in \left\{(c^{b_1} b c^{b_2})^{z_2} (c^{a_1} a c^{a_2}) (c^{b_1} b c^{b_2})^{z_2}\right\}^*.$$

Nach Lemma 2.14 existieren dann Wörter $\tilde{u}, \tilde{v} \in \{b, c, d\}^*$ mit

$$w \in \{\tilde{u} a \tilde{v}\}^*.$$

Es folgt mit Proposition 2.10, dass w ein Fixpunktwort ist.

Fall 3.1(ii): $E_d = \{a, c\}$.

Sei

$$\delta_d(w) \in \{b^{a_1} a b^{a_2}, b^{c_1} c b^{c_2}\}^*.$$

Aufgrund der Gestalt von $\delta_b(w)$ folgt

$$\delta_d(w) \in \left\{(b^{c_1} c b^{c_2})^{|u|_c} (b^{a_1} a b^{a_2}) (b^{c_1} c b^{c_2})^{|v|_c}\right\}^*.$$

Nach Lemma 2.14 gibt es dann wieder Wörter $\tilde{u}, \tilde{v} \in \{b, c, d\}^*$ so, dass

$$w \in \{\tilde{u} a \tilde{v}\}^*$$

ist und wir erhalten $w \in \mathrm{FW}$.

Fall 3.2: $E_c = \{a, d\}$.

Sei $f_c(a) = b^i a b^j$ und $f_c(d) = b^k d b^l$. Es folgt

$$\delta_c(w) \in \left\{b^i a b^j, b^k d b^l\right\}^*$$

und das Betrachten von $\delta_a(w)$ liefert sogar

$$\delta_c(w) \in \left\{(b^k d b^l)^{|u|_d} b^i a b^j (b^k d b^l)^{|v|_d}\right\}^*.$$

Eine Fallunterscheidung nach E_d schließt den Beweis ab.

Fall 3.2(i): $E_d = \{a, b\}$.

Sei

$$\delta_d(w) \in \left\{c^{a_1}ac^{a_2}, c^{b_1}bc^{b_2}\right\}^*.$$

Ist $C_b = \{c\}$, also

$$\delta_b(w) \in \{uav, c\}^*$$

so sieht man leicht, dass

$$w \in \{c^{a_1}uavc^{a_2}, c^{b_1}bc^{b_2}\}^* \subset \{uav, c, b\}^*$$

ist. Damit ist in diesem Fall $w \in \mathrm{FW}$.

Ist $C_b = \emptyset$, so ergibt sich

$$\delta_b(w) \in \{uav\}^*.$$

Definiere $\alpha = \frac{|u|_c - a_1}{b_1+b_2}$ und $\beta = \frac{|v|_c - a_2}{b_1+b_2}$. Die Gesalt von $\delta_b(w)$ liefert die folgende Formel:

$$\delta_d(w) \in \left\{(c^{b_1}bc^{b_2})^\alpha c^{a_1}ac^{a_2}(c^{b_1}bc^{b_2})^\beta\right\}^*.$$

Nach Lemma 2.14 existieren Wörter $\tilde{u}, \tilde{v} \in \{b, c, d\}^*$ so, dass

$$w \in \{\tilde{u}a\tilde{v}\}^*$$

ist und wir folgern $w \in \mathrm{FW}$.

Fall 3.2(ii): $E_d = \{a, c\}$.

Sei $f_d(a) = b^{a_1}ab^{a_2}$ und $f_d(c) = b^{c_1}cb^{c_2}$. Es ergibt sich also

$$\delta_d(w) \in \{b^{a_1}ab^{a_2}, b^{c_1}cb^{c_2}\}^*.$$

Ist $C_b = \emptyset$, so ist

$$\delta_d(w) \in \left\{(b^{c_1}cb^{c_2})^{|u|_c}b^{a_1}ab^{a_2}(b^{c_1}cb^{c_2})^{|v|_c}\right\}^*$$

und wie bereits oben mehrmals benutzt, erhalten wir mit Lemma 2.14 die Aussage $w \in \mathrm{FW}$.

Ist $C_b = \{c\}$, so setzen wir $\alpha = \frac{|u|_d(k+l)+i-a_1}{c_1+c_2}$ und $\beta = \frac{|v|_d(k+l)+i-a_2}{c_1+c_2}$. Dann ist $\alpha + \beta$ die Anzahl der c's, die pro Faktor aus $\delta_c(w)$ gelöscht wurden. Es ergibt sich damit

$$\delta_b(w) \in \left\{c^\alpha uavc^\beta\right\}^*$$

und wir können den Fall $C_b = \{b\}$ auf den Fall $C_b = \emptyset$ reduzieren. □

Um die Billaudsche Vermutung 2.12 auf vier Buchstaben zu beweisen, fehlen also noch zwei Fälle. Dies sind die Fälle, dass es genau zwei bzw. genau drei Buchstaben y gibt, mit $\mathrm{minCardExp}(\delta_y(w)) = 1$. Diese Fälle lassen sich vermutlich ähnlich zu obigem Lemma beweisen.

4 Maximale Erzeugende

In diesem Kapitel betrachten wir die folgende Vermutung, die eine Abschwächung der Billaudschen Vermutung 2.12 ist. Dabei nehmen wir an, dass die Zeugen der reduzierten Wörter eine bestimmte Form haben. Wir teilen das Alphabet in zwei disjunkte Teile Σ und Σ' auf. Die Elemente aus Σ stellen wir uns als die Erzeugenden vor, die Elemente aus Σ' als sterbliche Buchstaben.

Vermutung 4.1. *Sei* $\mathrm{alph}(w) = \Sigma \dot\cup \Sigma'$ *und* $|\Sigma'| \geq 2$. *Ist* $\delta_x(w) \in \mathrm{FW}$ *für alle* $x \in \mathrm{alph}(w)$ *und gibt es Zeugen* f_a *für* $\delta_a(w)$ *so, dass* $E_a \cup C_a = \Sigma$ *für alle* $a \in \Sigma'$ *gilt, so ist* w *ein Fixpunktwort.*

Die Elemente aus Σ sind dabei in gewisser Weise maximal, da sie den Träger von f_a für alle Elemente $a \in \Sigma'$ bilden. Folgender Spezialfall dieser Vermutung lässt sich leicht beweisen.

Lemma 4.2. *Sei* $\mathrm{alph}(w) = \Sigma \dot\cup \Sigma'$ *mit* $\Sigma = \{y\}$. *Ist* $\delta_x(w) \in \mathrm{FW}$ *für alle* $x \in \mathrm{alph}(w)$ *und gibt es Zeugen* f_a *für* $\delta_a(w)$ *so, dass* $E_a = \Sigma$ *und* $C_a = \emptyset$ *für alle* $a \in \Sigma'$ *gilt, so ist* $w \in \mathrm{FW}$.

