Institut für Formale Methoden der Informatik
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D–70569 Stuttgart

Diplomarbeit Nr. 3182

Untersuchung von Eindeutigen Büchi Automaten

Hermann Pflüger

Studiengang:	Informatik
Prüfer:	Prof. Dr. V. Diekert
Betreuer:	Dr. M. Kufleitner
begonnen am:	29.04.2011
beendet am:	29.10.2011
CR-Klassifikation:	F.4.1, F.4.3

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Anfang der sechziger Jahre führte Büchi in [B62] Automaten für unendliche Wörter ein, um Beweise bei Entscheidungsproblemen in der monadischen Prädikatenlogik zweiter Stufe zu führen. Seitdem wurden Automaten für unendliche Wörter oft für verschiedene Beweise bei Entscheidungsproblemen verwendet. Die Büchi Automaten können Sprachen von unendlichen Wörtern beschreiben. Sie sind heutzutage eines der wichtigsten Hilfsmittel in der formalen Verifikation.

Praktische Bedeutung bekamen Büchi Automaten für die Entwicklung effizienter Algorithmen im Bereich der temporalen Logik. Dort wurden sie Bestandteil von Model Checking Verfahren [W00]. Die Komplementbildung ist hier von zentraler Bedeutung, denn die verwendeten logischen Formeln beinhalten den Negationsoperator. Büchi Automaten sind im allgemeinen nichtdeterministisch und die Komplementbildung ist daher mit exponentiellem Aufwand verbunden. Muller Automaten verwenden eine andere Akzeptanzbedingung und können deterministisch die ω-regulären Sprachen erkennen. Zudem ist die Komplementbildung einfach und in linearer Zeit möglich. Allerdings kann die Größe von Muller Automaten exponentiell größer sein, als die eines Büchi Automaten der die gleiche Sprache erkennt.

Weitere Verfahren wurden entwickelt, wie z.B Rabin Automaten, Street Automaten oder Parity Automaten, die wie Muller Automaten, eine einfache Komplementbildung ermöglichen und den Nachteil haben, dass die Automaten exponentiell größer sein können, als die eines entsprechenden Büchi Automaten.

Eindeutige Büchi Automaten erkennen zwar auch die ω-regulären Sprachen, bieten jedoch keine wesentlichen Vorteile. Stark eindeutige Büchi Automaten, wie sie z.B in [CM02] vorgestellt werden, haben allerdigs vergleichbare Eigenschaften wie die vorher genannten. Welche der verschiedenen Automaten besser geeignet ist hängt von der konkreten Anwendung ab. So gibt es Probleme, die mit einem Muller Automaten nur mit exponentiellem Aufwand, mit einem stark eindeutigen Büchi Automaten dagegen in linearer Zeit zu lösen sind, und Probleme die andersrum gelagert sind.

Carton und Michel beweisen in [CM02], dass mit stark eindeutigen Büchi Automaten genau die ω-regulären Sprachen erkannt werden, und zeigen dabei, wie bei gegebener starken Erkennung ein Transitionsautomat konstruiert werden kann, und beweisen, dass aus diesem Transitionsautomat ein stark eindeutiger Büchi Automat konstruiert werden kann. Die Größe des Transitionsautomat ist dabei maximal $n^2 2^n$, wobei n die Größe der Bildmenge des erkennenden Homomorphismus ist.

In dieser Arbeit wird ein ähnliches Verfahren vorgestellt, dass bei gegebener starken Erkennung einer ω-regulären Sprache, direkt einen stark eindeutigen Büchi Automat konstruiert, der die Sprache erkennt. Die Größe des stark eindeutigen Büchi Automaten ist dann maximal $n^2 2^{|R|}$, wobei n die Größe der Bildmenge S des erkennenden Homomorphismus, und R die Menge der R-Klassen von S ist.

Weiterhin wird ein Büchi Automat vorgestellt, der zwar nicht eindeutig nach der entsprechenden Definition ist, jedoch ähnlich Eigenschaften wie ein stark eindeutiger Büchi Automat zeigt. Für diesen stark k-eindeutige Büchi Automat kann auch mit linearem Aufwand das Komplement gebildet werden. Auch die Schnittbildung und Vereinigung zweier Automaten ist wie beim stark eindeutigen Büchi Automaten mit polynominellem Aufwand lösbar. In dieser Arbeit wird ein Verfahren gezeigt, mit dem man bei gegebener starken Erkennung einer ω-regulären Sprache, einen „stark k-eindeutige Büchi Automat“ konstruieren kann, wobeit, die Größe des stark eindeutigen Büchi Automaten nur polynominell größer ist als die Größe der Bildmenge des erkennenden Homomorphismus.

Außerdem wird in dieser Arbeit für eine spezielle Sprachklasse die Konstruktion eines deterministischen, stark eindeutigen Büchi Automaten gezeigt, und Konstruktionen für Schnittbildung und Vereinigung von stark eindeutigen uns stark k-eindeutigen Büchi Automaten.

2 Grundlagen

2.1 ω-reguläre Sprachen

Es sei

A:	ein endliches Alphabet
Wort:	eine endliche Konkatenation von Elementen aus A
ω-Wort:	eine abzählbar unendliche Konkatenation von Elementen aus $A \backslash \{1\}$
	(Nur Wort, falls die unendliche Länge durch den Kontext gegeben ist)
A^+:	die Menge der nichtleeren Wörter
A^*:	die Menge der Wörter inklusive dem leeren Wort
A^ω:	die Menge der ω-Wörter. $L \subseteq A^\omega$ ist eine ω-Sprache

Die Menge der ω-*regulären Sprachen* wird über folgende Regeln definiert:

Sei $U \subseteq A^+$ und $L_1, L_2 \subseteq A^\omega$, dann gilt:
- U^ω ist ω-regulär
- $U \cdot L_1$ ist ω-regulär ($U \cdot L_1 := \{ul \mid u \in U, l \in L_1\}$
- $L_1 \cup L_2$ ist ω-regulär

Satz 1 *Eine Sprache ist genau dann* ω*-regulär, wenn sie eine Vereinigung von Mengen der Form* XY^ω *ist, wobei* X *eine reguläre Teilmenge von* A^* *und* Y *eine reguläre Teilmenge von* A^+ *ist.*

Beweis z.B. in [PP04] □

2.2 Ramsey Faktorisierung

Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S und ein Homomorphismus h mit $h: A^+ \to S$

Sei $w \in A^\omega$, mit $w = a_0 a_1 a_2 \cdots$ und $a_i \in A$. Eine Faktorisierung von w ist eine Sequenz von Wörtern $u_i \in A^+$, so dass $w = u_0 u_1 u_2 \cdots$. Eine Ramsey-Faktorisierung ist eine Faktorisierung $w = u_0 u_1 u_2 \cdots$, mit $h(u_i) = e$ für $i \geq 1$ und $e \in E(S)$ (idempotentes Element).

Satz 2 *Gegeben sei ein endliches Alphabet* A*, eine endliche Halbgruppe* S *und ein Homomorphismus* h *von* A^+ *auf* S*. Dann existiert für jedes Wort* $w \in A^\omega$ *eine Ramsey-Faktorisierung.*

Beweis z.B. in [PP04] □

2.3 Linked Pairs

Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S und ein Homomorphismus h mit $h: A^+ \to S$

Ein Tupel (s,e) heißt Linked Pair, wenn $e \in E(S)$ und $s \cdot e = s$ gilt. Jede Ramsey-Faktorisierung $(u_i)_{i \geq 0}$, eines Wortes $w \in A^\omega$ induziert ein Linked Pair (s,e) über $s = h(u_0 \cdot u_1)$ und $e = h(u_1)$. Ein Linked Pair, das durch eine Ramsey-Faktorisierung eines Wortes induziert wird, heißt assoziiert zu diesem Wort.

Lemma 3 *Auf der Menge der Linked Pairs ist eine Linksoperation definiert:* $r \cdot (s,e) := (rs,e)$*, dabei ist* $r \in S$ *und* (s,e) *ein Linked Pair*

- *Die Linksoperation ist eindeutig*
- *Sei* $u \in A^+$, $r = h(u)$, $w \in A^\omega$ *und* (s,e) *ein Linked Pair, das zu* w *assoziiert ist. Dann gilt:* (rs,e) *ist assoziiert zu* uw*.*

Beweis z.B. in [PP04] □

Ein Wort kann mehrere Ramsey-Faktorisierungen haben. Die dabei induzierten Linked Pairs nennt man zueinander konjugiert. Zwei Linked Pairs (s,e) und (s',e'), die zu einem gemeinsamen Wort assoziiert sind, sind daher zueinander konjugiert, hier beschrieben mit $(s,e) \sim (s',e')$. Die Konjugationsklasse eines Linked Pair (s,e) wird hier mit $[s,e]$ beschrieben.

Lemma 4 *Es gilt:*

- *Die Konjugation von Linked Pairs ist eine Äquivalenzrelation.*
- *Seien (s,e) und (s',e') zwei Linked Pairs. Dann gilt:*
  $(\exists g,h \in S \text{ mit } e = gh,\ e' = hg,\ s = s'h \text{ und } s' = sg) \quad \Leftrightarrow \quad (s,e) \sim (s',e')$
- *Die zuvor definierte Linksoperation kann auf die Menge der Konjugationsklassen erweitert werden, $r[s,e] := [rs,e]$, und ist eindeutig.*

Beweis z.B. in [PP04] □

Ein Linked Pair kann mit mehreren Wörtern assoziiert sein. Die Menge $h^{-1}(s) \cdot (h^{-1}(e))^{\omega}$ beinhaltet alle Wörter die mit dem Linked Pair (s,e) assoziiert sind.

2.4 Algebraische Erkennung

ω-reguläre Sprachen können durch Homomorphismen $h : A^{+} \to S$ algebraisch erkannt werden, wobei A ein endliches Alphabet und S eine endliche Halbgruppe ist. Man unterscheidet dabei zwischen schwacher Erkennung und starker Erkennung.

2.4.1 Schwache Erkennung

Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S, ein Homomorphismus $h : A^{+} \to S$ und daraus folgend die Menge der Linked Pairs $S_p = \{(s,e) \mid s \in S,\ e \in E(S),\ se = s\}$.

Eine Sprache $L \subseteq A^{\omega}$ wird von h schwach erkannt, wenn es eine Menge $P \subseteq S_p$ gibt, für die gilt:

$$L = \bigcup_{(s,e)\in P} h^{-1}(s) \cdot (h^{-1}(e))^{\omega}$$

2.4.2 Starke Erkennung

Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S, ein Homomorphismus $h : A^{+} \to S$ und daraus folgend die Menge der Linked Pairs S_p.

Die Konjugationsrelation der Linked Pairs ist eine Äquivalenzrelation (siehe [PP04]). Es können also disjunkte Äquivalentklassen gebildet werden, und man erhält die Menge $\tilde{S}_p = S_p/\sim$ der Äquivalenzklassen. Die Linked Pairs, die zu einem Wort $w \in A^{\omega}$ assoziiert sind, liegen alle in einer einzigen Äquivalenzklasse. Dadurch ergibt sich kanonisch die Abbildung $\tilde{h} : A^{\omega} \to \tilde{S}_p$.

Eine Sprache $L \subseteq A^{\omega}$ wird von h stark erkannt, wenn es eine Menge $P \subseteq \tilde{S}_p$ gibt, für die gilt: $L = \tilde{h}^{-1}(P)$

2.5 Büchi Automat

2.5.1 Büchi Akzeptanzbedingung

Gegeben sei ein Automat $\mathcal{A} = (Q,\ A,\ \Delta,\ I,\ F)$

Q = endliche Menge der Zustände
A = endliches Alphabet
Δ = Übergangsrelation, $\Delta \subseteq Q \times A \times Q$, Menge der möglichen Transitionen
I = Menge der Anfangszustände, $I \subseteq Q$
F = Menge der Endzustände, $F \subseteq Q$

Ein Pfad γ in $\mathcal{A}$ ist eine Sequenz aufeinanderfolgenden Transitionen:

$\gamma = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \quad \cdots \quad q_{n-1} \xrightarrow{a_2} q_n$
$a_i \in A,\ q_i \in Q,\ (q_{i-1},\ a_i,\ q_i) \in \Delta$

Der Pfad γ kennzeichnet das Wort $w = a_1 a_2\ \cdots\ a_n$, $w \in A^*$. Die Zustände $q_0,\ q_1\ \cdots\ q_n$ werden dabei der Reihe nach erreicht.

Der Automat akzeptiert ein Wort w, wenn es für w einen Pfad in $\mathcal{A}$ gibt, so dass $q_0 \in I$ und $q_n \in F$ ist. Die Menge der akzeptierten Wörter bilden die Sprache, die der Automat $\mathcal{A}$ erkennt.

Unendliche Wörter erzeugen unendliche Pfade, obige Akzeptanzbedingung kann dann nicht mehr verwendet werden. Bei unendlichen Wörtern wird daher die Büchi Akzeptanzbedingung verwendet. Ein unendliches Wort w gilt dabei als akzeptiert, wenn es für w ein Pfad in $\mathcal{A}$ gibt, so dass $q_0 \in I$ und die Anzahl von Zuständen $q_i \in F$ unendlich ist. Ein endlicher Automat mit Büchi Akzeptanzbedingung nennt man Büchi Automat, einen Pfad mit unendlich vielen Zuständen in F gültig.

