Institut für Formale Methoden der Informatik
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D–70569 Stuttgart

Studienarbeit Nr. 2295

Deterministische Intervall-Logik mit Faktor-Modalitäten

Tobias Walter

Studiengang: Informatik

Prüfer: Prof. Dr. Volker Diekert

Betreuer: Dr. Manfred Kufleitner

begonnen am: 12. Juli 2010

beendet am: 11. Januar 2011

CR-Klassifikation: F.4.1, F.4.3

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

Sprachen, die sich in Logik erster Stufe ($\mathrm{FO}[<]$) definieren lassen, wurden von Schützerberger in [Sch1965] und McNaughton und Papert in [MP1971] untersucht. Die Sprachen in $\mathrm{FO}[<]$ lassen sich algebraisch durch die Varietät $\mathbf{A}$ der aperiodischen Monoide charakterisieren. Auf Ebene der Logik entspricht dies auch Intervall-Temporal-Logik (ITL) bzw. Temporal-Logik (TL). Dieses hat insbesondere Anwendungen im Bereich des Model-Checking.

Ausgehend von diesen Resultaten wurden Fragmente von $\mathrm{FO}[<]$ betrachtet. Diese liefern eine bessere Komplexität für relevante Algorithmen. Eine natürliche Einschränkung ist es, Formeln erster Stufe mit nur zwei Variablen zu betrachten. Dieses Fragment bezeichnen wir mit $\mathrm{FO}^2[<]$. $\mathrm{FO}^2[<]$ hat zahlreiche Charakterisierungen. Die syntaktischen Monoide von Sprachen aus $\mathrm{FO}^2[<]$ liegen in der Varietät $\mathbf{DA}$. Als Charakterisierungen von $\mathrm{FO}^2[<]$ auf Ebene der Logik ergeben sich unter anderem Ranker über Buchstaben, $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_a, \mathsf{Y}_a]$ und $\mathrm{TL}[\mathsf{XF}, \mathsf{YP}]$. Eine Übersicht über $\mathbf{DA}$ findet sich in [TT2002], eine generelle Übersicht über die Charakterisierungen von $\mathrm{FO}^2[<]$ findet sich in [DGK2008].

In dieser Arbeit wird $\mathrm{FO}^2[<]$ um ein Prädikat $+1$ erweitert. Es wird sich zeigen, dass dies den Varietäten $\mathbf{DA} * \mathbf{D}$ und $\mathbf{LDA}$ entspricht. Das Wreath Product Principle von Straubing, das in Satz 2.23 bewiesen wird, liefert Anhaltspunkte, dass man von Rankern über Buchstaben zu Rankern über Wörtern übergehen muss. Genauso erahnt man, dass somit $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ ein Logikfragment ist, das die Sprachen aus $\mathrm{FO}^2[<, +1]$ beschreibt. In Kapitel 4 werden diese Vermutungen bewiesen.

Es wird die sogenannte Lokalität von $\mathbf{DA}$ bewiesen. Dies wurde bereits von Almeida in [Alm1996] bewiesen, dort wurde allerdings kein kombinatorischer sondern ein syntaktischer Beweis vorgestellt.

In [LPS2010] wird die Äquivalenz von $\mathrm{FO}^2[<, +1]$ zur dort definierten Automatenklasse $po2dla$ und zu einer Intervall-Logik LITL bewiesen. Die Intervall-Logik LITL unterscheidet sich zu der deterministischen Intervall-Logik mit Faktor-Modalitäten aus dieser Arbeit insofern, dass Intervalle um eine Position verkleinert werden können. Außerdem kann in LITL die Stelle, an der das Intervall aufgeteilt wird, genauer spezifiziert werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden die notwendigen Grundlagen der Algebra und der Theorie der formalen Sprachen gelegt. Es werden Varietäten eingeführt und der Zusammenhang zwischen formalen Sprachen und Varietäten herausgearbeitet. In den Abschnitten 2.6 und 2.7 wird näher auf ein Produkt von Varietäten eingegangen. Insbesondere wird das Wreath Product Principle von Straubing in Abschnitt 2.7 bewiesen.