Beweis. Nach Lemma 3.1 können wir annehmen, dass $|\mathrm{alph}(w)| \geq 4$ und somit $|\Sigma'| \geq 3$ ist. Sei $f_a(y) = \alpha_a y \beta_a$ für $a \in \Sigma'$. Die Wörter α_a, β_a liefern die relative Position aller Buchstaben in Σ'. Damit lassen sich nach Lemma 2.14 eindeutige Wörter α, β konstruieren mit $\delta_a(\alpha) = \alpha_a$ und $\delta_a(\beta) = \beta_a$ für alle $a \in \Sigma'$. Also gilt $w \in \{\alpha y \beta\}^*$ mit $|\alpha\beta|_y = 0$. Es folgt $w \in \mathrm{FW}$. $\square$

Je nach Anzahl der sterblichen Buchstaben aus Σ' gibt es verschiedene Beweisansätze für Vermutung 4.1. Wir unterscheiden die beiden Fälle $|\Sigma'| = 2$ und $|\Sigma'| \geq 3$.

4.1 Maximale Erzeugende mit $|\Sigma'| = 2$

Folgendes Lemma wird mehrmals in Lemma 4.4 benutzt werden.

Lemma 4.3. *Sei* $\mathrm{alph}(w) = \Sigma \dot\cup \Sigma'$. *Sei* l_x *die Länge eines Kontextes links von einem Buchstaben* $x \in \Sigma$ *und* r_x *die Länge eines Kontextes rechts von* $x \in \Sigma$. *Das heißt für jeden Faktor* $x\alpha y$ *mit* $x, y \in \Sigma, \alpha \in \Sigma'^*$ *gilt* $|\alpha| = r_x + l_y$ *und für das Präfix* αx *(Suffix* $x\alpha$*) von* w *mit* $x \in \Sigma, \alpha \in \Sigma'^*$ *gilt* $|\alpha| = l_x$ *(*$|\alpha| = r_x$*). Ist* $l_z + r_z > 0$ *für ein* $z \in \Sigma$ *und* $\delta_z(w) \in \gamma^*$ *mit* $|\gamma|_{z'} = 1$ *für* $z' \in \Sigma$, *so ist* $w \in \mathrm{FW}$ *ein Fixpunktwort.*

Beweis. Anhand der Informationen über den Kontext der Buchstaben aus Σ konstruieren wir eine Darstellung des Wortes w. Sei $\delta_z(w) = \gamma^n$ und $\gamma = \alpha_0 \prod_{i=1}^{l} x_i\alpha_i$ mit $x_i \in \Sigma$ und $\alpha_i \in \Sigma'^*$. Wir konstruieren $w = \tilde{\gamma}^n$ mit $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha}_0 \prod_{i=0}^{l} x_i\tilde{\alpha}_i$. Dazu setzen wir

$$\tilde{\alpha}_0 = \begin{cases} \alpha_0 & \text{falls } |\alpha_0| = l_{x_1} \\ \alpha_0[0, l_z]z \prod_{i=1}^{s} \left(\alpha_0[n_{i-1}, n_i]z\right) \alpha_0[|\alpha_0| - l_{x_1} - r_z, |\alpha_0|] & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $n_i = l_z + i(l_z + r_z)$ und $s = \frac{|\alpha_0|-(l_z+r_z+l_{x_1})}{l_z+r_z}$. Dabei bezeichnet $\alpha_0[i,j]$ das Teilwort von α_0 von Index i bis Index j. Analog lassen sich die $\tilde{\alpha}_i$ konstruieren. Die Zuordnung ist aufgrund der Voraussetzung $l_z + r_z > 0$ eindeutig und es gilt $|\alpha_i| = |\tilde{\alpha}_i|_{\mathrm{alph}(w)\setminus\{z\}}$. Somit erhalten wir $w = \tilde{\gamma}^n$ mit $|\tilde{\gamma}|_{z'} = 1$ und mit Proposition 2.10 folgt $w \in \mathrm{FW}$. □

Lemma 4.4. *Sei w ein Wort und $\mathrm{alph}(w) = \Sigma \dot\cup \{a, b\}$ mit $|\mathrm{alph}(w)| = 5$. Ist $\delta_x(w) \in \mathrm{FW}$ für alle $x \in \mathrm{alph}(w)$ und gibt es Zeugen f_a, f_b für $\delta_a(w)$ und $\delta_b(w)$ so, dass $E_a = \Sigma = E_b$ gilt, so ist $w \in \mathrm{FW}$ ein Fixpunktwort.*

Beweis. Sei $f_a(x) = b^{i_x}xb^{k_x}$ und $f_b(x) = a^{j_x}xa^{l_x}$ für $x \in \Sigma$. Wegen $x \in E_a$ und $x \in E_b$ ist $i_x + k_x > 0$ und $j_x + l_x > 0$ für $x \in \Sigma$. Die zu x gehörigen a's und b's nennen wir den Kontext von x. Der Kontext von x muss nicht für jedes x derselbe Faktor in w sein. Wir fixieren ein $x \in \Sigma$ und betrachten die verschiedenen Fälle die für E_x, C_x und M_x auftreten können. Wir wählen dabei x so, dass $a \notin M_x$ oder $b \notin M_x$ gilt. Wenn dies nicht möglich ist, so tritt Fall 2 der folgenden Fallunterscheidung auf.

Fall 1: $a, b \in C_x$.

Man kann $f|_{\mathrm{alph}(w)\setminus\{x\}} = f_x$ und $f(x) = x$ wählen. Dies ist ein Zeuge für w, da jedes Vorkommen von x neben einem Vorkommen eines a's oder b's steht. Also kann man x konstant wählen.

Fall 2: $a, b \in M_{x'} \quad \forall x' \in \Sigma$.

Sei $\mathrm{alph}(w) = \{a, b, x, y, z\}$ das Alphabet von w. Da die Längen der Kontexte von Buchstaben aus Σ durch die Wörter $\delta_a(w)$ und $\delta_b(w)$ bekannt sind, reicht es zu zeigen, dass diese Kontexte bei jedem Vorkommen dieselben sind. Seien nämlich α_x und β_x der linke und rechte Kontext von $x \in \Sigma$, so kann man einen Zeugen f konstruieren. Setze dazu $f(a) = f(b) = \varepsilon$ und $f(x) = \alpha_x x \beta_x$.

Wir betrachten den Träger von f_x mit $x \in \Sigma$. Gibt es einen Buchstaben aus Σ, der nicht in E_x ist, so muss dieser nach Lemma 4.3 ohne Einschränkung in C_x sein. Ist dieser nämlich in M_x, so lässt sich $w \in \mathrm{FW}$ mit Hilfe von Lemma 4.3 beweisen.

Haben wir den Fall $y \in E_x$ und $z \in C_x$, so sind die Kontexte von y und z fest. Also kann dieser Fall höchstens einmal auftreten, sonst sind die Kontexte aller Buchstaben aus Σ fest. Es bleiben also ohne Einschränkung die folgenden beiden Fälle.