2.5.2 Definitionen

Nachfolgende Definitionen gelten für einen Büchi Automaten $\mathcal{A} = (Q,\ A,\ \Delta,\ I,\ F)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird hier und in den folgenden Kapiteln davon ausgegangen, dass Büchi Automaten getrimmt sind. Das bedeutet hier, dass in einem Büchi Automaten jeder Zustand der Beginn mindestens eines gültigen Pfades ist (siehe [PP04]).

- Deterministische Übergangsrelation: Die Übergangsrelation eines Automaten ist deterministisch, wenn der Endzustand jeder Transition in Δ, eindeutig durch den Anfangszustand und den Eingabebuchstaben bestimmt ist.
$(q,\ a,\ p),\ (q,\ a,\ p') \in \Delta \quad \Rightarrow \quad p = p'$

- Co-deterministische Übergangsrelation: Die Übergangsrelation eines Automaten ist co-deterministisch, wenn der Anfangszustand jeder Transition in Δ, eindeutig durch den Endzustand und den Eingabebuchstaben bestimmt ist.
$(q,\ a,\ p),\ (q',\ a,\ p) \in \Delta \quad \Rightarrow \quad q = q'$

- Deterministischer Büchi Automat: Ein Büchi Automat heißt deterministisch, wenn seine Übergangsrelation deterministisch ist, und er nur einen Anfangszustand besitzt.

- Co-deterministischer Büchi Automat: Ein Büchi Automat heißt co-deterministisch, wenn seine Übergangsrelation co-deterministisch ist, und für jedes Wort höchstens ein gültiger Lauf existiert.

- Nichtdeterministischer Büchi Automat: Ein Büchi Automat, der nicht als deterministisch oder codeterministisch gekennzeichnet ist, wird als ein nichtdeterministischer Büchi Automat betrachtet, es sei denn, es geht aus dem Kontext etwas anderes hervor.

- Vollständige Übergangsrelation: Die Übergangsrelation eines Automaten ist vollständig, wenn für jeden Zustand und jeden Buchstabe ein Nachfolgezustand bzw. eine entsprechende Transition in Δ existiert.

- Co-vollständige Übergangsrelation: Die Übergangsrelation eines Automaten ist co-vollständig, wenn für jeden Zustand und jeden Buchstabe ein Vorgängerzustand bzw. eine entsprechende Transition in Δ existiert.

- Vollständiger Büchi Automat: Jedes ω-Wort hat mindestens einen Pfad in $\mathcal{A}$, der mit einem Zustand aus I beginnt. Ein Büchi Automat mit vollständiger Übergangsrelation ist immer ein vollständiger Büchi Automat.
- Co-vollständiger Büchi Automat: Jedes ω-Wort hat mindestens einen gültigen Pfad in $\mathcal{A}$.

2.5.3 Muller Automat

Ein Muller Automat unterscheidet sich von einem Büchi Automaten durch ein anderes Akzeptanzverhalten. Statt einer Menge Endzustände wird eine Menge von Teilmengen der Zustandsmenge (Tabelle des Automaten) definiert. Muller Automaten sind deterministisch. Gegeben ist dann:

$\mathcal{A} = (Q,\ A,\ \Delta,\ q_0,\ \mathcal{T})$

Q = endliche Menge der Zustände
A = endliches Alphabet
Δ = Übergangsrelation, $\Delta \subseteq Q \times A \times Q$
q_0 = Anfangszustand, $q_0 \in Q$
$\mathcal{T}$ = Tabelle des Automaten, $\mathcal{T} \subseteq 2^Q$

Muller Automaten akzeptieren ein Wort $w \in A^\omega$, wenn es für w einen Pfad γ in A gibt, der im Zustand q_0 beginnt und für den $inf(\gamma) \in \mathcal{T}$ gilt. Die Menge $inf(\gamma)$ beinhaltet die Zustände, die auf dem Pfad γ unendlich oft vorkommen.

Muller Automaten können auch als nichtdeterministische Automaten definiert werden. Diese werden hier nicht behandelt.

2.5.4 Eigenschaften

Satz 5 *Büchi Automaten sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt und Komplementbildung. Die Abgeschlossenheit unter Komplementbildung gilt nicht für deterministische Büchi Automaten.*

Beweis z.B. in [PP04] □

Die Größe n eines Büchi Automaten, wird über $n = max(|Q|, |\Delta|)$ definiert. n_1 bzw. n_2 ist im Folgenden die Größe zweier Büchi Automaten. Zeitkomplexität einiger Algorithmen für Büchi Automaten:

Vereinigung: $O(n_1 + n_2)$
Schnitt: $O(n_1 n_2)$
Komplement: $O(n^{O(n)})$
Leerheitsproblem: $O(n)$
Inklusionsproblem: $O(n^{O(n)})$
Äquivalenzproblem: $O(n^{O(n)})$
(siehe z.B [PP04])

Nachteile von Büchi Automaten sind folglich, dass sie nichtdeterministisch sind, und dass die Komplexität bei der Komplementbildung, und damit auch die des Inklusions- und Äquivalenzproblems, exponentiell zur Automatengröße ist.

Die von einem Muller Automaten erkennbaren ω-Sprachen, sind genau die von einem Büchi Automaten erkennbaren Sprachen. Die Komplementbildung ist beim Muller Automat einfach. Der Automat $\mathcal{A}' = (Q,\ A,\ \Delta,\ q_0,\ 2^Q \setminus \mathcal{T})$ erkennt die zur Sprache des Automaten $\mathcal{A}$ komplementäre Sprache. Damit ist die Zeitkomplexität für Komplementbildung linear, und für das Inklusionsproblem und das Äquivalenzproblem polynominell. Allerdings muss für die Größe n eines Muller Automaten $n = max\ (|Q|,\ |E|,\ min(|\mathcal{T}|,\ |2^Q \setminus \mathcal{T}|))$ verwendet werden. Ein Muller Automat ist damit im worst case exponentiell größer als der entsprechende Büchi Automat. (siehe z.B [PP04])

2.6 erkennbare ω-Sprachen

Satz 6 *Sei $L \subseteq A^\omega$ eine ω-Sprache. Folgende Aussagen sind dann äquivalent:*

Beweise für die folgenden Punkte siehe z.B. [PP04]

- L ist eine erkennbare ω-Sprache
- L ist eine ω-reguläre Sprache
- L wird schwach erkannt
- L wird stark erkannt
- L wird von einem Büchi Automaten erkannt
- L wird von einem Muller Automaten erkannt

Für die folgenden Punkte siehe Kapitel 3.7

- L wird von einem eindeutigen Büchi Automaten erkannt
- L wird von einem stark eindeutigen Büchi Automaten erkannt
- L wird von einem stark k-eindeutigen Büchi Automaten erkannt

3 Eindeutige Büchi-Automaten

3.1 Definition

$\mathcal{A} = (Q, A, \Delta, I, F)$ sei ein Büchi Automat, und $L_{\mathcal{A}}$ die Sprache, die $\mathcal{A}$ erkennt:

$\mathcal{A}$ heißt eindeutig, wenn für jedes unendliche Wort höchstens ein akzeptierender Pfad in $\mathcal{A}$ existiert. D.h. Der Büchi Automat A heißt eindeutig, wenn für jedes Wort aus $L_{\mathcal{A}}$, es genau einen akzeptierenden Pfad gibt.

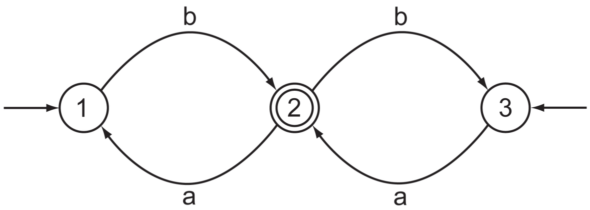
3.2 Stark eindeutige Büchi-Automaten

Der Büchi Automat $\mathcal{A} = (Q, A, \Delta, I, F)$ heißt *stark eindeutig*, wenn für jedes Wort $w \in A^{\omega}$ genau ein gültiger Pfad existiert. Dann ist ein Wort genau dann in der Sprache $L_{\mathcal{A}}$, wenn dieser Pfad in einem Zustand aus I beginnt.

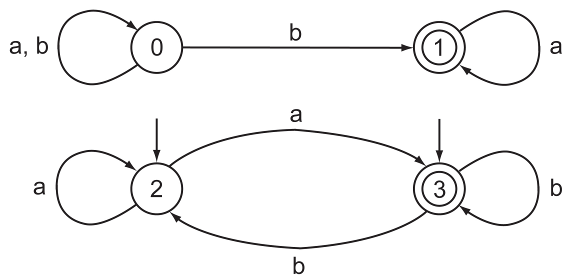
Die Eigenschaft stark eindeutig kann auch über die Eigenschaften co-deterministisch und co-vollständig definiert werden. Die zwei folgenden Beispiele sollen diese Eigenschaften veranschaulichen.

Beispiel 1: Der Büchi Automat in Abbildung 1a ist zwar eindeutig, aber er ist weder deterministisch noch co-deterministisch. Er ist nicht deterministisch, weil er zwei Anfangszustände hat, und er ist nicht co-deterministisch, weil für Wort $(ab)^{\omega}$ zwei gültige Pfade im Automaten existieren. Der eine startet im Zustand 2, der andere in Zustand 3.

Beispiel 2: Der Büchi Automat in Abbildung 1b erkennt die Sprache $(A^*b)^{\omega}$, also Wörter, die unendlich viele b beinhalten. Er ist co-vollständig und co-deterministisch und damit mit nachfolgendem Lemma stark eindeutig. Die Zustände 0 und 1, die von keinem Anfangszustand erreicht werden können, werden benötigt, damit auch Wörter der Sprachen A^*ba^{ω} und a^{ω}, jeweils einen gültigen Pfad im Automaten haben.



(a) Bsp. 1



(b) Bsp. 2

Abbildung 1: Eindeutige Büchi Automaten

Lemma 7 *Für Büchi Automaten $\mathcal{A}$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:*

- $\mathcal{A}$ ist stark eindeutig
- $\mathcal{A}$ ist co-vollständig und co-deterministisch
- $\mathcal{A}$ ist co-vollständig und alle gültige Pfade eines ω-Wortes, haben denselben Anfangszustand

Beweis: Aus den Definitionen für co-vollständig und co-deterministisch folgt direkt:

- $\mathcal{A}$ ist co-vollständig und co-deterministisch $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ ist stark eindeutig
- $\mathcal{A}$ ist stark eindeutig $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ ist co-vollständig und für jedes ω-Wort existiert höchstens ein akzeptierter Pfad

Da $\mathcal{A}$ getrimmt ist (siehe Kapitel 2.5.2), existiert für jeden Zustand $q \in Q$ ein gültiger Pfad, mit q als Anfangszustand. Wenn $\mathcal{A}$ stark eindeutig ist existiert dann für jeden Zustand $q \in Q$ ein Wort $w \in A^\omega$ mit genau einem Pfad in $\mathcal{A}$, der in diesem Zustand q beginnt. Dann hat das Wort aw für $a \in A$ auch genau einen Pfad in $\mathcal{A}$, der in einem Vorgängerzustand von q beginnt. Daraus folgt, dass für jeden Zustand und jeden Buchstabe aus A, der Vorgängerzustand eindeutig ist, die Übergangsrelation von $\mathcal{A}$ also co-deterministisch ist. Damit gilt:

- $\mathcal{A}$ ist co-vollständig und co-deterministisch $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathcal{A}$ ist stark eindeutig

Aus der Definition für co-deterministisch folgt direkt: In einem co-vollstänigen und co-deterministischen Büchi Automat hat jeder gültige Pfad eines ω-Wortes genau einen Anfangszustand.

Es gilt aber auch: Ein co-vollständiger Büchi Automat, bei dem jeder gültige Pfad eines ω-Wortes ein eindeutiger Anfangszustand hat, ist co-deterministisch. Denn gäbe es ein Wort $a_1a_2\cdots$ mit zwei verschiedenen Pfaden $\gamma = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots$ und $\gamma' = q'_0 \xrightarrow{a_1} q'_1 \xrightarrow{a_2} q'_2 \cdots$, dann gäbe es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $q_i \neq q'_i$, und damit zwei Anfangszustände für das Wort $a_{i+2}a_{i+1}\cdots$ was ein Widerspruch zu den eindeutigen Anfangszuständen ist. Damit gilt:

- $\mathcal{A}$ ist co-vollständig und co-deterministisch $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathcal{A}$ ist co-vollständig und jeder gültige Pfad eines ω-Wortes hat einen eindeutigen Anfangszustand $\square$

3.3 Stark k-eindeutige Büchi Automaten

Hier wird ein Büchi Automat vorgestellt, der zwar nach Definition in Kapitel 3.1 nicht eindeutig ist, jedoch ähnliche Eigenschaften wie ein stark eindeutiger Büchi Automat hat. Insbesondere ermöglicht er die Komplementbildung mit linearem Aufwand, ist co-vollständig und die Übergangsrelationen sind co-deterministisch. Im Gegensatz zu stark eindeutigen Büchi Automaten lässt er sich mit polynominellem Aufwand aus einer gegebenen starken algebraischen Erkennung konstruieren.