In Kapitel 3 werden die Grundlagen zu Beschreibungen von Sprachen durch Logiken beschrieben. Es werden die für diese Arbeit notwendigen Logik-Fragmente definiert. Als grundlegende Operatoren, auch für die Logik-Fragmente, werden dazu Ranker über Wörtern definiert. Als Hilfsmittel für spätere Beweise werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele eingeführt.

In Kapitel 4 wird die Äquivalenz der in den Kapiteln 2 und 3 beschriebenen Konzepte untersucht und bewiesen. Für die Bereitstellung der Propositionen 4.9, 4.10 und 4.12 danke ich Alexander Lauser.

In Kapitel 5 werden die Resultate aus Kapitel 4 basierend auf [KKL2011] auf unendliche Wörter übertragen.

2 Algebra und formale Sprachen

In diesem Kapitel werden die notwendigen Grundlagen der Algebra und der Theorie der formalen Sprachen behandelt. In Abschnitt 2.1 behandeln wir Monoide und Halbgruppen. Dann werden in Abschnitt 2.2 Greens Relationen eingeführt. Mit diesen lassen sich bestimmte Eigenschaften von Monoiden oder Halbgruppen beschreiben. In Abschnitt 2.3 werden dann Varietäten eingeführt. Dieses Konzept bildet eines der Beschreibungsmodelle der Sprachen, die in dieser Arbeit untersucht werden. Der Zusammenhang von Varietäten und formalen Sprachen wird in Abschnitt 2.4 erklärt. Dies wird in Abschnitt 2.5 auf unendliche Wörter erweitert. In Abschnitt 2.6 wird dann das Produkt $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ für Varietäten $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ eingeführt, welches in Abschnitt 2.7 genauer für die Varietät $\mathbf{V} * \mathbf{D}$ untersucht wird.

2.1 Algebraische Strukturen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe für das Studium von Monoiden und Halbgruppen geliefert. Wir definieren zunächst Monoide und Halbgruppen.

Definition 2.1. Sei S eine Menge und $\cdot : S \times S \to S$ eine innere Verknüpfung. Wir nennen $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe, falls $\cdot$ assoziativ ist, d. h. es gilt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ für alle Elemente $x, y, z \in S$. Existiert zusätzlich ein Element $1_S \in S$ so, dass $1_S \cdot x = x \cdot 1_S = x$ für alle $x \in S$ gilt, so nennen wir $(S, \cdot)$ ein Monoid.

Ist die Verknüpfung $\cdot$ klar so schreibt man statt $(S, \cdot)$ auch S. Das Verknüpfungssymbol $\cdot$ wird auch oft weggelassen. Man schreibt also $xy := x \cdot y$. Für das n-fache Produkt von x mit sich selbst schreiben wir x^n. Für eine Halbgruppe S definieren wir das zugehörige Monoid $S^1 := S \cup \{1_S\}$, indem wir formal eine 1 adjungieren. Ein Element $e \in S$ heißt idempotent, falls $e^2 = e$. Für die Menge der Idempotenten von S schreiben wir $E(S)$. Sei S nun endlich. Zu jedem Element $x \in S$ gibt es eine Potenz k, so dass x^k idempotent ist. Man kann beispielsweise $k = |S|!$ wählen. Wir schreiben für dieses Idempotente dann auch x^ω.