Fall 2.1: $y \in E_x, z \in C_x,\ x, y \in E_z$ und $x, z \in E_y$.

Auf Grund des Zeugens f_x von $\delta_x(w)$ gehören alle Buchstaben aus Σ' bereits zu y. Also hat es zu jedem Vorkommen von y dieselbe Anzahl an a's und b's vor und hinter diesem y. Betrachtet man nun das Wort $\delta_z(w)$, so sieht man, dass die Buchstaben aus Σ' von x und y erzeugt werden. Mit Obigem folgt, dass $\pi_{x,y}(w) \in \{x^i y x^j\}^*$ für zwei Zahlen $i, j \in \mathbb{N}$ ist. Es gilt

$$\delta_z(w) \in \left\{ (f_z(x))^i \, f_z(y) (f_z(x))^j \right\}^* .$$

Die Voraussetzungen von Lemma 4.3 sind somit erfüllt und es folgt $w \in \mathrm{FW}$.

Fall 2.2: $y, z \in E_x$, $x, y \in E_z$ und $x, z \in E_y$.

Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $\pi_\Sigma(w)$ mit y beginnt. Sei $f_x(y) = \alpha_{y,x} y \beta_{y,x}$ für $x, y \in \Sigma$. Da $\pi_\Sigma(w)$ mit y beginnt, entspricht die Länge von $\alpha_{y,x}$ der Länge des linken Teiles vom Kontext von y, d. h. es gilt $|\alpha_{y,x}| = i_y + j_y$. Wir führen eine Fallunterscheidung nach $|\beta_{y,x}|$ durch.

Fall 2.2(i): $|\beta_{y,x}| = k_y + l_y$.

In diesem Fall sind die Kontexte von x komplett von $f_x(z)$ aufgenommen worden. Ein Vergleich der Längen, analog zum Beweis von Lemma 4.3, zeigt die Positionen der x innerhalb von $f_x(z)$. Es lässt sich somit ein Zeuge f konstruieren, mit $a, b, x \in M_f$ und $x, z \in E_f$. Es folgt, dass $w \in \mathrm{FW}$ ein Fixpunktwort ist.

Fall 2.2(ii): $|\beta_{y,x}| > k_y + l_y$.

Da y ein Präfix von $\pi_\Sigma(w)$ ist, muss $|\alpha_{y,x}| = i_y + j_y$ sein. Also ist der Kontext von y in diesem Fall fest. Wir führen eine Fallunterscheidung nach den Suffixen von $\pi_\Sigma(w)$ durch. Da $|\beta_{y,x}| > k_y + l_y$ ist, kann y kein Suffix von $\pi_\Sigma(w)$ sein. Ist z ein Suffix, so muss $|\beta_{z,x}| = k_z + l_z$ sein. Wie in Fall 2.2(i) lässt sich aus den Längen von $\beta_{y,x}$ und $\alpha_{z,x}$ die Positionen der x feststellen und wir folgern, dass $w \in \mathrm{FW}$ ein Fixpunktwort ist. Also ist ohne Einschränkung x ein Suffix von $\pi_\Sigma(w)$. Wir betrachten nun das Wort $\delta_y(w)$ und machen eine Fallunterscheidung nach den Präfixen von $\pi_\Sigma(w)$. Wir wissen bereits, dass y ein Präfix von $\pi_\Sigma(w)$ ist.

Falls es ein Präfix der Form y^+x gibt, so ist der Kontext von x fest, denn es gilt $|\beta_{x,y}| = k_x + l_x$ und $|\alpha_{x,y}| > i_x + j_x$. Der Kontext von z ist aber auch fest, denn es gilt immer $|\alpha_{z,y}| \geq i_z + j_z$. Falls $|\beta_{z,y}| < k_z + l_z$ ist, so wird immer derselbe Kontext von $\alpha_{x,y}$ aufgenommen und der Kontext von z ist fest. Ist $|\beta_{z,y}| \geq k_z + l_z$ so folgt direkt, dass der Kontext von z fest ist. In beiden Fällen kann man also $w \in \mathrm{FW}$ folgern.

Gibt es ein Präfix der Form y^+z, so gilt $|\alpha_{z,y}| \geq i_z + j_z$ und $|\beta_{x,y}| = k_x + l_x$. Analog zu oben kann man wieder folgern, dass die Kontexte der Buchstaben aus Σ alle fest sind und wir, dass $w \in \mathrm{FW}$ ein Fixpunktwort ist.

Fall 2.2(iii): $|\beta_{y,x}| < k_y + l_y$.

Da y ein Teil seines Kontextes fehlt, muss dieser immer von $\alpha_{z,x}$ kommen. Der Kontext von y ist somit fest. Nach Obigem gilt $|\alpha_{y,x}| = i_y + j_y$ und z kann somit rechts keinen Kontext von y bekommen. Dies impliziert $|\beta_{z,x}| \geq k_z + l_z$, so dass der Kontext von z fest ist.

Wir betrachten nun $\delta_z(w)$. Analog ergeben sich auch hier die drei Fälle abhängig von der Länge $|\beta_{y,z}|$. Der Fall $|\beta_{y,z}| = k_y + l_y$ lässt sich analog zu oben lösen. Im Fall $|\beta_{y,z}| < k_y + l_y$ ergibt sich, dass x fest ist. Damit ist in diesem Fall $w \in \mathrm{FW}$ ein Fixpunktwort. Sei also ohne Einschränkung $|\beta_{y,z}| > k_y + l_y$. Wie oben in Fall 2.2(ii) ergibt sich dann, dass z ein Suffix von w sein muss. Damit gilt $|\beta_{z,x}| = k_z + l_z$ und z kann seinen Kontext in $\delta_x(w)$ nicht verändern. Durch Betrachten der Länge von $\alpha_{z,x}$ findet man Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$ mit $\pi_\Sigma(w) \in \left\{yx^kz, x^lz\right\}^*$. Man beachte, dass hierbei $l > k$ gilt. Es folgt insbesondere, dass der Kontext von y größer als der Kontext von x ist. Konkret gilt $|\beta_{y,z}| \geq |\alpha_{x,z}\beta_{x,z}|$.

Wir betrachten nun $\delta_y(w)$. Nehmen wir zunächst $k > 0$ an. Da yx^kz ein Präfix von $\pi_\Sigma(w)$ ist, muss x den Kontext von y aufnehmen. Da es einen Faktor der Form yx^kzx^lz in $\pi_\Sigma(w)$ geben muss, nimmt x einen Teil des Kontextes von z auf. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass z ein Suffix von $\pi_\Sigma(w)$ ist. Damit gilt $k = 0$. Also ist yz ein Präfix von $\pi_\Sigma(w)$ und z nimmt den Kontext von y auf. Somit muss $|\alpha_{y,z}| = 0$, $|\alpha_{x,z}| = 0$, $|\beta_{y,z}| = |\beta_{x,z}|$ und $l = 1$ gelten. Insbesondere besitzt x links einen leeren Kontext. Durch Betrachten von $\delta_z(w)$ sieht man, dass der Kontext von x nach rechts fest ist. Also ist der Kontext von x fest und es folgt, dass $w \in \mathrm{FW}$ ein Fixpunktwort ist.