Gegeben sei der Büchi Automat $\mathcal{A} = (Q,\ A,\ \Delta,\ I,\ F)$, der die Sprache $L_\mathcal{A} \subseteq A^\omega$ erkennt. $\mathcal{A}$ wird hier stark k-eindeutig genannt, wenn

- seine Übergangsrelation Δ co-deterministisch ist,
- für jedes ω-Wort mindestens ein und höchstens k gültige Pfade in $\mathcal{A}$ existieren (damit ist $\mathcal{A}$ co-voll ständig),
- für ein Wort, das in $L_\mathcal{A}$ ist, alle diese Pfade in einem Zustand $q \in I$ beginnen,
- für ein Wort, das nicht in $L_\mathcal{A}$ ist, alle diese Pfade in einem Zustand $q \notin I$ beginnen, und
- alle diese Pfade disjunkt zueinander sind.

Die Pfade $\gamma_1 = q_{1,0} \xrightarrow{a_1} q_{1,1} \xrightarrow{a_2} q_{1,2} \cdots$ und $\gamma_2 = q_{2,0} \xrightarrow{a_1} q_{2,1} \xrightarrow{a_2} q_{2,2} \cdots$ werden hier als disjunkt bezeichnet, wenn $q_{1,i} \neq q_{2,i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Anmerkung: In [SH85] wird ein k-eindeutiger Büchi Automat als ein Büchi Automat definiert, in dem jedes Wort aus A^ω höchstens k akzeptierende Pfade hat. In [BL09] wird ein streng k-eindeutiger Büchi Automat als ein k-eindeutiger Büchi Automat definiert, in dem jedes Wort aus A^ω höchstens k gültige Pfade hat.

3.4 Konstruktionen für eindeutige Büchi Automaten

In der Literatur zum Thema sind einige Konstruktionen von eindeutigen und stark eindeutigen Büchi Automaten zu finden, z.B.:

- D. Kähler und T. Wilke geben in [KW08] ein Verfahren an, mit dem aus einem Büchi Automaten, mit n Zuständen, ein eindeutiger Büchi Automat mit maximal $4(3n)^n$ Zuständen konstruiert werden kann.

- A. Arnold zeigt in [A82], wie aus einem Muller Automat ein eindeutiger Büchi Automat konstruiert werden kann. Die Größe des eindeutigen Büchi Automaten ist polynominell zur Größe des Muller Automaten, wobei die Größe des eindeutigen Büchi Automaten und des Muller Automaten entsprechend Kapitel 2.5.4 definiert ist.

Den entsprechenden eindeutigen Büchi Automat für das Komplement erhält man mit gleichem Aufwand (siehe Kapitel 2.5.4).

- Bei gegebener starken Erkennung einer ω-regulären Sprache L, kann ein stark eindeutiger Büchi Automat konstruiert werden, der L erkennt. O. Carton, M. Michel zeigen in [CM02], wie aus gegebener starken Erkennung ein Transitionsautomat konstruiert werden kann, und beweisen, dass aus diesem Transitionsautomat ein stark eindeutiger Büchi Automat konstruiert werden kann. Die Größe des Transitionsautomat ist dabei maximal $n^2 2^n$, wobei n die Größe der Bildmenge des erkennenden Homomorphismus ist.

- In Kapitel 4.2 wird ein ähnliches Verfahren vorgestellt, dass bei gegebener starken Erkennung einer ω-regulären Sprache, direkt einen stark eindeutigen Büchi Automat konstruiert, der L erkennt. Die Größe des stark eindeutigen Büchi Automaten ist dann maximal $n^2 2^{|R|}$, wobei n die Größe der Bildmenge S des erkennenden Homomorphismus, und R die Menge der $\mathcal{R}$-Klassen von S ist.

- In Kapitel 4.3 wird gezeigt, dass bei gegebener starken Erkennung einer ω-regulären Sprache L, ein stark k-eindeutiger Büchi Automat konstruiert werden kann, der L erkennt. Die Größe des Automaten ist dabei maximal polynominell größer als n, die Größe der Bildmenge des erkennenden Homomorphismus.

- Für eine eingeschränkte Sprachklasse wird in Kapitel 4.4 die Konstruktion eines deterministischen, stark eindeutigen Büchi Automaten gezeigt. Die Größe des Automaten ist maximal $n|R|$, wobei n die Größe der Bildmenge S des erkennenden Homomorphismus, und R die Menge der $\mathcal{R}$-Klassen von S ist.

3.5 Konstruktionen für Vereinigung, Schnitt und Komplement

Dass Eindeutige Büchi Automaten, stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten unter Vereinigung, Schnitt und Komplement abgeschlossen sind, ergibt sich bereits daraus, dass alle genannten Automaten genau die regulären Sprachen erkennen (siehe Kapitel 2.6).

Für Vereinigung und Schnitt zweier stark eindeutiger Büchi Automaten mit gemeinsamen Alphabet, und für das Komplement eines stark eindeutigen Büchi Automaten, lassen sich einfach stark eindeutige Büchi Automaten konstruieren. Das Gleiche gilt auch für stark k-eindeutige Büchi Automaten. Im Folgenden werden diese Konstruktionen gezeigt.

3.5.1 Vereinigung und Schnitt

Gegeben sind die Büchi Automaten $\mathcal{A}_1 = (Q_1, A, \Delta_1, I_1, F_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (Q_2, A, \Delta_2, I_2, F_2)$, die die Sprachen $L_{\mathcal{A}_1}$ und $L_{\mathcal{A}_2}$ erkennen. Diese Automaten definieren den Automat $\mathcal{A} = (Q, A, \Delta, I, F)$ folgendermaßen:

$$Q = \{(q_1, q_2, \varepsilon) \mid q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2,\ \varepsilon \in \{0, 1\}\}$$

$$\Delta = \{(a \cdot q \xrightarrow{a} q) \mid q \in Q,\ a \in A\} \quad \text{mit}$$

$$a \cdot q = (a \cdot q_1,\ a \cdot q_2,\ \varepsilon')$$

$$a \cdot q_i = p \ \text{ mit } \ (p \xrightarrow{a} q_i) \in \Delta_i$$

$$\varepsilon' = \begin{cases} 0 & \text{wenn } q_1 \in F_1 \\ 1 & \text{wenn } q_1 \notin F_1 \text{ und } q_2 \in F_2 \\ \varepsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} \{(q_1,q_2,\varepsilon) \mid (q_1 \in I_1 \vee q_2 \in I_2),\ \varepsilon \in \{0,1\}\} & \Rightarrow \quad \mathcal{A} \text{ erkennt } L_{\mathcal{A}_1} \cup L_{\mathcal{A}_2} \\ \{(q_1,q_2,\varepsilon) \mid (q_1 \in I_1 \wedge q_2 \in I_2),\ \varepsilon \in \{0,1\}\} & \Rightarrow \quad \mathcal{A} \text{ erkennt } L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_2} \end{cases}$$

$$F = \{(q_1,q_2,\varepsilon) \mid q_2 \in F_2 \wedge \varepsilon = 0\}$$

- Sind bei der obigen Konstruktion die Büchi Automaten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ stark eindeutige Büchi Automaten, dann ist $\mathcal{A}$ ein stark eindeutiger Büchi Automat und erkennt $L_{\mathcal{A}_1} \cup L_{\mathcal{A}_2}$ bzw. $L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_2}$.

Beweis: Nach Definition von Δ gilt für den Pfad eines Wortes $w \in A^\omega$: $\gamma = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots$, mit $q_i = (q_{1,i},\ q_{2,i},\ \varepsilon_i)$. Dabei sind $\gamma_1 = q_{1,0} \xrightarrow{a_1} q_{1,1} \xrightarrow{a_2} q_{1,2} \cdots$ und $\gamma_2 = q_{2,0} \xrightarrow{a_1} q_{2,1} \xrightarrow{a_2} q_{2,2} \cdots$ Pfade von w in $\mathcal{A}_1$ bzw in $\mathcal{A}_2$. Da $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ stark eindeutige Büchi Automaten sind, ist für w, γ_1 und γ_2 eindeutig gegeben.

Gilt für einen Zustand $q_i = (q_{1,i},\ q_{2,i},\ \varepsilon_i)$, $q_{1,i} \in F_1$, gilt nach Definition von Δ, $\varepsilon_j = 0$ für alle Vorgängerzustände $q_j,\ k \leq j < i$ bis zum ersten Zustand $q_k = (q_{1,k},\ q_{2,k},\ \varepsilon_k)$ mit $q_{2,k} \in F_2$. Der Zustand q_k liegt dann, nach Definition von Δ, in F.

γ_1 enthält unendlich viele Zustände $q_{1,i} \in F_1$, und γ_2 unendlich viele Zustände $q_{2,i} \in F_2$. Damit existiert für jedes Wort $w \in A^\omega$ ein Pfad γ mit unendlich vielen Zuständen für die $q_{1,i} \in F_1$ gilt und unendlich viele Zustände für die $q_{2,i} \in F_2$ gilt. Damit gibt es auf γ unendlich oft die Situation, dass ein Zustand mit $q_{2,j} \in F_2$ vor einem Zustand $q_{1,i} \in F_1$ liegt. Damit liegen unendlich viele Zustände von γ in F.

Nach Definition von F gilt für jeden Zustand $q_i \in F$, $\varepsilon_i = 0$. Die Transitionen von A sind, nach Definition von Δ, co-deterministisch. Damit gilt auf γ, dass für alle Zustände q_j mit $j \leq i$, ε_j eindeutig ist. Da unendlich viele Zustände von γ in F liegen, sind die ε-Werte aller Zustände auf γ eindeutig. Damit sind dann alle Zustände von γ eindeutig.

Damit ist $\mathcal{A}$ co-vollständig und co-deterministisch, der Pfad eines Wortes w aus A^ω hat einen eindeutigen Anfangszustand, und nach Definition von I erkennt $\mathcal{A}$ eindeutig die Sprache $L_{\mathcal{A}_1} \cup L_{\mathcal{A}_2}$ bzw. $L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_2}$ □

- Sind bei der obigen Konstruktion die Büchi Automaten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ stark k-eindeutige Büchi Automaten, dann ist $\mathcal{A}$ ein stark k-eindeutiger Büchi Automat und erkennt $L_{\mathcal{A}_1} \cup L_{\mathcal{A}_2}$ bzw. $L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_2}$.

Beweis: Nach Definition ist $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ co-vollständig. Daher existiert für jedes Wort $w \in A^\omega$ mindestens ein Pfad $\gamma_1 = q_{1,0} \xrightarrow{a_1} q_{1,1} \xrightarrow{a_2} q_{1,2} \cdots$ in $\mathcal{A}_1$ und ein Pfad $\gamma_2 = q_{2,0} \xrightarrow{a_1} q_{2,1} \xrightarrow{a_2} q_{2,2} \cdots$ in $\mathcal{A}_2$. Nach Definition von Δ existiert damit für w ein Pfad der Form $\gamma = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots$, mit $q_i = (q_{1,i},\ q_{2,i},\ \varepsilon_i)$. Außerdem gilt nach Definition von Δ, dass für jeden Pfad γ von w, γ_1 und γ_2 ein Pfad von w in $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ ist.

Gilt für einen Zustand $q_i = (q_{1,i},\ q_{2,i},\ \varepsilon_i)$ $q_{1,i} \in F_1$, gilt nach Definition von Δ, $\varepsilon_j = 0$ für alle Vorgängerzustände $q_j,\ k \leq j < i$ bis zum ersten Zustand $q_k = (q_{1,k},\ q_{2,k},\ \varepsilon_k)$ mit $q_{2,k} \in F_2$. Der Zustand q_k liegt dann, nach Definition von Δ, in F.

γ_1 enthält unendlich viele Zustände $q_{1,i} \in F_1$, und γ_2 unendlich viele Zustände $q_{2,i} \in F_2$. Damit existiert für jedes Wort $w \in A^\omega$ einen Pfad γ mit unendlich vielen Zuständen für die $q_{1,i} \in F_1$ gilt und unendlich viele Zustände für die $q_{2,i} \in F_2$ gilt. Damit gibt es auf γ unendlich oft die Situation, dass ein Zustand mit $q_{2,j} \in F_2$ vor einem Zustand $q_{1,i} \in F_1$ liegt. Damit liegen unendlich viele Zustände von γ in F.

Nach Definition von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ ist durch den Anfangswert von γ_1 und γ_2 die Zugehörigkeit von w in $L_{\mathcal{A}_1}$ bzw. $L_{\mathcal{A}_2}$ bestimmt. Damit werden $L_{\mathcal{A}_1} \cup L_{\mathcal{A}_2}$ und $L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_2}$ durch den Anfangszustand von γ erkannt.