Lemma 2.2. *Sei S eine endliche Halbgruppe, $n > |S|$ und $s_1, \ldots, s_n \in S$. Dann wird eines der Produkte $s_1 \ldots s_i$ für $1 \leq i \leq n$, von einem Idempotent $e \in E(S)$ stabilisiert. D. h. es existiert ein Index $j \in \mathbb{N}$ mit $s_1 \ldots s_j \cdot e = s_1 \ldots s_j$.*

Beweis. Da $n > |S|$ ist, gibt es $i, j \in \mathbb{N}, j < i$ mit $s_1 \ldots s_j = s_1 \ldots s_i$. Setze $e := (s_{j+1} \ldots s_i)^\omega$. Es ist $s_1 \ldots s_j e = s_1 \ldots s_j$. □

Für zwei Halbgruppen $(S, \cdot)$ und $(S', \odot)$ wird das kartesische Produkt $S \times S'$ zu einer Halbgruppe durch die Verküpfung

$$(s_1, s_1') * (s_2, s_2') = (s_1 \cdot s_2, s_1' \odot s_2').$$

Wir nennen $S \times S'$ das direkte Produkt von S mit S'. Sind S, S' Monoide, so ist das direkte Produkt $S \times S'$ auch ein Monoid mit Einselement $(1_S, 1_{S'})$.

Wir nennen außerdem ein Element $s \in S$ regulär, falls es ein $\overline{s} \in S$ gibt mit $s\overline{s}s = s$.

Definition 2.3. Sei $\mu : S \to S'$ eine Abbildung zwischen den Halbgruppen $(S, \cdot)$ und $(S', \odot)$. Wir nennen μ einen Halbgruppenhomomorphismus, falls $\mu(x \cdot y) = \mu(x) \odot \mu(y)$ für alle $x, y \in S$ gilt. Sind S, S' Monoide, so nennen wir μ einen Monoidhomomorphismus, falls μ ein Halbgruppenhomomorphismus ist und zusätzlich $\mu(1_S) = 1_{S'}$ gilt.

Homomorphismen sind ein wichtiges Mittel um algebraische Strukturen zu untersuchen. Mit ihnen lassen sich auch die folgenden Begriffe definieren.

Definition 2.4. Seien S, T Monoide. Wir nennen T einen Untermonoid von S, falls es einen injektiven Monoidhomomorphismus $\mu : T \to S$ gibt. Wir schreiben dann $T < S$. T heißt Quotient von S, falls es einen surjektiven Monoidhomomorphismus $\mu : S \to T$ gibt. T heißt Divisor von S, falls T der Quotient eines Untermonoids von S ist. Wir schreiben dann $T \prec S$.

Analog lassen sich Unterhalbgruppen, Quotienten und Divisoren von Halbgruppen definieren. Wie man schnell nachrechnen kann, ist $\prec$ transitiv. Außerdem folgt aus $T < S$ bereits $T \prec S$. Die Definition von Untermonoiden (Unterhalbgruppen) entspricht der üblichen Definition als abgeschlossene Teilmenge, die im Falle von Monoiden das neutrale Element enthalten muss, bis auf Isomorphie.

2.2 Greens Relationen

In diesem Abschnitt führen wir Greens Relationen ein. Green untersuchte diese Relationen in [Gre1951] erstmals.

Definition 2.5. Sei S eine Halbgruppe und $s, t \in S$. Wir definieren folgende Quasiordnungen:

$$\begin{aligned}
s \leq_{\mathcal{R}} t \quad &\Leftrightarrow \quad s = tu \text{ für ein } u \in S^1, \\
s \leq_{\mathcal{L}} t \quad &\Leftrightarrow \quad s = ut \text{ für ein } u \in S^1, \\
s \leq_{\mathcal{J}} t \quad &\Leftrightarrow \quad s = utv \text{ für } u, v \in S^1, \\
s \leq_{\mathcal{H}} t \quad &\Leftrightarrow \quad s \leq_{\mathcal{R}} t \text{ und } s \leq_{\mathcal{L}} t.
\end{aligned}$$

Die Interpretation von $\leq_{\mathcal{R}}, \leq_{\mathcal{L}}, \leq_{\mathcal{J}}$ als Präfix, Suffix und Faktor ist äquivalent zu folgender Beschreibung als Teilmengenbeziehungen von Idealen.