Fall 3: $a \in M_x, b \in C_x$.

Wir untersuchen diesen Fall mit einer Fallunterscheidung nach E_x.

Fall 3.1: $y \notin E_x$.

Wir erkennen zunächst, dass z nur die a's des Kontextes eines Buchstabens aus Σ aufnehmen kann, denn die zu z gehörigen b's trennen auf einer Seite ab.

Fall 3.1(i): $y \in M_x$.

Der Buchstabe z kann nur die a's eines Buchstabens aufnehmen. Da z wegen $y \in M_x$ immer die a's von y aufnehmen muss, werden die a's aus dem Kontext von x nicht erzeugt. Damit kann es diesen Fall nicht geben.

Fall 3.1(ii): $y \in C_x$.

Seien ohne Einschränkung die b's, die zum Kontext von z gehören, links von z. Ein Vorkommen von z in $\delta_x(w)$ hat dann eine Umgebung der Form $b^+a^iza^j$. Dabei muss $i = j_z$ und $j - l_z = j_x + l_x = j_y + l_y$ sein. Nach jedem z kommt also genau ein x oder y und es gilt $\pi_\Sigma(w) \in \{zx, zy\}^*$. Da die b's von x bzw. y rechts von allen a's aus dem Kontext sind, ist der Kontext dieser Buchstaben fest. Wir konstruieren einen Zeugen f für w. Setze dazu $f(a) = f(b) = f(z) = \varepsilon$, $f(x) = b^{i_z}a^{j_z}za^{l_z+j_x}b^{i_x}xa^{l_x}b^{k_x}$ und $f(y) = b^{i_z}a^{j_z}za^{l_z+j_y}b^{i_y}yb^{k_y}$. Man beachte dabei, dass die Voraussetzungen implizieren, dass entweder $i_x = 0$ oder $l_x = 0$ ist.

Fall 3.2: $z \notin E_x$.

Dieser Fall lässt sich analog zu Fall 3.1 beweisen.

Fall 3.3: $y, z \in E_x$.

Ohne Einschränkung betrachten wir den Fall, dass yx ein Faktor von $\pi_\Sigma(w)$ ist und y einen Teil des Kontextes von x aufnimmt.

Fall 3.3(i): y nimmt nicht den gesamten Kontext von x auf.

Ein y kann nicht den Rest des Kontextes aufnehmen, da ein b rechts von y abtrennt. Dann muss z den Rest des Kontextes von x aufnehmen. Also gibt es einen Faktor der Form $b^+a^*ya^*a^*b^+a^*a^*za^*b^+$ in $\delta_x(w)$. Es folgt dann leicht, dass $\pi_\Sigma(w) \in \{yxz\}^*$ ist. Je nach Position von x kann man dann einen Zeugen f für w konstruieren mit $x \in M_f$ oder $x \in C_f$.

Fall 3.3(ii): y nimmt den gesamten Kontext von x auf.

Ähnlich wie in Fall 3.1(ii) konstruieren wir einen Zeugen f von w. Wir setzen $f(x) = f(a) = f(b) = \varepsilon$ und $f(y) = b^{i_y}a^{j_y}ya^{l_y+j_x}b^{i_x}xa^{l_x}b^{k_x}$. Dabei gilt wieder $i_x = 0$ oder $l_x = 0$.

Falls z seinen Kontext nicht erweitert, also $|f_x(z)|_a = |f_b(z)|_a$ gilt, so kann man $f(z) = b^{i_z}a^{j_z}za^{l_z}b^{k_z}$ setzen. Erweitert z seinen Kontext, so muss er die a's eines x aufnehmen. Wir können analog zu $f(y)$ von oben, den Wert von $f(z)$ konstruieren.

In allen Fällen ist f ein Zeuge von w und somit w ein Fixpunktwort.

Fall 4: $a \in E_x$.

Wir führen eine Fallunterscheidung nach dem Alphabet des Wortes $f_x(a)$, also nach jenen Buchstaben, die von a erzeugt werden.

Fall 4.1: Es gibt ein $y \in \Sigma$ mit $y \in \mathrm{alph}(f_x(a))$.

Dann gilt

$$|w| \geq |w|_a \cdot |f_x(a)|_{\mathrm{alph}(f_x(a))\setminus\{b\}} + |w|_b + |w|_x \geq |w|_a \cdot 2 + |w|_b + |w|_x.$$

Durch Subtraktion von $|w|_a$ und $|w|_b$ folgt dann $\sum_{z\in\Sigma} |w|_z \geq |w|_a + |w|_x$. Wegen $|f_b(z)|_a > 0$ gehört zu jedem Buchstaben $z \in \Sigma$ mindestens ein a und somit gilt

$$\sum_{z\in\Sigma} |w|_z \leq |w|_a.$$

Daraus erhalten wir $|w|_x = 0$, was ein Widerspruch ist.

Fall 4.2: $\mathrm{alph}(f_x(a)) = \{a, b\}$.

Sei $f_x(a) = b^iab^j$. Wir nehmen an, dass kein Zeuge f direkt aus f_x konstruierbar ist. Also gibt es ohne Einschränkung einen Faktor der Form $b^{i_1}xb^{i_2}ab^j$ mit $i_1 + i_2 = i$ in w. Betrachtet man einen beliebigen Faktor yz aus $\pi_{\Sigma\setminus\{x\}}(w)$ in $\delta_x(w)$, so hat dieser die Form $(b^iab^j)^*y(b^iab^j)^*z(b^iab^j)^*$.

Ohne Einschränkung kann man dann den Zeugen f_x so wählen, dass $y, z \in C_x$ ist. Wir betrachten nun $\delta_y(w)$ für ein $x \neq y \in \Sigma$. Nach obigen Betrachtungen in Fall 1 und Fall 3 müssen noch die Fälle $a \in E_y$ und $b \in M_y$, $b \in E_y$ und $a \in M_y$ oder $a \in M_y$ und $b \in M_y$ untersucht werden.

Gilt $b \in E_y$ und $a \in M_y$ so sind a und b äquivalent. Diese Situation wird noch in Lemma 5.7 untersucht und es wird in diesem Fall $w \in \mathrm{FW}$ bewiesen.

Sei $a \in E_y, b \in M_y$. Es folgt wieder $f_y(a) = b^i a b^j$ und wir können den Morphismus f mit $f(a) = b^i a b^j$, $f(b) = \varepsilon$ und $f(z) = z$ für alle $z \in \Sigma$ als Zeugen wählen.