Zwei Pfade von w in $\mathcal{A}$ sind disjunkt, denn gäbe es zwei Pfade γ und γ', die nicht disjunkt sind, gäbe es ein i mit $q_{1,i} = q'_{1,i}$ und $q_{2,i} = q'_{2,i}$. Das wäre aber ein Widerspruch dazu, dass $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ stark k-eindeutig sind, und damit Pfade eines Wortes darauf disjunkt sind. □

Für die Anzahl der Zustände in $\mathcal{A}$ gilt: $|\,Q\,| = 2 \cdot |\,Q_1\,| \cdot |\,Q_2\,|$.

Damit ergibt sich folgendes Lemma:

Lemma 8 *Für Vereinigung und Schnitt zweier stark eindeutiger Büchi Automaten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, mit gemeinsamen Alphabet, lässt sich mit polynominellem Aufwand ein stark eindeutiger Büchi Automat konstruieren, der $L_{\mathcal{A}_1} \cup L_{\mathcal{A}_2}$ bzw. $L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_2}$ erkennt.*

Für stark k-eindeutige Büchi Automaten gilt das analog. □

Anmerkung: Sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ eindeutige Büchi Automaten, kann für $L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_1}$ gleichfalls obige Konstruktion verwendet werden.

3.5.2 Komplement

- Gegeben ist der stark eindeutige Büchi Automat $\mathcal{A} = (Q,\ A,\ \Delta,\ I,\ F)$, der die Sprache $L_{\mathcal{A}} \subseteq A^{\omega}$ erkennt. Dann erkennt der stark eindeutige Büchi Automat $\mathcal{B} = (Q,\ A,\ \Delta,\ Q \setminus I,\ F)$ das Komplement von $L_{\mathcal{A}}$.

Beweis: Da $\mathcal{A}$ stark eindeutig ist, hat jedes Wort $w \in A^{\omega}$ genau einen gültigen Pfad $\gamma_{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}$. Die Zustände von $\gamma_{\mathcal{A}}$ sind nicht von der Menge der Anfangszustände I abhängig (Kapitel 3.2). Da $\mathcal{B}$ bis auf die Menge der Anfangszustände I dem Automat $\mathcal{A}$ gleicht, hat w in $\mathcal{B}$ ebenfalls genau eine gültigen Pfad $\gamma_{\mathcal{B}}$, mit $\gamma_{\mathcal{B}} = \gamma_{\mathcal{A}}$. Damit gilt: $w \in L_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \gamma_{\mathcal{A}}$ beginnt in einem Zustand aus I, und $w \in L_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \gamma_{\mathcal{B}}$ beginnt in einem Zustand aus $I \setminus Q$. Damit erkennt $\mathcal{B}$ genau das Komplement von $L_{\mathcal{A}}$. Die Eigenschaften eines stark eindeutigen Büchi Automaten ergeben sich direkt aus der Definition von $\mathcal{B}$ □

- Gegeben ist der stark k-eindeutige Büchi Automat $\mathcal{A} = (Q,\ A,\ \Delta,\ I,\ F)$, der die Sprache $L_{\mathcal{A}} \subseteq A^{\omega}$ erkennt. Dann erkennt der stark k-eindeutige Büchi Automat $\mathcal{B} = (Q,\ A,\ \Delta,\ Q \setminus I,\ F)$ das Komplement von $L_{\mathcal{A}}$.

Beweis: Da $\mathcal{A}$ stark k-eindeutig ist, hat jedes Wort $w \in A^{\omega}$ mindestens ein und höchstens k gültige Pfade in $\mathcal{A}$. Die Pfade bzw. die Zustände darauf sind nicht von der Menge der Anfangszustände I abhängig. Da $\mathcal{B}$ bis auf die Menge der Anfangszustände I dem Automat $\mathcal{A}$ gleicht, hat w in $\mathcal{B}$ die gleichen Pfade mit den gleichen Zuständen wie in $\mathcal{A}$. Nach Definition von stark k-eindeutigen Büchi Automaten gilt: $w \in L_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow$ alle Pfade von w beginnen in einem Zustand aus I, und $w \in L_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \gamma_{\mathcal{B}}$ alle Pfade von w beginnen in einem Zustand aus $I \setminus Q$. Damit erkennt $\mathcal{B}$ genau das Komplement von $L_{\mathcal{A}}$. Die Eigenschaften eines stark k-eindeutigen Büchi Automaten ergeben sich direkt aus der Definition von $\mathcal{B}$ □

- Die Anzahl der Zustände von $\mathcal{B}$ ist bei allen Konstruktionen gleich der Anzahl der Zustände von $\mathcal{A}$.

Damit ergibt sich folgendes Lemma:

Lemma 9 *Für einen stark eindeutigen Büchi Automaten $\mathcal{A}$, der $L_{\mathcal{A}} \in A^{\omega}$ erkennt, lässt sich mit linearem Aufwand einen stark eindeutigen Büchi Automat konstruieren, der $A^{\omega} \setminus L_{\mathcal{A}}$ erkennt.*

Für stark k-eindeutige Büchi Automaten gilt das analog. □

3.6 Leerheits-, Inklusionsproblem, Äquivalenzproblem

- Leerheit: Da Büchi Automaten als getrimmt angenommen werden können, sind Büchi Automaten und damit eindeutige Büchi Automaten, stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten genau dann leer, wenn die Menge der Anfangszuständen $I = \emptyset$ ist.

Wenn $I = \emptyset$ kann es nach Definition von Büchi Automaten kein akzeptiertes Wort geben. Wenn $I \neq \emptyset$ gibt es in einem getrimmten Büchi Automat ein Zustand $q \in I$ und ein Pfad mit unendlich vielen Zustanden in F, der in q beginnt, und damit ein akzeptiertes Wort. Somit ist ein Automat mit $I \neq \emptyset$ nicht leer. □

- Inklusion: Gegeben sind die stark eindeutigen Automaten $\mathcal{A}_1 = (Q_1,\ A_1,\ \Delta_1,\ I_1,\ F_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (Q_2,\ A_2,\ \Delta_2,\ I_2,\ F_2)$, die die Sprachen $L_{\mathcal{A}_1}$ und $L_{\mathcal{A}_2}$ erkennen. Es gilt $L_{\mathcal{A}_1} \subseteq L_{\mathcal{A}_2}$ genau dann, wenn $L^c_{\mathcal{A}_2} \cap L_{\mathcal{A}_1} = \emptyset$ ist. $L^c_{\mathcal{A}_2}$ ist dabei das Komplement von $L_{\mathcal{A}_2}$.

Da bei stark eindeutigen Büchi Automaten das Komplement in linearer Zeit, Schnitt und das Leerheitsproblem bei Büchi Automaten in polynomineller Zeit gebildet werden kann (siehe Kapitel 3.5.2 und 2.5.4), ist das Inklusionsproblem in polynomineller Zeit lösbar.

Für stark k-eindeutige Büchi Automaten gilt das Gleiche. □

- Äquivalenz: Gegeben sind die stark eindeutigen Automaten $\mathcal{A}_1 = (Q_1, A_1, \Delta_1, I_1, F_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (Q_2, A_2, \Delta_2, I_2, F_2)$, die die Sprachen $L_{\mathcal{A}_1}$ und $L_{\mathcal{A}_2}$ erkennen. Es gilt $L_{\mathcal{A}_1} = L_{\mathcal{A}_2}$ genau dann, wenn $L_{\mathcal{A}_1} \subseteq L_{\mathcal{A}_2}$ und $L_{\mathcal{A}_2} \subseteq L_{\mathcal{A}_1}$.
Da bei stark eindeutigen Büchi Automaten das Inklusionproblem in polynomineller Zeit und mit polynominellem Platzbedarf gelöst werden kann, ist damit auch das Äquivalenzproblem in polynomineller Zeit und mit polynominellem Platzbedarf lösbar.

Für stark k-eindeutige Büchi Automaten gilt das Gleiche. □

Damit ergibt sich folgendes Lemma:

Lemma 10 *Für Büchi Automaten lässt sich das Leerheitproblem unmittelbar lösen.*

Für stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten lässt sich das Inklusionsproblem mit polynominellem Aufwand lösen.

- Explizite Lösungen für das Inklusions- und Äquivalenzproblem sind in [BL09] gegeben.

3.7 Eigenschaften

Satz 11
- *Eindeutige Büchi Automaten erkennen genau die regulären Sprachen, und sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt und Komplementbildung.*

Für stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten gilt das Gleiche.

Weiterhin gilt:

- *Für stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten lässt sich der entsprechende Komplement-Automat mit linearerm Aufwand konstruieren.*
- *Für stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten lässt sich das Leerheits-, Inklusions- und Äquivalenzproblem mit polynominellem Aufwand lösen*
- *Für zwei stark eindeutige Büchi Automaten und für zwei stark k-eindeutige Büchi Automaten mit jeweils gleichem Alphabet lassen sich entsprechende Automaten für Schnitt und Vereinigung mit polynominellem Aufwand konstruieren.*
- *stark k-eindeutige Büchi Automaten können bei gegebener starken Erkennung in polynomineller Zeit, bezüglich der Größe der Bildmenge des erkennenden Homomorphismus, konstruiert werden.*

Beweis: Für jede ω-reguläre Sprache gibt es einen Büchi Automat der die Sprache erkennt und ein Homomophismus der die Sprache stark erkennt. Eindeutige Büchi Automaten, stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten können daher für jede ω-reguläre Sprache konstruiert werden (siehe Kapitel 4.2 und 4.3). Die von eindeutige Büchi Automaten, stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten erkannten Sprachen sind ω-reguläre Sprachen, da die genannten Automaten Büchi Automaten sind.

Die Abgeschlossenheit unter Vereinigung, Schnitt und Komplement folgt aus Satz 5.

Die weiteren Punkte entsprechen Lemma 8, 9 und 10 und der letzte Punkt ist Ergebnis der Kapitel 4.2 und 4.3 □

Stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten sind mit Muller Automaten vergleichbar. Die Größe der Automaten sind maximal exponentiell größer als entsprechende Büchi Automaten, dafür ist die Konstruktion des Komplement-Automaten mit linearem Aufwand möglich. Muller Automaten haben allerdings den Vorteil, dass sie deterministisch sind.
Welcher Automat effizienter ist, ergibt sich erst aus der konkreten Anwendung. Das kann man gut an folgenden zwei Beispielen sehen. Die Beweise dazu sind in [BL09] gegeben.

Beispiel 1: Gegeben ist die Sprache $L_n = A^*aA^{n-1}ab^\omega$ mit $A = \{a,b\}$. Für diese Sprache existiert ein stark eindeutiger Büchi Automat mit $n+2$ Zuständen. Dagegen hat jeder (deterministische) Muller Automat mindestens 2^n Zustände

Beispiel 2: Gegeben ist das Alphabet $A = \{a,b\}$ und die Sprache L_n in der alle Wörter aus A^ω enthalten sind, die an n-ten Stelle den Buchstaben a haben. Für diese Sprache gibt es einen (deterministischen) Muller Automat mit $n+1$ Zuständen. dagegen benötigt ein stark eindeutiger Büchi Automat mindestens 2^{n-1} Zustände.

4 Von starker Erkennung zu eindeutigen Büchi Automaten

In diesem Kapitel werden Konstruktionen für stark eindeutige Büchi Automaten und stark k-eindeutige Büchi Automaten gezeigt. Es wird gezeigt, wie für eine beliebige erkennbare Sprache $L \subseteq A^\omega$, für die ein Homomorphismus h gegeben ist, der L stark erkennt, der entsprechender Büchi Automat konstruiert werden kann.

Weiterhin wird die Konstruktion eines deterministischen, stark eindeutigen Büchi Automaten gegeben, der eine Teilklasse der ω-regulären Sprachen erkennt.

Für jede ω-reguläre Sprache gibt es einen Homomophismus, der die Sprache stark erkennt. Die Konstruktionen in diesem Kapitel beweisen daher die Aussage in Satz 11, dass stark eindeutige Büchi Automaten, stark k-eindeutige Büchi Automaten und Automaten mit eindeutigen Anfangszuständen genau die regulären Sprachen erkennen.

Gegeben ist jeweils ein endliches Alphabet A, eine Sprache $L \subseteq A^\omega$, eine endliche Halbgruppe S mit dem Homomorphismus $h : A^+ \to S$. L wird vom Homomorphismus h stark erkannt, es gibt also die Menge S_p der Linked Pairs, die Menge $\tilde{S}_p$ der Äquivalenzklassen der Linked Pairs und die Abbildung $\tilde{h} : A^\omega \to \tilde{S}_p$. $\tilde{h}$ erkennt L, d.h. es gibt eine Menge $P \subseteq \tilde{S}_p$ mit $L = \tilde{h}^{-1}(P)$.

Die Beweise zu den Konstruktionen benötigen als Grundlagen die Green Relations im Zusammenhang mit Linked Pairs und einer Konstruktion ähnlich der Rhodes Expansion in Halbgruppen. Diese Grundlagen werden in den folgenden Kapiteln, soweit sie benötigt werden, gegeben. Für weitere Informationen zu den Green's Relations siehe z.B. [PP04] und zu der Rhodes Expansion [B84]

4.1 Grundlagen

4.1.1 Green Relations

Für weiterführende Informationen und für Beweise zu den Aussagen in diesem Kapitel siehe z.B. [PP04].