$$\begin{aligned}
s \leq_{\mathcal{R}} t \quad &\Leftrightarrow \quad sS^1 \subseteq tS^1 \\
s \leq_{\mathcal{L}} t \quad &\Leftrightarrow \quad S^1 s \subseteq S^1 t \\
s \leq_{\mathcal{J}} t \quad &\Leftrightarrow \quad S^1 s S^1 \subseteq S^1 t S^1
\end{aligned}$$

Die von diesen Quasiordnungen erzeugten Äquivalenzrelationen $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$ nennen wir Greens Relationen. Die Äquivalenzklassen nennen wir dann $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$-, $\mathcal{J}$-, $\mathcal{H}$-Klassen.

Lemma 2.6. *Die Relationen $\leq_{\mathcal{R}}$ und $\leq_{\mathcal{L}}$ (bzw. $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}$) kommutieren.*

Beweis. Vergleiche [Pin1986]. □

Wir definieren eine weitere Äquivalenzrelation $\mathcal{D}$ als die kleinste Äquivalenzrelation, die sowohl $\mathcal{R}$ als auch $\mathcal{L}$ enthält. Wir schreiben dafür $\mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L}$. Ausgehend von Lemma 2.6 kann man folgern, dass $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ ist. Ein detaillierter Beweis findet sich wieder in [Pin1986].

Wir nennen eine $\mathcal{D}$-Klasse regulär, falls alle ihre Elemente regulär sind.

2.3 Varietäten

Definition 2.7. Eine Halbgruppenvarietät $\mathbf{V}$ ist eine Klasse von endlichen Halbgruppen, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Ist $S \in \mathbf{V}$ und $T \prec S$, so ist auch $T \in \mathbf{V}$
2. $\{1\} \in \mathbf{V}$
3. Für $S, T \in \mathbf{V}$ ist $S \times T \in \mathbf{V}$

Man beachte, dass mit Punkt 1 bereits folgt, dass Unterhalbgruppen und Quotienten von Halbgruppen aus $\mathbf{V}$ wieder in $\mathbf{V}$ sind. Eine Monoidvarietät lässt sich analog definieren. Man ersetze dazu jeweils in der Definition den Begriff der Halbgruppe durch den Begriff des Monoids.

Zu einer Monoidvarietät $\mathbf{V}$ lässt sich eine Halbgruppenvarietät $\mathbf{LV}$ definieren, die Lokalisierung von $\mathbf{V}$. Es ist $\mathbf{LV} = \{S \mid eSe \in \mathbf{V}\ \forall e \in E(S)\}$.

Sei $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Menge von Variablen und seien $u, v \in V^*$. Sei M ein Monoid. Wir sagen, M erfüllt die Gleichung $u = v$, falls für alle Homomorphismen $\mu : V^* \to M$ gilt $\mu(u) = \mu(v)$. Dies entspricht auch der Intuition, man darf für alle Variablen ein Element aus M einsetzen.

Beispiel 2.8. Sei $V = \{x, y\}$. Die Gleichung $xy = yx$ erfüllen genau die kommutativen Monoide.

Zu einer Menge von Gleichungen $u_1 = v_1, \dots, u_k = v_k$ definieren wir die Menge von Monoiden, die diese Gleichungen erfüllen, als $[\![u_1 = v_1, \dots, u_k = v_k]\!]$. Diese Menge ist eine Varietät. Um in Gleichungen auch die Potenz x^ω benutzen zu können, erweitern wir dieses Konzept. Wir sagen, M erfüllt die Familie von Gleichungen $(u_i = v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ultimativ, falls ein Index $j \in \mathbb{N}$ existiert, sodass M die Gleichungen $(u_i = v_i)_{i\geq j}$ erfüllt. Für die Klasse der Monoide, die $(u_i = v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ultimativ erfüllt, schreiben wir analog $[\![(u_i = v_i)_{i\in\mathbb{N}}]\!]$. Auch diese bildet eine Varietät. Genauer gilt sogar:

Lemma 2.9. *Jede Varietät lässt sich von einer Familie von Gleichungen ultimativ definieren.*

Der Beweis zu diesen Behauptungen findet sich beispielsweise in [Pin1986].