Wir können somit annehmen, dass $a, b \in M_y$ gilt. Wir führen eine Fallunterscheidung für die Buchstaben x, y durch.

Fall 4.2(i): $x \in M_y$ oder $z \in M_y$.

Die Voraussetzungen von Lemma 4.3 sind in diesem Fall erfüllt. Es ergibt sich damit $w \in \mathrm{FW}$.

Fall 4.2(ii): $x \in C_y$.

Aufgrund der Existenz eines Faktors der Form $b^{i_1} x b^{i_2} a b^j$ in w, gibt es einen Faktor der Form $f_y(z) x f_y(z)$ in $\delta_y(w)$. Betrachten wir $\pi_{xz}(w)$, so sieht man damit, dass z weder Präfix noch Suffix sein kann. Wäre z beispielsweise ein Suffix von $\pi_{xz}(w)$, so gibt es i_1-viele Vorkommen von b's auf der rechten Seite zu viel, die zu keinem Kontext gehören. Dies kann wegen $\delta_a(w)$ nicht sein. Dann muss jedoch xz ein Präfix und zx ein Suffix von $\pi_{xz}(w)$ sein. Das erste bzw. letzte x haben dann aber links bzw. rechts kein z, das ihnen ihren Kontext liefert. Daraus würde $|f_a(x)| = |f_b(x)| = 1$ folgen, also würde x keinen Kontext besitzen. Ein Widerspruch zur Voraussetzung $x \in E_a$ bzw. $x \in E_b$.

Fall 4.2(iii): $z \in C_y$.

Der Kontext von x ist dann durch $f_y(x)$ festgelegt. Der Kontext von y ist auch festgelegt, da der linke bzw. rechte Teil des Kontextes von y ein Präfix bzw. Suffix von $(b^i a b^j)^{|f_b(z)|_a}$ der entsprechenden Länge ist. Analog ist der Kontext von z fest. Es lässt sich dann daraus ein Zeuge f konstruieren mit $a, b \in M_f$ und $x, y, z \in E_f$. Sei dazu α_i der linke und β_i der rechte Kontext von $i \in \{x, y, z\}$. Man setze dann $f(i) = \alpha_i i \beta_i$ und $f(a) = f(b) = \varepsilon$. Es ergibt sich $f(w) = w$ nach Konstruktion.

Fall 4.2(iv): $x, z \in E_y$.

Wir betrachten $\pi_{xz}(w)$. Für den Fall, dass $\pi_{xz}(w)$ mit demselben Buchstaben anfängt und aufhört, sieht man leicht, dass ab^j ein Suffix von $\pi_{ab}(f_y(x))$ und $b^i a$ ein Präfix von $\pi_{ab}(f_y(x))$ ist. Ist x Suffix und z Präfix (x Präfix und z Suffix geht analog), von $\pi_{xz}(w)$, so ist $b^i a$ ein Präfix von $\pi_{ab}(f_y(z))$ und ab^j ein Suffix von $\pi_{ab}(f_y(x))$. Ist ab^j kein Suffix von $\pi_{ab}(f_y(z))$, so darf $b^i a$ auch kein Präfix von $\pi_{ab}(f_y(x))$ sein und es gilt $\pi_\Sigma(w) \in \{zy^l x\}$ für ein festes $l \in \mathbb{N}$. Ein Zeuge f für w lässt sich leicht konstruieren. Wir nehmen daher an, dass ab^j ein Suffix von $\pi_{ab}(f_y(x))$ und $b^i a$ ein Präfix von $\pi_{ab}(f_y(x))$ ist. Also ist $b^{i_1} x b^{i_2} a b^j$ ein Faktor von $f_y(x)$.

Damit ist der Kontext von jedem x gleich. Wie oben in Fall 4.2(iii) lässt sich ein Zeuge f für w konstruieren mit $a, b \in M_f$ und $x, y, z \in E_f$. $\square$

Bemerkung 4.5. Der Beweis von Lemma 4.4 lässt sich für vier Buchstaben verallgemeinern. Es gilt dann $\Sigma = \{x, y\}$ und $\Sigma' = \{a, b\}$. Fall 1 aus Lemma 4.4 lässt sich analog beweisen. Die Fälle 2 und 4 lassen sich direkt mit Lemma 4.3 beweisen.

Man muss also nur den Fall 3 mit $a \in M_x$ und $b \in C_x$ untersuchen. Sei also $\delta_x(w) \in \{a^i y a^j, b\}^*$. Da jedes y in seinem Kontext mindestens ein b hat, ist ohne Einschränkungen $b^k a^i y$ ein Präfix von w und es gilt $\delta_x(w) \in \{b^k a^i y a^j, b\}^*$. D. h. der Kontext von x liegt innerhalb des a^j Blocks. Da jedes x in seinem Kontext mindestens ein b hat, gibt es nur ein x im Block. Es gilt somit $w \in \{b^k a^i y a^{l_y} a^{j_x} x a^{l_x} b^{k_x}\}^*$ und damit ist $w \in \mathrm{FW}$ ein Fixpunktwort.

4.2 Maximale Erzeugende mit $|\Sigma'| \geq 3$

Wir untersuchen nun Vermutung 4.1 mit $|\Sigma'| \geq 3$. Sei für diesen Abschnitt das Wort w so gewählt, dass w die Bedingungen aus Vermutung 4.1 erfüllt mit $|\Sigma'| \geq 3$. Wir setzen die Zeugen f_a auf $f_a(x) = \beta_{x,a} x \gamma_{x,a}$ und zeigen zunächst, dass die sterblichen Buchstaben zwischen zwei Erzeugenden aus Σ immer gleich auftauchen.

Lemma 4.6. *Sei xy ein Faktor in $\pi_\Sigma(w)$ und seien $x\alpha_1 y, \ldots, x\alpha_n y$ Faktoren in w mit $\alpha_i \in \Sigma'^*$. Dann sind alle α_i identisch, d. h. $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$.*

Beweis. Da $|\Sigma'| \geq 3$ ist, existieren paarweise verschiedene Buchstaben $a, b, c \in \Sigma'$. Betrachten wir $\delta_a(w)$, so gibt es einen Zeugen f_a. Es gilt $f_a(x) = \beta_{x,a} x \gamma_{x,a}$ für $x \in \Sigma$. Wir erhalten also $\delta_a(\alpha_i) = \gamma_{x,a}\beta_{y,a}$ für alle i. Die Vorraussetzungen aus Lemma 2.14 sind somit erfüllt und es gilt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$. $\square$

Im Gegensatz zum Fall $|\Sigma'| = 2$ sind hier die Faktoren fest. Das Problem ist nun, dass die Kontextlänge von Buchstaben aus Σ nicht bekannt ist. Wir werden im Folgenden die Kontextlänge bestimmen. Zunächst stellen wir die Relation der Buchstaben aus Σ in einem Graphen dar.