Gegeben ist im Folgenden eine Halbgruppe S. Diese wird um ein neutrales Element erweitert, so dass man S^1 erhält. S^1 ist damit ein Monoid. Außerdem sei $s, s', t, t' \in S^1$. Auf S^1 werden drei Quasiordnungen definiert:

$$\begin{array}{lllll}
\leq_{\mathcal{R}}: & s \leq_{\mathcal{R}} s' & \Leftrightarrow & sS^1 \subseteq s'S^1 & \Leftrightarrow \exists t : s = s't \\
\leq_{\mathcal{L}}: & s \leq_{\mathcal{L}} s' & \Leftrightarrow & sS^1 \subseteq s'S^1 & \Leftrightarrow \exists t : s = ts' \\
\leq_{\mathcal{J}}: & s \leq_{\mathcal{J}} s' & \Leftrightarrow & S^1sS^1 \subseteq S^1s'S^1 & \Leftrightarrow \exists t,t' : s = ts't'
\end{array}$$

Damit ergeben sich die Äquivalenzrelationen:

$$\begin{array}{lllll}
s \sim_{\mathcal{R}} s' & \Leftrightarrow & (s \leq_{\mathcal{R}} s' \wedge s' \leq_{\mathcal{R}} s) & \textit{und} & R(s) := \{t \mid t \sim_{\mathcal{R}} s\} \\
s \sim_{\mathcal{L}} s' & \Leftrightarrow & (s \leq_{\mathcal{L}} s' \wedge s' \leq_{\mathcal{L}} s) & \textit{und} & L(s) := \{t \mid t \sim_{\mathcal{L}} s\} \\
s \sim_{\mathcal{J}} s' & \Leftrightarrow & (s \leq_{\mathcal{J}} s' \wedge s' \leq_{\mathcal{J}} s) & \textit{und} & J(s) := \{t \mid t \sim_{\mathcal{J}} s\}
\end{array}$$

Außerdem die Striktordnungen:

$$\begin{array}{lll}
s <_{\mathcal{R}} s' & \Leftrightarrow & (s \leq_{\mathcal{R}} s' \wedge \neg(s \sim_{\mathcal{R}} s')) \\
s <_{\mathcal{L}} s' & \Leftrightarrow & (s \leq_{\mathcal{L}} s' \wedge \neg(s \sim_{\mathcal{L}} s')) \\
s <_{\mathcal{J}} s' & \Leftrightarrow & (s \leq_{\mathcal{J}} s' \wedge \neg(s \sim_{\mathcal{J}} s'))
\end{array}$$

Weiterhin werden die Äquivalenzrelationen $\mathcal{D}$ und $\mathcal{H}$ definiert:

$$\begin{array}{lllll}
s \sim_{\mathcal{H}} s' & \Leftrightarrow & (s \sim_{\mathcal{R}} s' \wedge s \sim_{\mathcal{L}} s') & \textit{und} & H(s) := \{t \mid t \sim_{\mathcal{H}} s\} \\
s \sim_{\mathcal{D}} s' & \Leftrightarrow & \exists t \in S^1 : (s \sim_{\mathcal{R}} t \wedge t \sim_{\mathcal{L}} s') & \textit{und} & D(s) := \{t \mid t \sim_{\mathcal{D}} s\}
\end{array}$$

Lemma 12 *Sei S eine Halbgruppe und* $s, s', t, t' \in S^1$. *Dann gilt:*

- $\exists t : (s \sim_{\mathcal{R}} t \ \wedge \ t \sim_{\mathcal{L}} s') \ \Leftrightarrow \ \exists t' : (s \sim_{\mathcal{L}} t' \ \wedge \ t' \sim_{\mathcal{R}} s')$.
- $|S| \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ s \sim_{\mathcal{D}} s' \ \Leftrightarrow \ s \sim_{\mathcal{J}} s'$.
- $s \leq_{\mathcal{R}} s' \ \Rightarrow \ \forall t : ts \leq_{\mathcal{R}} ts'$
  $s \leq_{\mathcal{L}} s' \ \Rightarrow \ \forall t : st \leq_{\mathcal{L}} s't$
- $s \leq_{\mathcal{R}} t \ \Leftrightarrow \ \forall s' \in R(s) \ \forall t' \in R(t) : \ s' \leq_{\mathcal{R}} t'$
  $s <_{\mathcal{R}} t \ \Leftrightarrow \ \forall s' \in R(s) \ \forall t' \in R(t) : \ s' <_{\mathcal{R}} t'$
  $s \leq_{\mathcal{L}} t \ \Leftrightarrow \ \forall s' \in L(s) \ \forall t' \in L(t) : \ s' \leq_{\mathcal{L}} t'$
  $s <_{\mathcal{L}} t \ \Leftrightarrow \ \forall s' \in L(s) \ \forall t' \in L(t) : \ s' <_{\mathcal{L}} t'$ □

Folgendes Lemma beschreibt die Struktur einer $\mathcal{D}$ Klasse. Dabei hilft die Vorstellung, dass die Elemente der $\mathcal{D}$ Klasse in einer Tabelle („Egg Box“) geordnet sind. Alle Elemente einer Zeile sind die Elemente einer $\mathcal{R}$ Klasse, jede Spalte enthält die Elemente einer $\mathcal{L}$ Klasse. Die Tabellenzellen selbst enthalten dann die Elemente der entsprechenden $\mathcal{H}$ Klasse.

Lemma 13 *Sei S eine Halbgruppe,* $\mathcal{D}$ *eine* $\mathcal{D}$ *Klasse von* S^1 *und* $s, s', s'', p, q, x \in S^1$. *Dann gilt:*

- *Wenn s und s' in der gleichen* $\mathcal{R}$ *Klasse sind, dann gibt es ein p und ein q mit* $s = s'p$, $s' = sq$. *Die Abbildungen* $x \mapsto xp$ *und* $x \mapsto xq$ *sind dann bijektiv und erhalten die* $\mathcal{H}$ *Klassen.*
- ss'' *ist Element der* $\mathcal{H}$ *Klasse* $R(s) \cap L(s'')$ $\Leftrightarrow$ *Die* $\mathcal{H}$ *Klasse* $R(s'') \cap L(s)$ *enthält ein idempotentes Element.*
- *Eine* $\mathcal{H}$ *Klasse ist genau dann eine Gruppe, wenn sie das Produkt zweier ihrer Elemente enthält.*
- *Wenn* $\mathcal{D}$ *ein idempotentes Element enthält, dann gibt es in jeder* $\mathcal{R}$ *und in jeder* $\mathcal{L}$ *Klasse von* $\mathcal{D}$ *mindestens ein idempotentes Element.* □

Weiterhin gilt in einer Halbgruppe S:

Lemma 14 *Sei S eine Halbgruppe,* $s, t \in S$ *und* $m, n \in S^1$. *Dann gilt:*

- $s = msn \ \Rightarrow \ ms \in L(s)$ *und* $sn \in R(s)$
- $(s \sim_{\mathcal{J}} t \ \wedge \ s \leq_{\mathcal{R}} t) \ \Rightarrow \ s \sim_{\mathcal{R}} t$
- $(s \sim_{\mathcal{J}} t \ \wedge \ s \leq_{\mathcal{L}} t) \ \Rightarrow \ s \sim_{\mathcal{L}} t$ □

4.1.2 Green Relations im Zusammenhang mit Linked Pairs

Lemma 15 *Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S und ein Homomorphismus h von* A^+ *auf S. Außerdem* $w \in A^\omega$, $w = a_0a_1a_2\cdots$ *und* $w_i = a_0a_1\cdots a_i$. *Die* $\mathcal{R}$*-Klasse* $R(w)$ *wird folgendermaßen definiert:*

Sei (s, e) *ein Linked Pair assoziiert zu w, und* i_{min} *das Minimum von* $\{i \mid h(w_i) = s\}$ *(*i_{min} *existiert, siehe Kapitel 2.3). Dann ist* $R(w) := R(h(w_{i_{min}})) = R(s)$*, und es gilt*

1) $\forall j \geq i_{min} : h(w_j) \in R(w)$
2) $(s, e) \sim (s', e') \ \Rightarrow \ s' \in R(s) = R(w)$

Beweis:
1) Angenommen, $j > i_{min}$ und $h(w_j) \notin R(w)$. Dann existiert $p = h(a_{i_{min}} \cdots a_j)$ mit, $sp = h(w_j)$. Außerdem ein $k > j$ mit $w_k = s$ (siehe Kapitel 2.3), und damit ein $q = h(a_{j+1} \cdots a_k)$ mit $h(w_j)q = s$. Damit ist, im Widerspruch zur Annahme, $h(w_j) \in R(w)$.

2) Es existiert $w_{i_{min}}$ mit $h(w_{i_{min}}) = s$ und $w_{j_{min}}$ mit $h(w_{j_{min}}) = s'$. Es gilt $(i_{min} \leq j_{min}) \vee (j_{min} \leq i_{min})$, und damit nach 1) $s', s \in R(w)$. □

Lemma 16 *Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S und ein Homomorphismus h von A^+ auf S. Außerdem $w \in A^\omega$, $w = a_0a_1a_2\cdots$ und $w_i = a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}\cdots$. Die $\mathcal{D}$-Klasse $D(w)$ wird folgendermaßen definiert:*

Sei (s,e) ein Linked Pair von w, dann ist $D(w) := D(e)$ und es existiert i_{min} das Minimum von $\{i \mid h(a_0\cdots a_i) = s\}$ (i_{min} existiert, siehe Kapitel 2.3). Es gilt dann

1) $\forall j \geq i_{min}\ \exists s' :\ (s',e)$ *ist assoziiert zu* w_j
2) $(s,e) \sim (s',e') \ \Rightarrow\ e' \in D(e) = D(w)$
3) *Für* $i \geq i_{min}$ *gilt:* (r,t) *assoziiert zu* $w_i \ \Rightarrow\ r \sim_{\mathcal{D}} t$

Beweis:
1) Es existieren $m \leq j$ und $n \geq j$ mit $h(a_{m+1}\cdots a_j)\ h(a_{j+1}\cdots a_n) = e$ (siehe Kapitel 3.2). Für $s' := h(a_{j+1}\cdots a_n)$ gilt, (s',e) *ist assoziiert zu* w_j.

2) Aus $(s,e) \sim (s',e')$ folgt, dass ein Wort $w \in A^\omega$, $w = a_0a_1a_2\cdots$ existiert, das sowohl zu (s,e) als auch (s',e') assoziiert ist (Kapitel 3.2). Sei $h(a_0\cdots a_{i_{min}}\cdots a_j) = se = s$, dann gilt für alle k mit $h(a_0\cdots a_k) = s'$, $k > j$:

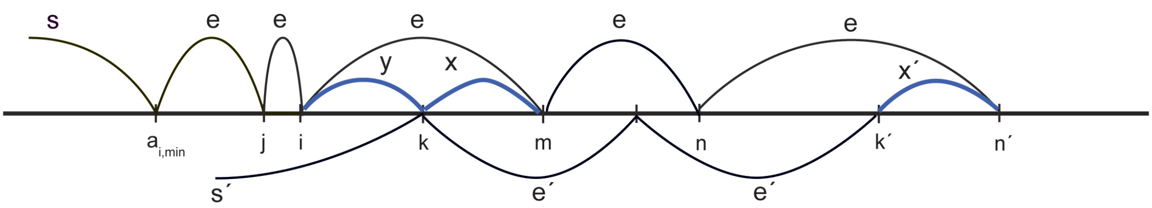


Abbildung 2: Pfad in $\mathcal{A}$

$\exists m,n:\ x := h(a_{k+1}\cdots a_m),\ xe = (a_{k+1}\cdots a_m\cdots a_n)$
$\exists i:\ y := h(a_{i+1}\cdots a_k),\ yx = e,\ yxe = ee = e$
$\exists k':\ x' := h(a_{k'+1}\cdots a'_n),\ h(a_{k+1}\cdots a_{k'}) = e',\ h(a_{k+1}\cdots a_{n'}) = e'x' = xe$

(siehe Abbildung 2)
Aus $y \cdot xe = ee = e$ (und $x \cdot e = xe$) folgt $xe \sim_{\mathcal{L}} e$
Aus $xe \cdot h(a_{n+1}\cdots a_{k'}) = e'$ und $e'x' = xe$ folgt $xe \sim_{\mathcal{R}} e'$

Aus $xe \sim_L e$ und $xe \sim_R e'$ folgt schließlich $e \sim_D e'$

3) Für $i \geq i_{min}$ gilt:
$\exists x, y \in A^+ : w_m = xw_i,\ w_i = yw_n,\ w_m$ und w_n sind assoziiert zu (e,e)
Daraus folgt: w_i ist assoziiert zu $(h(y)e,e)$, $h(y)e\ e = h(y)e,\ h(x)\ h(y)e = ee = e$ und damit $h(y)e \sim_{\mathcal{L}} e$
Schließlich sind alle Linked Pairs (r,t), die mit w_i assoziiert sind, konjugiert zu $(h(y)e,e)$. Deshalb gilt $r \sim_{\mathcal{R}} h(y)e$ und $r \sim_{\mathcal{D}} t$.