Beispiel 2.10. Die Varietät $[\![(uv)^\omega u(uv)^\omega = (uv)^\omega]\!]$ lässt sich beschreiben durch die ultimativ definierte Varietät $[\![((uv)^{i!}u(uv)^{i!} = (uv)^{i!})_{i\in\mathbb{N}}]\!]$.

Wir führen einige wichtige Varietäten ein.

Wir nennen ein Monoid M aperiodisch, falls $x^\omega = x^{\omega+1}$ für alle $x \in M$ gilt. Wir setzen $\mathbf{A} = [\![x^\omega = x^{\omega+1}]\!]$. $\mathbf{A}$ ist also die Varietät der aperiodischen Monoide.

Wir setzen $\mathbf{DA} = [\![(uv)^\omega u(uv)^\omega = (uv)^\omega]\!]$. Weitere Gleichungsbeschreibungen von $\mathbf{DA}$ sind $[\![(uv)^\omega v(uv)^\omega = (uv)^\omega]\!]$ und $[\![(uvw)^\omega v(uvw)^\omega = (uvw)^\omega]\!]$. Der Bezeichner $\mathbf{DA}$ kommt von einer weiteren Charakterisierung dieser Varietät, jede reguläre $\mathcal{D}$-Klasse ist ein aperiodisches Monoid. Diese Varietät hat viele Charakterisierungen. Für weitere Informationen und Beweise der Behauptungen vergleiche [TT2002] und [DGK2008]. Eine wichtige Eigenschaft von $\mathbf{DA}$ ist, dass Elemente in $\mathbf{DA}$ aperiodisch sind.

Lemma 2.11. *Es ist* $\mathbf{DA} \subseteq \mathbf{A}$.

Beweis. Sei $M \in \mathbf{DA}$ und $x \in M$. Wähle $u = v = x$. Dann gilt

$$x^\omega = (uv)^\omega = (uv)^\omega u(uv)^\omega = x^\omega x x^\omega = x x^\omega = x^{\omega+1}.$$

Also ist $M \in \mathbf{A}$. □

Als stärkere Aussage können wir mit demselben Beweisprinzip auch folgendes Lemma beweisen.

Lemma 2.12. *Es ist* $\mathbf{LDA} \subseteq \mathbf{A}$.

Beweis. Sei $x \in S \in \mathbf{LDA}$. Setze $e := x^\omega$. eSe ist in $\mathbf{DA}$. Also gilt nach Lemma 2.11

$$x^\omega = (exe)^\omega = (exe)^{\omega+1} = x^\omega(exe) = x^{\omega+1}.$$

Also ist $S \in \mathbf{A}$. □

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $\mathbf{D}_k = [\![xy_1 \dots y_k = y_1 \dots y_k]\!]$. Intuitiv können sich Elemente aus $\mathbf{D}_k$ also die letzten k Zeichen merken. Wir setzen nun

$$\mathbf{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{D}_k.$$

Dies ist wieder eine Varietät, da $\mathbf{D}_k \subseteq \mathbf{D}_{k+1}$ ist. Man beachte, dass insbesondere keine nicht-trivialen Monoide M in $\mathbf{D}_k$ liegen, denn $x = x1_M = x1_M^k = 1_M^k = 1_M$ für alle $x \in M$.

Wir setzen $\mathbf{I} = \{1\}$. $\mathbf{I}$ ist also die triviale Varietät. Wie oben definiert ist dann $\mathbf{LI}$ die Lokalisierung von $\mathbf{I}$. Es gilt insbesondere folgendes Lemma.

Lemma 2.13. *Es ist* $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{LI}$.