Definition 4.7. Wir definieren einen Graph $G_w = (V, E)$ mit $V = \Sigma \cup \tilde{\Sigma}$, wobei $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{x} \mid x \in \Sigma\}$ eine disjunkte Kopie ist, und $E = \{(x, \tilde{y}) \mid xy$ ist ein Faktor von $\pi_\Sigma(w)\}$. Außerdem definieren wir eine totale Quasiordnung $a \leq_x b$ für $a, b \in \Sigma', x \in \Sigma$ falls $\delta_b(\gamma_{x,a})$ ein Präfix von $\delta_a(\gamma_{x,b})$ ist. Analog definieren wir $a \ {}_x{\leq}\ b$ für die linke Seite mit Hilfe von $\beta_{x,a}$.

Wir können damit folgendes Lemma beweisen.

Lemma 4.8. *Sind $x, x' \in \Sigma \subset V$ in derselben Zusammenhangskomponente aus G_w, so folgt aus $a \leq_x b$ auch $a \leq_{x'} b$.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, dass es ein $y \in \Sigma$ gibt mit $(x, \tilde{y}), (x', \tilde{y}) \in E$. Sei $x\alpha y$ ein Faktor in w. Da $\delta_a(\alpha) = \gamma_{x,a}\beta_{y,a}$ und $\delta_b(\alpha) = \gamma_{x,b}\beta_{y,b}$ ist, impliziert $a \leq_x b$ in direkter Weise $a \;{}_y{\leq}\; b$. Analog impliziert dies dann $a \leq_{x'} b$. □

Auf gleiche Weise kann man Lemma 4.8 auch für $\tilde{y}, \tilde{y}' \in \tilde{V}$ und $a \;{}_y{\leq}\; b$ beweisen.

Im Fall $|\Sigma'| \geq 5$ geben wir nun einen konstruktiven Beweis an, dass $w \in \mathrm{FW}$ gilt. Wir zeigen dazu, dass es Wörter u_x, v_x gibt, so dass $\beta_{x,a} = \delta_a(u_x)$, $\gamma_{x,a} = \delta_a(v_x)$ und $\alpha = v_x u_y$ gelten, wobei $x\alpha y$ mit $\alpha \in \Sigma'^*$ der eindeutige Faktor zwischen x und y ist. Damit ergibt sich dann ein Zeuge f für w mit $f(x) = u_x x v_x$.

Proposition 4.9. *Vermutung 4.1 gilt für* $|\Sigma'| \geq 5$.

Beweis. Seien $a, b, c, d, e \in \Sigma'$ und sei $x \in \Sigma$. Betrachte ein $y \in \Sigma$ mit $(x, \tilde{y}) \in E$. Wir konstruieren nun v_x. Gibt es kein $y \in \Sigma$ mit $(x, \tilde{y}) \in E$, so liegt x am Rand von w und wir setzen v_x so, dass $v_x \in \Sigma'^*$ ist und xv_x ein Suffix von w ist. Sei also $x\alpha y$ mit $\alpha \in \Sigma'^*$ ein Faktor von w. Seien $\alpha_i \leq_p \alpha$ die maximalen Präfixe, so dass $\delta_i(\alpha_i) = \gamma_{x,i}$ gilt mit $i \in \{a, b, c, d, e\}$. Wir wählen die Buchstaben a, b, c, d, e ohne Einschränkung so, dass $\alpha_a \leq_p \alpha_b \leq_p \alpha_c \leq_p \alpha_d \leq_p \alpha_e$ ist. Wir zeigen nun, dass α_c unabhängig von y ist. Sei also $(x, \tilde{y}') \in E$ ein weiteres Paar. Konstruiere analog α'_i für y'. Es gilt nun aber $\delta_i(\alpha_c) = \delta_i(\alpha'_c)$ für $i \in \{c, d, e\}$. Nach Lemma 2.14 ist damit $\alpha_c = \alpha'_c$. Wir setzen $v_x = \alpha_c$. Symmetrisch lässt sich u_y berechnen, indem man minimale Suffixe wählt. Lemma 4.8 stellt sicher, dass diese Wahl innerhalb der Zusammenhangskomponente gültig ist. Für jede Zusammenhangskomponente Z kann man nun unabhängig u_x und v_x ausrechnen für $x \in Z$. Wir setzen damit $f(x) = u_x x v_x$ für $x \in \Sigma$ und $f(\eta) = \epsilon$ für $\eta \in \Sigma'$. Es gilt $f(w) = w$ nach Konstruktion und damit $w \in \mathrm{FW}$. □

Bemerkung 4.10. In Proposition 4.9 wurde nur die Information $\delta_a(w) \in \mathrm{FW}$ mit $a \in \Sigma'$ benutzt. Proposition 4.9 gilt also auch ohne die Voraussetzung $\delta_x(w) \in \mathrm{FW}$ für $x \in \Sigma$.

Dabei kann man auf die Voraussetzung $|\Sigma'| \geq 5$ ohne weiteres nicht verzichten. Die drei reduzierten Wörter $\delta_a(w)$, die für den Beweis von Lemma 2.14 vorausgesetzt werden mussten, sind bereits minimal. Diese werden jedoch in beide Richtungen, eimal für u_y und einmal für v_x, benötigt.

5 Beispiele

Um ein besseres Verständnis für die Menge der Wörter zu entwickeln, welche die Billaudsche Vermutung erfüllen, ist es hilfreich, Beispiele zu betrachten. Wir schränken zunächst die Menge der Beispiele auf primitive Wörter ein.

Definition 5.1. Sei w ein Wort. Das kleinste Wort u, für das es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $w = u^n$, nennen wir die primitive Wurzel von w. Stimmt w mit seiner primitiven Wurzel überein, so nennen wir w primitiv.

Lemma 5.2. *Sei w ein Wort. Genau dann ist w ein Fixpunktwort, wenn seine primitive Wurzel ein Fixpunktwort ist.*

Beweis. Sei $w = u^n$ und u die primitive Wurzel von w. Sei f ein Zeuge von w. Es gilt $u^n = w = f(w) = f(u^n) = f(u)^n$. Ein Vergleich der Längen liefert $f(u) = u$. Ein Zeuge von u ist auf Grund derselben Rechnung auch ein Zeuge von w und somit folgt die Aussage. □

Lemma 5.2 zeigt, dass man sich auf primitive Wörter beschränken kann.

5.1 Zwillinge

Wir lehnen uns an die Notation von [Hol2009] an. Wir betrachten ein Wort w. Sei r_a das größte gemeinsame Präfix aller Suffixe von w, die mit a starten. Sei l_a analog das größte gemeinsame Suffix aller Präfixe von w, die mit a enden. Sei $\mathrm{n}_a = \mathrm{l}_a a \mathrm{r}_a$ der maximale gemeinsame Kontext aller a in w. Wir nennen a einen Zwilling von b, falls $\mathrm{n}_a = \mathrm{n}_b$ gilt und schreiben dann $a||b$.