□

Lemma 17 *Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S und ein Homomorphismus h von A^+ auf S. Für Linked Pairs von S gilt dann:*

1) $\exists\,(f,f):\ (f,f)\ \sim\ (s,e) \quad \Leftrightarrow\ s \sim_{\mathcal{D}} e$
2) $(e,e)\ \sim\ (f,f) \quad \Leftrightarrow\ e \sim_{\mathcal{R}} f$
3) $(s,e)\ \sim\ (s',e')$ *und* $s \sim_{\mathcal{D}} e \sim_{\mathcal{D}} s' \sim_{\mathcal{D}} e' \quad \Leftrightarrow\ s \sim_{\mathcal{R}} s'$ *und* $s \sim_{\mathcal{D}} e \sim_{\mathcal{D}} s' \sim_{\mathcal{D}} e'$

Beweis:
1) Wenn (s,e) und (f,f) konjugiert sind, dann sind nach Lemma 15 und 16 $s \sim_{\mathcal{R}} f$ und $e \sim_{\mathcal{D}} f$. Damit ist $s \sim_{\mathcal{D}} e$. Für die Rückrichtung gilt $s \sim_{\mathcal{D}} e$ und weil (s,e) ein Linked Pair ist $s = se$. Daraus folgt nach

Lemma 14 $s \sim_{\mathcal{L}} e$, und es gibt ein $t \in S^1$ mit $ts = e$. Damit gilt $stst = set = st$ und $f := st$ ist idempotent. Daraus folgt dann, dass (s,e) und (f,f) konjugiert sind.

2) 2) ist eine dierekte Folge von 1).

3) Sind (s,e) und (s',e') konjugiert, dann gilt nach Lemma 15 $s \sim_{\mathcal{R}} s'$. Für die Rückrichtung ist $s \sim_{\mathcal{R}} s'$ gegeben. Wegen 1) ist (s,e) ((s',e')) konjugiert zu einem (f,f) ((f',f')). Dabei gilt $s \sim_{\mathcal{R}} f$ ($s' \sim_{\mathcal{R}} f'$). Wegen $s \sim_{\mathcal{R}} s'$ ist $f \sim_{\mathcal{R}} f'$ und wegen 2) sind dann (f,f) und (f',f') konjugiert. Damit sind auch (s,e) und (s',e') konjugiert. □

4.1.3 $\mathcal{R}$-Ketten

Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S und ein Homomorphismus h von A^+ auf S. Die Menge der damit gegebenen Linked Pairs wird hier mit S_P bezeichnet, die Menge der $\mathcal{R}$-Klassen mit R.

- Die Folge $(R(s_1), R(s_2), R(s_3), \cdots)$ wird hier $\mathcal{R}$-Kette genannt, wenn $s_i \in S$ und $s_1 \geq_{\mathcal{R}} \cdots \geq_{\mathcal{R}} s_n$ gilt. Eine $\mathcal{R}$-Kette wird streng geordnet genannt, wenn $s_1 >_{\mathcal{R}} \cdots >_{\mathcal{R}} s_n$ gilt. Die Menge der streng geordneten $\mathcal{R}$-Ketten wird hier mit $\hat{S}$ bezeichnet.

Da ($s \leq_{\mathcal{R}} t \;\Leftrightarrow\; \forall s' \in R(s)\; \forall t' \in R(t):\; s' \leq_{\mathcal{R}} t'$) und ($s <_{\mathcal{R}} t \;\Leftrightarrow\; \forall s' \in R(s)\; \forall t' \in R(t):\; s' <_{\mathcal{R}} t'$) gilt (Lemma 12), sind $\mathcal{R}$-Ketten und streng geordnete $\mathcal{R}$-Ketten wohldefiniert.

R ist endlich, weil S endlich ist. Damit ist die Länge aller streng geordneten Ketten endlich, und damit auch $\hat{S}$.

- Für die Abbildung $\hat{h} : A^{\omega} \to \hat{S}$ gelte $\hat{h} := k' \circ k$. Die Abbildungen k und k' werden folgendermaßen definiert:

Sei K die Menge der $\mathcal{R}$-Kette und $k : A^{\omega} \to K$. Für ein $w \in A^{\omega}$, mit $w = a_0 a_1 a_2 \cdots$ wird $k(w)$ über $k(w) := (R(h(a_0)),\; R(h(a_0 a_1)),\; R(h(a_0 a_1 a_2)),\; \cdots) := (R(s_1), R(s_2), R(s_3), \cdots)$ definiert. Es gilt $s_i \geq_{\mathcal{R}} s_{i+1}$, da nach Konstruktion $s_{i+1} = s_i\; h(a_i)$ ist. k ist eindeutig, weil die Darstellung von w durch $w = a_0 a_1 a_2 \cdots$ und der Homomorphismus h eindeutig, und die $\mathcal{R}$-Klassen disjunkt sind.

Sei $k' : K \to \hat{S}$. Für eine $\mathcal{R}$-Kette $(R(s_1), R(s_2), R(s_3), \cdots)$ wird $k((R(s_1) R(s_2), R(s_3), \cdots)) := (R(s'_1), R(s'_2), \cdots, R(s'_n))$ konstruiert, indem jedes $R(s_i)$ mit $i > 1$ und $s_i \sim_{\mathcal{R}} s_{i-1}$ entfernt wird. Die Konstruktion ist eindeutig, denn sind mehrere Elemente gleich, dann sind sie in der $\mathcal{R}$-Kette nacheinander angeordnet ($\mathcal{R}$-Ketten sind monoton fallend), und unabhängig von der Reihenfolge des Entfernens werden alle bis auf das Erste entfernt. Für $R(s'_i),\; i > 1$ gilt nach Konstruktion $s_i <_{\mathcal{R}} s_{i-1}$. $k'((R(s_1), R(s_2), R(s_3), \cdots))$ ist damit eine streng geordneten $\mathcal{R}$-Kette und damit endlich.

Da ($s \leq_{\mathcal{R}} t \;\Leftrightarrow\; \forall s' \in R(s)\; \forall t' \in R(t):\; s' \leq_{\mathcal{R}} t'$) und ($s <_{\mathcal{R}} t \;\Leftrightarrow\; \forall s' \in R(s)\; \forall t' \in R(t):\; s' <_{\mathcal{R}} t'$) gilt (Lemma 12), sind k und k' wohldefiniert.

Da k und k' eindeutig sind, ist auch $\hat{h} = k' \circ k$ eindeutig.

Lemma 18 *Sei $\hat{h} : A^{\omega} \to \hat{S}$ wie zuvor definiert, $w \in A^{\omega}$, $(s_1, \cdots, s_n) = \tilde{h}(w)$, dann gilt für alle Linked Pairs (s,e), die mit w assoziiert sind, $s \sim_{\mathcal{R}} s_n$*

Beweis: Nach Lemma 15 existiert i_{min}, so dass $h((a_0 \cdots a_{i_{min}})) = s$ und für alle Präfixe $(a_0 \cdots a_j)$, $j \geq i_{min}$, $h((a_0 \cdots a_j)) \sim_{\mathcal{R}} s$ gilt. Damit ist $R(s)$ die kleinste (bez. $\leq_{\mathcal{R}}$) $\mathcal{R}$ Klasse für alle Präfixe und damit gleich $R(s_n)$. □

- Im Folgenden wird eine Linksoperation von A^+ auf $\hat{S}$ definiert:

Für $a \in A$ ist $a\; (R(s_1), R(s_2), \cdots, R(s_n)) := k'\; (R((h(a)),\; R(h(a)s_1),\; R(h(a)s_2),\; \cdots,\; R(h(a)s_n))) := (R(s'_1), R(s'_2), \cdots, R(s'_{n'}))$. Da $\leq_{\mathcal{R}}$ linksstabil ist (Lemma 12), ist $s_i \leq_{\mathcal{R}} s_{i+1} \;\Leftrightarrow\; h(a)s_i \leq_{\mathcal{R}} h(a)s_{i+1}$

und $(R((h(a)),\ R(h(a)s_1),\ R(h(a)s_2),\ \cdots,\ R(h(a)s_n)))$ eine $\mathcal{R}$-Kette. Damit ist dann $(R(s'_1), R(s'_2), \cdots, R(s'_{n'}))$ eine streng geordnete $\mathcal{R}$-Kette. Eindeutig ist die Operation, weil h und die Multiplikation der Halbgruppe S eindeutig sind.

Da $(s \leq_{\mathcal{R}} t \ \Leftrightarrow\ \forall s' \in R(s)\ \forall t' \in R(t):\ s' \leq_{\mathcal{R}} t')$ und $(s <_{\mathcal{R}} t \ \Leftrightarrow\ \forall s' \in R(s)\ \forall t' \in R(t):\ s' <_{\mathcal{R}} t')$ gilt (Lemma 12), ist die Linksoperation wohldefiniert.

Für $u \in A^+$, mit $u = a_0 a_1 \ldots a_m$ ist $u\ (R(s_1), R(s_2), \cdots, R(s_n)) := u'\ (a_m(R(s_1), R(s_2), \cdots, R(s_n)))$, mit $u' = a_0 a_1 \ldots a_{m-1}$. Iterativ kann damit $u\ (R(s_1), R(s_2), \cdots, R(s_n)) := (R(s'_1), R(s'_2), \cdots, R(s'_{n'}))$ berechnet werden. Dass die Operation eindeutig ist, $(R(s'_1), R(s'_2), \cdots, R(s'_{n'}))$ eine streng geordnete $\mathcal{R}$-Kette ist und die Operation wohldefiniert ist, ergibt sich daraus, dass die einzelnen Schritte eindeutig sind, jeweils zu streng geordneten $\mathcal{R}$-Ketten führen und wohldefiniert sind.

- Die Operation $a\ (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ mit $a \in A$ wird abschneidend genannt, wenn $h(a)s_{n-1} \sim_{\mathcal{R}} h(a)s_n$ ist, wenn also das letzte Element durch die Operation abgeschnitten wird.

Lemma 19 *Für $\hat{h}$, die zuvor definierte Linksoperation, $u \in A^+$, $u = a_0 a_1 \cdots a_m$, $w \in A^\omega unds_i \in S$ gilt:*

1) $u\ (R(s_1), R(s_2), \cdots, R(s_n)) =$
   $k'\ (R(h(a_0)),\ \cdots,\ R(h(a_0 \cdots a_m)),\ R(h(a_0\ \cdots a_m)s_1),\ \cdots, R(h(a_0 \cdots a_m)s_n)) :=$
   $(R(s'_1), R(s'_2), \cdots, R(s'_{n'}))$
2) $u(\hat{h}(w)) = \hat{h}(uw)$
3) *Ist $\hat{h}(w) = (R(s_1), \cdots, R(s_n))$ und sind bei der Berechnung von $u(\hat{h}(w))$ mindestens n Einzeloperationen abschneidend, dann gilt $u(\hat{h}(w)) = \hat{h}(u)$*

Beweis:
1) Für $R(s'_1)$ und $R(s'_2)$ erhält man direkt die Werte der definierten Linksoperation. Bei allen anderen Elemente, die bei der definierten Konstruktion entfernt werden, macht es keinen Unterschied, ob sie bei den Einzelschritten entsprechend der Definition entfernt werden, oder erst nach dem letzten Schritt. Denn da $\sim_{\mathcal{R}}$ linksstabil ist (Lemma 12), bleiben zwei benachbarte Elemente, die $\mathcal{R}$ äquivalent sind, auch nach linksseitigem Aufmultiplizieren eines Wertes $\mathcal{R}$ äquivalent $(bs_i \sim_{\mathcal{R}} bs_{i+1} \ \rightarrow\ abs_i \sim_{\mathcal{R}} abs_{i+1})$.

2) Sei $w = b_0 b_1 b_2 \cdots$ und $\hat{h}(w) = (R(s_1), R(s_2), \cdots, R(s_n))$. Dann gilt:
$\hat{h}(uw)\ =\ k'\ (R(h(a_0)),\ \cdots,\ R(h(a_0 \cdots a_m)),\ R(h(a_0 \cdots a_m b_0)),\ R(h(a_0 \cdots a_m b_1)),\ \cdots)$
Weil $\sim_{\mathcal{R}}$ linksstabil ist, werden alle Elemente mit $xw_i \sim_{\mathcal{R}} xw_{i-1}$ entfernt und man erhält
$\hat{h}(uw)\ =\ k'\ (R(h(a_0)),\ \cdots R(h(a_0 \cdots a_m)),\ R(h(a_0 \cdots a_m s_1)),\ R(h(a_0 \cdots a_m s_2)),\ \cdots)\ R(h(a_0 \cdots a_m s_n))$
Nach 1) gilt schließlich
$\hat{h}(uw)\ =\ u(\hat{h}(w))$

3) Nach 1) gilt
$u(\hat{h}(w))\ =\ k'\ (R(h(a_0)),\ \cdots,\ R(h(a_0 \cdots a_m)),\ R(h(a_0\ \cdots a_m)s_1),\ \cdots, R(h(a_0 \cdots a_m)s_n))$
sind bei der Berechnung von $u(\hat{h}(w))$ mindestens n Einzeloperationen abschneidend, dann werden mindestens die letzten n Elemente entfernt und man erhält
$u(\hat{h}(w))\ =\ k'\ (R(h(a_0)),\ \cdots,\ R(h(a_0 \cdots a_m)))\ =\ \hat{h}(u)$ □

4.2 Stark eindeutiger Büchi Automat

Satz 20 *Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S und ein Homomorphismus h von A^+ auf S, der die ω-reguläre Sprache L stark erkennt. Daraus folgt die Menge der Linked Pairs S_P, die Menge der Konjugationsklassen $\tilde{S}_P$, die Abbildung $\tilde{h} : \rightarrow\ \tilde{S}_P$ mit $P \subseteq \tilde{S}_P$, $L = \tilde{h}^{-1}(P)$, und die Menge der $\mathcal{R}$-Ketten $\hat{S}$.*

Zur Notation: Für $a \in A$ wird für a und $h(a)$ immer nur a geschrieben. $[s,e]$ steht für eine Konjugationsklasse, wobei das Linked Pair (s,e) ein Repräsentant der Klasse ist.

Der folgend definierte Büchi Automat $\mathcal{A} = (Q,\ A,\ \Delta,\ I,\ F)$ ist stark eindeutig und erkennt die Sprache L

$$
\begin{array}{lll}
Q & := & \{([s,e],\ (R(s_1),\cdots,R(s_n)),\ z)\ \mid\ [s,e] \in \tilde{S}_P,\ (R(s_1),...,R(s_n)) \in \hat{S},\ s \sim_{\mathcal{R}} s_n,\ z \in \{0,1\}\} \\
\Delta & := & \{(a\tilde{s},\ a\hat{s},\ 0) \xrightarrow{a} (\tilde{s},\ \hat{s},\ 0)\ \mid\ a\hat{s} \textit{ ist nicht abschneidend}\} \\
 & \cup & \{(a\tilde{s},\ a\hat{s},\ 0) \xrightarrow{a} (\tilde{s},\ \hat{s},\ 1)\ \mid\ a\hat{s} \textit{ ist nicht abschneidend}\} \\
 & \cup & \{(a\tilde{s},\ a\hat{s},\ 1) \xrightarrow{a} (\tilde{s},\ \hat{s},\ 0)\ \mid\ a\hat{s} \textit{ ist abschneidend}\} \\
 & \cup & \{(a\tilde{s},\ a\hat{s},\ 1) \xrightarrow{a} (\tilde{s},\ \hat{s},\ 1)\ \mid\ a\hat{s} \textit{ ist abschneidend}\} \\
\Delta & \subseteq & Q\,x\,A\,x\,Q \\
I & := & \{(\tilde{s},\ \hat{s},\ z)\ \mid\ \tilde{s} \in P\}\ \subseteq\ Q \\
F & := & \{(\tilde{s},\ \hat{s},\ z)\ \mid\ z = 1,\ \tilde{s} = [s,e] \textit{ mit } s \sim_{\mathcal{D}} e\}\ \subseteq\ Q
\end{array}
$$

Beweis: Nach Lemma 7 genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ co-vollständig ist, und jeder gültige Pfad eines ω-Wortes den selben Anfangszustand hat.

- Co-Vollständigigkeit

Sei w ein beliebiges Wort aus A^ω, $w = a_1a_2\cdots$, $w_i = a_{i+1}a_{i+2}\cdots$, $\gamma = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2\cdots$.
Setzt man nun $q_i\ :=\ ([s,e],\ (R(s_1),\cdots,R(s_n)),\ z)$ mit

$$[s,e] := \tilde{h}(w_i)$$

$$(R(s_1),\cdots,R(s_n) := \hat{h}(w_i)$$

$$z := \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_{i+1}\hat{h}(w_{i+1}) \text{ abschneidend ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann gilt nach Lemma 18 $s \sim_{\mathcal{R}} s_n$ für alle q_i. Außerdem ist z mit der Übergangsrelation verträglich. Nachfolgendes Lemma zeigt, dass γ unendlich viele Zustände in F hat. Damit ist für jedes Wort $w \in A^\omega$ ein Pfad in $\mathcal{A}$, mit unendlich vielen Zuständen in F, gegeben. Deshalb ist $\mathcal{A}$ co-vollständig.

Lemma 21 *Sei ein Automat wie oben definiert. Sei weiterhin für ein beliebiges Wort $w \in A^\omega$, der Pfad γ auf diesem Automat wie zuvor beschrieben konstruiert, dann hat dieser Pfad γ unendlich viele Zustände in F.*

Beweis: Sei w assoziiert mit (s,e). Dann gilt: $\exists^\infty\ i,j \in \mathbb{N} : j < i,\ w_i$ und w_j sind assoziiert mit (e,e)

$q_i = (\tilde{s},\hat{s},z)$ mit $\hat{s} = (R(s_1),\cdots,R(s_n))$. Die Transitionen von $\mathcal{A}$ sind nach Definition co-deterministisch und man erhält eindeutig $q_j = (\tilde{s}',\hat{s}',z')$ mit $\hat{s}' = a_{j+1}\cdots a_i\ (R(s_1),\cdots,R(s_{n'-1}),R(s_{n'}) = k'((R(a_{j+1}),\cdots,$ $R(es_{n-1}),R(es_n))$ (Lemma 19). Aus $s_n = e$ folgt $es_n = e$ und es ist $es_{n-1} \leq_{\mathcal{R}} es_n$. Da $\hat{s}'$ eine $\mathcal{R}$-Kette ist gilt auch $,es_n \leq_{\mathcal{R}} es_{n-1}$. So sind die letzten beiden $\mathcal{R}$ Klassen gleich und zwischen q_j und q_i liegt mindestens eine abschneidende Transition und damit ein Zustand mit $z = 1$. Da es unendlich viele Paare $i,\ j$ gibt, gibt es auf γ unendlich viele Zustände mit $z = 1$.

Nach Lemma 16 existiert ein i_{min}, so dass für alle $i > i_{min}$ gilt: (s,e) ist assoziiert mit $w_i \Rightarrow s \sim_{\mathcal{D}} e$

Damit hat Pfad γ unendlich viele Zustände in F. $\square$

- Eindeutige Anfangszustände

Sei w ein beliebiges Wort aus A^ω, w assoziiert zum Linked Pair (t,f), $w = a_1a_2\cdots$, $w_i = a_{i+1}a_{i+2}\cdots$, $\gamma = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2\cdots$ ein gültiger Pfad, und i_{min} sei das Minimum von $\{i \mid h(a_0\cdots a_i) = s\}$.

Betrachtet man auf Pfad γ einen Zustand $q_i \in F$ mit $i > i_{min}$ und $q_i = ([s,e],\ (R(s_1),\cdots,R(s_n)),\ z)$, dann gilt: $\exists x,y \in A^+\ \exists m,n \in \mathbb{N} :\ m < n,\ x = (a_{m+1}\cdots a_i),\ y = (a_{i+1}\cdots a_n),\ h(xy) = f$, w_m und w_n sind assoziiert zu (f,f) (siehe Abbildung 3). Dann gelten folgende Beziehungen:

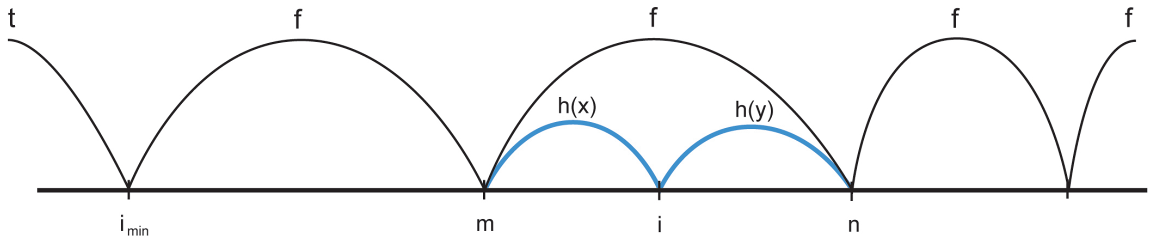


Abbildung 3: Eindeutiger Büchi Automat (Bsp. 1)

w_i ist assoziiert zu $(h(y)f, f)$ damit gilt $R(s_n) = R(h(y)f)$	$\Rightarrow h(y)f \sim_{\mathcal{D}} s_n$
$h(x)\, h(y)f = f \quad \Rightarrow \quad h(y)f \sim_L f$	$\Rightarrow h(y)f \sim_{\mathcal{D}} f$
Nach Bedingungen in F	$\Rightarrow s \sim_{\mathcal{D}} e$
Nach Bedingung in Q gilt $s \sim_{\mathcal{R}} s_n$	$\Rightarrow s \sim_{\mathcal{D}} s_n$
$h(y)f \sim_{\mathcal{R}} s_n$ und $s_n \sim_{\mathcal{R}} s$	$\Rightarrow h(y)f \sim_{\mathcal{R}} s$

Es gilt also $s \sim_{\mathcal{D}} e \sim_{\mathcal{D}} f \sim_{\mathcal{D}} h(y)f$ und $s \sim_{\mathcal{R}} h(y)f$. Nach Lemma 17 folgt dann $(s,e) \sim (h(y)f, f) \in \tilde{h}(w_i)$

Mit $u = a_1 a_2 \cdots a_i$ gilt für den Anfangszustand $q_0 = ([s_0, e_0], \hat{s}_0, z_0)$, nach Definition der Übergangsrelation Δ und mit Lemma 4, $[s_0, e_0] = h(u)[s_i, e_i] = h(u)\tilde{h}(w_i) = \tilde{h}(w)$. Damit ist $[s_0, e_0]$ eindeutig gegeben.

Auch $\hat{s}_0 = (R(s_1), \cdots, R(s_n))$ (und $\hat{s}_1$) ist eindeutig, denn wählt man $p > 1$, $q_p = (\tilde{s}_p, \hat{s}_p, z_p)$, $\hat{s}_p = (R(s'_1), \cdots, R(s'_{n'}))$, erhält man nach Definition der Transitionen in Δ, $(R(s_1), \cdots, R(s_n)) = (a_1 \cdots a_p)\hat{s}_p$. Wählt man p groß genug, hat $(a_1 \cdots a_p)\hat{s}_p$ mehr als n' abschneidende Operationen, und es gilt nach Lemma 19 $(a_1 \cdots a_p)\hat{s}_p = \hat{h}((a_1 \cdots a_p)) = \hat{h}(w)$. p existiert, da γ unendlich viele Zustände in F und damit unendlich viele abschneidende Transitionen hat.

Weil auch $\hat{s}_1$ eindeutig ist, ist nach Definition von Δ auch z_0 eindeutig

Damit ist der Anfangszustand q_0 für w eindeutig gegeben. $\square$

- Ein Zustand hat die Form $([s,e],\ (R(s_1), \cdots, R(s_n)),\ z)$. s ist aus S , e ein idempotentes Element, Die $\mathcal{R}$-Kette hat maximal $|R|$ verschiedene stark monoton fallende Elemente, damit beträgt die maximale Anzahl von $\mathcal{R}$-Ketten $2^{|R|}$ und z ist aus der Menge $\{0,1\}$. $\mathcal{A}$ hat damit maximal $|S| \cdot |E(S)| \cdot 2^{|R|} \cdot 2$ Zustände.

4.3 Stark k-eindeutiger Büchi Automat

Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S und ein Homomorphismus h von A^+ auf S, der die ω-reguläre Sprache L stark erkennt. Daraus folgt die Menge der Linked Pairs S_P, die Menge der Konjugationsklassen $\tilde{S_P}$ und die Abbildung $\tilde{h} : \rightarrow \tilde{S_P}$ mit $P \subseteq \tilde{S_P}$, $L = \tilde{h}^{-1}(P)$.

Zur Notation: Für $a \in A$ wird für a und $h(a)$ immer nur a geschrieben. $[s,e]$ steht für eine Konjugationsklasse, wobei das Linked Pair (s,e) ein Repräsentant der Klasse ist.

Gegeben sei weiterhin die Menge $K := \{(R(r), R(t)) \mid t \leq_{\mathcal{R}} r\}$, und folgende Linksoperation von A^+ auf K:

$$\text{Für } a \in A \text{ ist } a(R(r), R(t)) := \begin{cases} (1) \quad (R(ar), R(at)) & \text{wenn } at <_{\mathcal{R}} ar \\ (2) \quad (R(a), R(ar)) & \text{sonst (abschneidend benannt)} \end{cases}$$

Für $u \in A^+$, $u = a_0 a_1 \cdots a_n$ gilt $u(R(r), R(t)) := (a_0 a_1 \cdots a_{n-1})\ (a_n(R(r), R(t)))$

Die Linksoperation ist wohldefiniert, denn es gilt: $\forall x \in R(r) \forall a \in A : R(ax) = R(ar)$

Die Linksoperation hat folgende Eigenschaft: wird im Laufe der Berechnung von $a_0a_1\cdots a_n(R(r),R(t))$ bei einer Einzeloperation die Bedingung für Abschneiden erfüllt, es gilt also $ar \sim_{\mathcal{R}} at$, dann bleibt diese Bedingung für die folgenden Operation erhalten, wenn statt Operation (2) Operation (1) durchgeführt wird. Da $\sim_{\mathcal{R}}$ linksstabil ist (Lemma 12) kann dies erst durch die abschneidende Operation (2) geändert werden.