Wir betrachten zunächst ein Beispiel, um zu zeigen, wann Zwillinge auftreten können.

Beispiel 5.3. Wir betrachten das Wort $w = acdcdcbdcdcbdcdacdcd$. Das Wort w ist ein Fixpunktwort, wie die folgende Abbildung zeigt.

$$a\ c\ d\ c\ d \mid c\ b\ d\ c\ d \mid c\ b\ d\ c\ d \mid a\ c\ d\ c\ d$$

Wir untersuchen nun, ob w den Bedingungen der Billaudschen Vermutung genügt. Für $\delta_x(w)$ mit $x \in \{c, d\}$ kann man nahezu denselben Zeugen wie auch für w nehmen. Exemplarisch sieht dies für $\delta_c(w)$ folgendermaßen aus.

$$\delta_c(w) = a\, d\, d \mid b\, d\, d \mid b\, d\, d \mid a\, d\, d$$

Wir betrachten nun was passiert, falls wir einen der Erzeugenden a oder b löschen. In $\delta_b(w)$ erzeugt sich dann der Kontext von a und b selbst.

$$\delta_b(w) = a \mid c\, d \mid c\, d \mid c\, d \mid c\, d \mid c\, d \mid c\, d \mid a \mid c\, d \mid c\, d$$

Das Wort $\delta_a(w)$ ist allerdings kein Fixpunktwort. Der Kontext von a kann sich weder selbst erzeugen, noch von einem anderen Buchstaben aufgenommen werden. Um trotzdem sicher zu stellen, dass w die Billaudsche Vermutung erfüllt, kann man w so modifizieren, dass a einen Zwilling bekommt. Setze $w' = acdcdgcbdcdcbdcdacdcdg$. Es ist dann $a||g$ und in $\delta_a(w)$ kann g den Kontext von a aufnehmen und umgekehrt. Die Zeugen von $\delta_x(w)$ für $x \in \{b, c, d\}$ können übernommen werden, wenn man g in den Kontext von a aufnimmt.

Ein Beweis der Billaudschen Vermutung auf Wörter, die einen Zwilling haben, wäre nützlich. Leider reicht das Wissen aus Beispiel 5.3 nicht aus. Anhand des nächsten Beispiels sehen wir, dass die lokale Information eines Zwillings $a||b$ zusammen mit geeigneten Zeugen f_a, f_b für $\delta_a(w)$ und $\delta_b(w)$ nicht ausreicht.

Beispiel 5.4. Aus $\delta_a(w), \delta_b(w) \in \mathrm{FW}$, $a||b$ und aus der Existenz von Zeugen f_a, f_b mit $\mathrm{alph}(\mathrm{l}_a\mathrm{r}_a) \subseteq M_a \cap M_b$ folgt nicht $w \in \mathrm{FW}$. Betrachte dazu das Wort

$$w = x\, a\, c\, d\, c\, b\, c\, z\, x\, c\, z\, x\, c\, z\, x\, a\, c\, d\, c\, b\, c\, z$$

Es gilt dort $\mathrm{alph}(\mathrm{l}_a\mathrm{r}_a) = M_a = M_b = \{c, d\}$. Das Wort w ist kein Fixpunktwort, da weder x noch z das c aus einem Faktor xcz aufnehmen können. In $\delta_a(w)$ ist dies jedoch möglich, da a die anderen x von einem c getrennt hat.

$$\delta_a(w) = x\, c \mid d\, c\, b\, c\, z \mid x\, c \mid z \mid x\, c \mid z \mid x\, c \mid d\, c\, b\, c \mid z$$

Analog sieht man, dass $\delta_b(w)$ ein Fixpunktwort ist.

Man sieht also, dass die Situation mit Zwillingen nicht offensichtlich ist. Einfacher ist dies mit Drillingen.

Lemma 5.5. *Sei $a||b||c$ und $a\beta b\gamma c$ ein Faktor von $\mathrm{n_a}$. Sei außerdem $\mathrm{alph}(\beta\gamma) \subseteq M_b$ für einen geeigneten Zeugen f_b. Dann ist $w \in \mathrm{FW}$.*

Beweis. Betrachte ein Vorkommen eines Faktors $a\beta\gamma c$ in $\delta_b(w)$. Dann ist dies entweder ein Faktor von $f_b(x)f_b(y)$ oder ein Faktor von $f_b(x)$ für $x, y \in \text{alph}(w)$. Im ersten Fall sei ohne Einschränkungen $a\beta$ ein Faktor von $f_b(x)$. In beiden Fällen setzen wir $f(x)$ auf $f_b(x)$, wobei der Faktor $a\beta$ auf $a\beta b$ ergänzt wird. Die restlichen Werte von f ergeben sich direkt aus f_b. Wir setzen $f(z) = f_b(z)$ für $z \neq x, b$ und $f(b) = \varepsilon$. Es gilt nach Konstruktion $f(w) = w$ und $f \neq \text{id}$. □

Wir definieren noch einen Spezialfall von Zwillingen. Für diese Art von Zwillingen lässt sich leicht beweisen, dass sie nur in Fixpunktwörtern auftreten.

Definition 5.6. Sei w ein Wort und $a, b \in \text{alph}(w)$. Wir nennen a und b äquivalent, falls $a||b$ und ab ein Faktor von $\mathrm{n_a}$ ist.

Lemma 5.7. *Sei w ein Wort, in dem a und b äquivalent sind. Dann ist $w \in \text{FW}$.*

Beweis. Wähle $f : \text{alph}(w)^* \to \text{alph}(w)^*$ mit $f(a) = ab$, $f(b) = \varepsilon$ und $f(x) = x$ für alle $x \in \text{alph}(w) \setminus \{a, b\}$. Der Morphismus f ist dann ein Zeuge von w. □

5.2 Kontextverschiebung und -erweiterung

In Beispiel 5.3 wurde bereits beobachtet, dass der Kontext eines Erzeugenden x in $\delta_x(w)$ sich selbst erzeugt oder aufgenommen werden muss. Daraus ergeben sich Effekte auf die Weise, dass andere Buchstaben ihren Kontext erweitern oder verschieben. Wir betrachten dieses Phänomen in einem Beispiel.

Beispiel 5.8. Betrachte das folgende Fixpunktwort w wobei $\alpha = a\beta$ ist. Seien α und β so gewählt, dass $d, e, f \notin \text{alph}(\alpha)$ gilt und es einen Buchstaben $b \neq a$ gibt mit $|\alpha|_b = 1$. Eine mögliche Wahl von α wäre $\alpha = aabca$.

$$w = f\,\alpha \mid \alpha\,\alpha\,a\,d\,\beta\,\alpha \mid f\,\alpha \mid e\,\alpha\,\alpha \mid f\,\alpha \mid e\,\alpha\,\alpha \mid f\,\alpha \mid \alpha\,\alpha\,a\,d\,\beta\,\alpha$$

Ein Zeuge für $\delta_x(w)$ mit $x \in \text{alph}(\alpha)$ ergibt sich durch Anwenden von δ_x auf die Bilder des Zeugens von w. Für $\delta_d(w)$ ergibt sich ein Zeuge durch $f \mapsto f, e \mapsto e, b \mapsto \alpha$ und $x \mapsto \varepsilon$ für $x \in \text{alph}(w) \setminus \{b, e, f\}$. Die Kontexte erzeugen sich also dort selbst. In $\delta_e(w)$ tritt eine Kontexterweiterung von f auf. Betrachte dazu die folgende Faktorisierung von $\delta_e(w)$.

$$\delta_e(w) = f\,\alpha\,\alpha\,\alpha \mid a\,d\,\beta\,\alpha \mid f\,\alpha\,\alpha\,\alpha \mid f\,\alpha\,\alpha\,\alpha \mid f\,\alpha\,\alpha\,\alpha \mid a\,d\,\beta\,\alpha$$

Wir betrachten nun noch ein Beispiel, in dem ein Buchstabe seinen Kontext nicht erweitert, sondern verschiebt.

Beispiel 5.9. Wir betrachten das folgende Wort w.

$$w = d\,d\,e\,a \mid b \mid d\,d\,e\,c \mid d\,d\,e\,c \mid d\,d\,e\,a \mid d\,d\,e\,a \mid b \mid d\,d\,e\,a$$

Es erfüllt die Bedingungen der Billaudschen Vermutung 2.12 und insbesondere die Bedingungen der abgeschwächten Vermutung 4.1. Wähle dazu $\Sigma = \{a, b, c\}$. Der Kontext von c ist hierbei d^2ec. In $\delta_a(w)$ kann sich dieser Kontext jedoch verschieben, wie man an folgender Faktorisierung erkennt. Gleichzeitig erweitert b seinen Kontext.

$$\delta_a(w) = d\,d\,e\,b\,d\,d\,e \mid c\,d\,d\,e \mid c\,d\,d\,e \mid d\,d\,e\,b\,d\,d\,e$$

In diesem Beispiel ist diese Verschiebung jedoch nicht nötig. Alternativ könnte man die Abbildung $e \mapsto d^2e$ und $x \mapsto x$ für $x \notin \{d, e\}$ als Zeugen wählen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Billaudsche Vermutung thematisiert und weitere Ergebnisse zur Vermutung gefunden. Es wurden Resultate auf beschränkter Alphabetgröße erzielt. Zudem wurde eine neue, abgeschwächte Vermutung eingeführt und teilweise bewiesen. Es ist unklar, inwieweit die Vermutung 4.1 die Billaudsche Vermutung abdeckt. Dem Autor ist bislang kein Beispiel bekannt, das die Voraussetzungen der Billaudsche Vermutung erfüllt, aber keine Zeugen besitzt, welche den Voraussetzungen von Vermutung 4.1 genügen.

Bisher wurde noch kein Ansatz gefunden, die Billaudsche Vermutung in ein anderes Problem einzubetten. Das resultiert in langen, elementaren Beweisen. Es könnte hilfreich sein, wenn sich Verbindungen zur Graphentheorie oder anderen Resultaten aus der Kombinatorik auf Wörtern finden lassen.

Eine Verallgemeinerung der Vermutung auf unendliche Wörter wurde bislang nicht untersucht. Ergebnisse darüber könnten nützlich sein für die Vermutung auf endlichen Wörtern.

Danksagung

Mit der Erstellung der Diplomarbeit endet ein Lebensabschnitt für mich. Ich möchte allen danken, die mich bei meinem Studium und insbesondere bei der Erstellung meiner Diplomarbeit unterstützt haben.

Ich danke allen Mitarbeitern des Instituts für Formale Methoden der Informatik, die meine Denkweise durch ihre Veranstaltungen geprägt haben. Insbesondere möchte ich meinem Betreuer Priv.-Doz. Dirk Nowotka danken, er konnte mich motivieren und half mit seinen Hinweisen.

Meine Eltern Thomas und Susanne haben mir das Studium erst ermöglicht. Für die finanzielle, aber besonders für die moralische Unterstützung bin ich ihnen dankbar.

Christoph Grüninger möchte ich für die Stunden danken, die er geopfert hat, um meine Arbeit Korrektur zu lesen. Auch Domenica Gusso danke ich für das Korrektur lesen, aber besonders möchte ich mich für die moralische Unterstützung und die Tage, die wir miteinander verbracht haben, bedanken.

Michel Billaud danke ich für die freundliche E-Mail, die er auf meine Anfrage schrieb. Bei Gwénaël Richomme möchte ich mich für das Weiterleiten von [Ges1993] bedanken.

Literaturverzeichnis

[Bil1993] Billaud, M., *A problem with words*, Beitrag in der Newsgroup comp.theory (1993)

[Bil2011] Billaud, M., Private Kommunikation (2011)

[BK2003] Berstel, J.; Karhumäki, J.: *Combinatorics on words—a tutorial.* Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS 79, 178–228 (2003)

[Fil1989] Filé, G.: *The Relation of Two Patterns With Comparable Languages Patterns.* ITA 23.1, 45–57 (1989)

[Ges1993] Geser, A., Private Kommunikation mit M. Billaud (1993)

[Hea1981] Head, T.: *Fixed languages and the adult languages of 0L schemes.* International Journal of Computer Mathematics 10.2, 103–107 (1981)

[Hol2009] Holub, Š.: *Polynomial-time algorithm for fixed points of nontrivial morphisms.* Discrete Math. 309.16, 5069–5076 (2009)

[HS1999] Hamm, D.; Shallit, J., *Characterization of finite and one-sided infinite fixed points of morphisms on free monoids*, Technischer Bericht, University of Waterloo, (Juli 1999)

[HU2000] Hopcroft, J.; Ullman, J.: *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, Second Edition.* Addison-Wesley (2000)

[Lot1983] Lothaire, M., *Encylopedia of Mathematics and Its Applications*, vol. 17, Kapitel Combinatorics on Words, pp. xix+238, Addison-Wesley (1983)

[LR2005] Levé, F.; Richomme, G.: *On a conjecture about finite fixed points of morphisms.* Theor. Comput. Sci. 339.1, 103–128 (2005)

[RS2009] Reidenbach, D.; Schneider, J.: *Morphically primitive words.* Theor. Comput. Sci. 410.21-23, 2148–2161 (2009)

[Thu1906] Thue, A.: *Über unendliche Zeichenreichen.* Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl. 7, 1–22 (1906)

[Zim1993] Zimmermann, P., Private Kommunikation mit M. Billaud (1993), zitiert nach [LR2005]

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen benutzt zu haben.

(Tobias Walter)