Um zu einem k-eindeutigen Büchi Automat zu gelangen wird die Menge K und die darauf definierte Linksoperation modifiziert. Dabei wird nach Erreichen der Bedingung $ar \sim_{\mathcal{R}} at$, die abschneidende Operation (2) solange hinausgezögert, bis eine weitere Bedingung erfüllt ist:

Gegeben ist die Menge $K' := \{(R(r),R(t),f) \mid t \leq_{\mathcal{R}} r,\ f \in E(S)\ (idempotente\ Elemente)\}$, und folgende Linksoperation von A^+ auf K:

$$\text{Für } a \in A \text{ ist } a(R(r),R(t),f) := \begin{cases} (1) \quad (R(ar),R(at),f) & \text{wenn } at <_{\mathcal{R}} ar \text{ oder } ar \neq f \\ (2) \quad (R(a),R(ar),f) & \text{sonst (abschneidend benannt)} \end{cases}$$

Für $u \in A^+$, $u = a_0a_1\cdots a_n$ gilt $u(R(r),R(t)) := (a_0a_1\cdots a_{n-1})\ (a_n(R(r),R(t)))$

Damit ergibt sich dann folgender k-eindeutige Büchi Automat $\mathcal{A}_k$, der die Sprache L erkennt.

$$\begin{array}{lcl}
Q & := & \{([s,e],\ (R(r),R(t),f),\ z) \mid [s,e] \in \tilde{S},\ (R(r),R(t),f) \in K',\ z \in \{0,1\},\ R(s) = R(t)\} \\
\Delta & := & \{(a\tilde{s},\ ak,\ 0) \xrightarrow{a} (\tilde{s},\ k,\ 0) \mid ak \text{ ist nicht abschneidend}\} \\
 & \cup & \{(a\tilde{s},\ ak,\ 0) \xrightarrow{a} (\tilde{s},\ k,\ 1) \mid ak \text{ ist nicht abschneidend}\} \\
 & \cup & \{(a\tilde{s},\ ak,\ 1) \xrightarrow{a} (\tilde{s},\ k,\ 0) \mid ak \text{ ist abschneidend}\} \\
 & \cup & \{(a\tilde{s},\ ak,\ 1) \xrightarrow{a} (\tilde{s},\ k,\ 1) \mid ak \text{ ist abschneidend}\} \\
\Delta & \subseteq & Q\,x\,A\,x\,Q \\
I & := & \{(\tilde{s},\ k,\ z) \mid \tilde{s} \in P\} \subseteq Q \\
F & := & \{([s,e],\ (R(r),R(t),f),\ z) \mid z = 1,\ (s,e) \sim (f,f)\} \subseteq Q
\end{array}$$

- Nach Definition der Übergangsrelation Δ ist der Automat co-deterministisch.
- Co-Vollständigigkeit

Sei w ein beliebiges Wort aus A^ω, w assoziiert zu (t,f), $w = a_1a_2\cdots$, $w_i = a_{i+1}a_{i+2}\cdots$, $\gamma = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2\cdots$. Da w assoziiert mit (s,e) ist, gibt es auf γ unendlich viele Zustände q_i mit w_i ist assoziiert mit (e,e).
Setzt man nun $q_i := ([s,e],\ (R(r),R(t),f),\ z_i)$ mit

$[s,e] := \tilde{h}(w_i)$

$(R(t) := R(s)$

$(R(r) := R(e)$ wenn w_i assoziiert mit (e,e) und $h(a_0\cdots a_i) = s$
sonst entsprechend der Übergangsrelation Δ

$$z_{i-1} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_i(R(r),R(t),f) \text{ abschneidend ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da es unendlich viele Zustände q_i gibt, für die w_i assoziiert mit (e,e) und $h(a_0\cdots a_i) = s$ gilt, ist $R(r)$ für alle Zustände definiert. Die so definierten Werte von $R(r)$ sind mit der Linksoperation auf K' verträglich, da zwischen solchen Zuständen, immer ein Wortfragment u mit $h(u) = e$ liegt.

Weiterhin gilt $s \sim_{\mathcal{R}} t$ nach Definition.

Da jeder Zustand q_i, mit w_i assoziiert mit (e,e) und $h(a_0\cdots a_i) = s$, nach Definition in F liegt, enthält der Pfad γ unendlich viele Zustände in F.

Damit ist für jedes Wort $w \in A^\omega$ ein Pfad in $\mathcal{A}_k$, mit unendlich vielen Zuständen in F, gegeben. Deshalb ist $\mathcal{A}$ co-vollständig.

- Es bleibt zu zeigen, dass am Startzustand $([s,e],\ (R(r),R(t),f),\ z), \tilde{h}(w) = [s,e]$ gilt, dass die Anzahl der gültigen Pfade eines Wortes beschränkt und die gültigen Pfade zueinander disjunkt sind:

Nach Definition von K' hat ein Element dieser Menge die Form $(R(r),R(t),f)$. Für ein Pfad auf $\mathcal{A}_k$ bleibt f konstant. Zwischen zwei abschneidenden Operationen, also zwischen zwei Zuständen in F, muss nach Definition der Linksoperation für das dazwischenliegende Wortfragment $(a_i \cdots a_j)$, $h((a_i \cdots a_j)) = f$ gelten. Hat nun ein Pfad unendlich viele Zustände in F, so markieren die Zustände in F eine Faktorisierung des zugehörigen Wortes w, und an den Zuständen die in F liegen gilt, w_i ist assoziiert mit (f,f). Ist (s,e) an diesen Stellen konjungiert zu (f,f) ist $[s,e] = \tilde{h}(w_i)$ auf dem ganzen Pfad (Lemma 4), insbesondere am Startzustand.

Für jedes Linked Pair,das mit w assoziiert ist, kann ein Pfad entsprechend dem Beweis zur Co-Vollständigkeit konstruiert werden. Weitere gültige Pfade kann es wegen obiger Beobachtung nicht geben. So existiert für jedes Linked Pair in $\tilde{h}(w)$ genau ein gültiger Pfad in $\mathcal{A}_k$. Da die Größe der Konjugationsklassen beschränkt sind, ist auch die Anzahl der gültigen Pfade eines Wortes beschränkt.

Die Übergangsrelation Δ ist nach Definition co-deterministisch. Daraus folgt, dass wenn die Zustände q_i und q'_i zweier Pfade gleich sind, auch alle Zustände q_j und q'_j mit $j < i$ gleich sind. Insbesondere müssten dann die Anfangszustände gleich sein. Daraus folgt aber, dass das Element $(R(r),R(t),f)$ im Anfangszustand beider Pfade gleich ist. Da $R(r)$ und f des Anfangszustandes den Verlauf eines Pfades festlegen, sind dann beide Pfade identisch.

Somit erfüllt $\mathcal{A}_k$ alle Bedingungen für einen k-eindeutigen Büchi Automaten.

- Ein Zustand hat die Form $([s,e],\ (R(r),R(t),f),\ z)$. s ist aus S , e ein idempotentes Elemente, $R(r)$ ist ein Element aus R, $R(t)$ muss bei der Berechnung der Anzahl von Zuständen nicht berücksicht werden, da $R(s) = R(t)$ gefordert ist, f ist ein idempotentes Element und z ist aus der Menge $\{0,1\}$. $\mathcal{A}_k$ hat daher maximal $|S| \cdot |E(S)|^2 \cdot |R| \cdot 2$ Zustände.

4.4 Stark eindeutiger Büchi Automat mit deterministischer Übergangsrelation

Gegeben sei ein endliches Alphabet A, eine endliche Halbgruppe S und ein Homomorphismus h von A^+ auf S, der die ω-reguläre Sprache L stark erkennt. S^1 ist die um ein neutrales Element erweiterte Halbgruppe S. Daraus folgt die Menge der Linked Pairs S_P, die Menge der Konjugationsklassen $\tilde{S_P}$ und die Abbildung $\tilde{h} : A^\omega \ \rightarrow \ \tilde{S_P}$ mit $P \subseteq \tilde{S_P},\ L = \tilde{h}^{-1}(P)$.

Zur Notation: Für $a \in A$ wird für a und $h(a)$ immer nur a geschrieben. $[s,e]$ steht für eine Konjugationsklasse, wobei das Linked Pair (s,e) ein Repräsentant der Klasse ist.

Für Sprachen L, mit $L = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq n} [R(s_i)],\ [R(s_i)] = \{w \ \mid \ \forall (s,e) \text{ assoziiert mit } w : s \in R(s_i)\}$, können stark eindeutige Büchi Automaten mit deterministischer Übergangsrelation konstruiert werden. Hier wird die Klasse der so definierten Sprachen L_R genannt. Für Sprachen $L \in L_R$ gilt $[s,e] \in P \Rightarrow \forall f \in E(S) : [s,f] \in P$. Damit kann die Abbildung $h_R : A^\omega \ \rightarrow \ R$ mit R ist die Menge der $\mathcal{R}$-Klassen, $P' \subseteq R,\ L = h_R^{-1}(P')$ gebildet werden.

Der folgend definierte Büchi Automat $\mathcal{A}_d \ = \ (Q,\ A,\ \Delta,\ I,\ F)$ ist stark eindeutig, hat eine deterministische Übergangsrelation und erkennt die Sprachen $L \in L_R$.

$$
\begin{array}{lcl}
Q & := & \{(R(s),t) \ \mid \ t \in S^1\} \\
\Delta & := & \{(R(s),t) \ \xrightarrow{a} \ (R(s),ta)\} \ \subseteq \ Q\,x\,A\,x\,Q \\
I & := & \{(R(s),1) \ \mid \ R(s) \in P'\} \ \subseteq \ Q \\
F & := & \{(R(s),u) \ \mid \ u \in R(s)\} \ \subseteq \ Q
\end{array}
$$

Beweis: Sei w ein beliebiges Wort aus A^ω, w assoziiert zu (s,e), $w = a_1 a_2 \cdots$ und $w_i = a_1 \cdots a_i$.

Es gilt:

- Die Übergangsrelation Δ ist nach Definition vollständig und deterministisch.
- Für jedes Element in R gibt es genau ein Element in I.
- Nach Lemma 15 gilt für w: Es existiert ein $i_{min} \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j > i_{min}$, $w_j \in R(s)$

Damit hat jedes Wort einen Pfad in $\mathcal{A}_d$ der im Zustand $(R(s), 1) \in I$ beginnt und unendlich viele Zustände in F hat. Wegen der deterministischen Übergangsrelation ist dieser Pfad eindeutig. Für alle anderen Startzustände hat der resultierende Pfad entweder keine Zustände in F (Startzustand $(R(t), 1)$ mit $t <_{\mathcal{R}} s$) oder nur endlich viele Zustände in F (Startzustand $(R(t), 1)$ mit $s <_{\mathcal{R}} t$). □

- Da ein Zustand aus einer $\mathcal{R}$-Klasse und einem Element aus S besteht, hat $\mathcal{A}$ maximal $|S| \cdot |R|$ Zustände.

Für die oben definierte Sprache L_R sind folgende Definitionen äquivalent:

- $L = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq n} [R(s_i)],\ [R(s_i)] = \{w \mid \forall (s,e) \text{ assoziiert mit } w : s \in R(s_i)\}$
- Es existiert ein deterministischer Büchi Automat, der L erkennt, und es existiert ein deterministischer Büchi Automat, der $A^\omega \setminus L$ erkennt
- Es existiert ein deterministischer Automat $\mathcal{A} = (Q, A, \Delta, q_0, \mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} \subseteq 2^Q$ und $L = \{w \mid Q_\gamma \in \mathcal{T},\ Q_\gamma \text{ ist die Menge aller Zustände eines Pfades}\}$

Beweis z.B. in [PP04] □

Literatur

[PP04] D. Perrin, J. Pin. *Infinite Words*. Elsevier Academic Press, 2004

[CM02] O. Carton, M. Michel. *Unambiguous Büchi automata*. Theoretical Computer Science 297, 2002

[BL09] N. Bousquet, C. Löding. *Equivalence and Inclusion Problem for Strongly Unambigous Büchi Automata*. RWTH Aachen, Informatik 7, 2009

[KW08] D. Kähler, T. Wilke. *Complementation, Disambiguation, and Determinization of Büchi Automata Unified*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[A82] A. Arnold. *Rational ω-Languages are non-ambiguous*. Theoretical Computer Science 221-223 North-Holland, 1983

[SH85] R.E. Stearns, H.B. Hunt. *On the equivalence and containment problems for unambiguous regular expressions, regular grammars and finite automata*. SIAM Journal on Computing 14(3) 598-611, 1985

[B84] J.C. Birget. *Iteration of expansions-unambigous expansions*. J. Pure Appl. Algebra 34, 1984

[B62] J.R. Büchi. *On a decision method in the restricted second-order arithmetic* Stanford University Press, 1962

[W00] Pierre Wolper. *Constructing Automata from Temporal Logic Formulars* Universté de Liege, InstitutMontefiore, 2000

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen benutzt zu haben.

(Hermann Pflüger)