Beweis. Sei $M \in \mathbf{D}$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $M \in \mathbf{D}_k$ ist. Sei $e \in E(M)$ ein Idempotent und $s \in M$. Es ist $ese = ese^k = e^k = e$. Also ist $eMe = \{e\} \in \mathbf{I}$ und damit $M \in \mathbf{LI}$. □

2.4 Formale Sprachen

Sei Γ eine endliche Menge. Wir nennen Γ dann ein Alphabet, Elemente von Γ nennen wir Buchstaben. Eine Teilmenge L des freien Monoids Γ^* heißt (formale) Sprache. Elemente von Γ^* nennen wir Wörter. Für ein Wort $u = a_1 \dots a_k$ definieren wir das Teilwort $u[i;j] = a_i \dots a_j$ für $1 \leq i \leq j \leq k$. Für den Buchstaben an Stelle i schreiben wir $u(i) = u[i;i]$. Mit ε bezeichnen wir das leere Wort. Ein Wort v heißt Präfix von u, falls ein Wort w existiert, mit $u = vw$. v heißt Suffix von u, falls ein Wort w existiert, mit $u = wv$. v heißt Faktor, oder Teilwort, von u, falls Wörter w_1, w_2 existieren mit $u = w_1 v w_2$. Für ein Wort $u \in \Gamma^*$ bezeichnen wir mit $\mathrm{alph}(u)$ das Alphabet des Wortes u, d. h. jene Buchstaben, die in u vorkommen. Mit

$$\mathrm{alph}_k(u) = \left\{ v \in \Gamma^k \mid u = wv\tilde{w} \text{ mit } w, \tilde{w} \in \Gamma^* \right\}$$

bezeichnen wir die Faktoren der Länge k von u. Es ist also $\mathrm{alph}(u) = \mathrm{alph}_1(u)$. Wir konstruieren nun zu jeder Sprache L ein Monoid. Zuerst definieren wir dazu eine Kongruenz.

Definition 2.14. Sei L eine Sprache. Wir definieren die syntaktische Kongruenz $\equiv_L$ durch

$$u \equiv_L v \Leftrightarrow \forall p, q \in \Gamma^* : \; puq \in L \Leftrightarrow pvq \in L$$

Wir rechnen schnell nach, dass $\equiv_L$ eine Äquivalenzrelation ist. $\equiv_L$ ist auch stabil, d. h. aus $u \equiv_L u'$ und $v \equiv_L v'$ folgt $uv \equiv_L u'v'$, da

$$puvq \in L \Leftrightarrow pu(vq) \in L \Leftrightarrow pu'(vq) \in L \Leftrightarrow (pu')vq \in L \Leftrightarrow pu'v'q \in L.$$

Da $\equiv_L$ damit eine Kongruenz ist, ist $\Gamma^*/\equiv_L$ ein Monoid. Wir nennen dieses Monoid das syntaktische Monoid von L und bezeichnen es mit $\mathrm{Synt}(L)$. Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen Sprachen und Monoiden her.

Definition 2.15. Eine Sprache $L \subseteq \Gamma^*$ wird von einem Monoid M erkannt, falls ein Monoidhomomorphismus $\mu : \Gamma^* \to M$ existiert, sodass $\mu^{-1}(\mu(L)) = L$ ist.

Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass $u \in L \Leftrightarrow \mu(u) \in \mu(L)$. Die Teilmenge $\mu(L) \subseteq M$ erkennt also die Sprache. Man sieht, dass L von M via μ erkannt wird, falls es ein $P \subseteq M$ gibt mit $\mu^{-1}(P) = L$. Ist μ surjektiv, so gilt bereits $P = \mu(L)$.

Lemma 2.16. $\mathrm{Synt}(L)$ *erkennt L via der Projektion* $\pi : \Gamma^* \to \mathrm{Synt}(L), u \mapsto [u]_{\equiv_L}$.

Beweis. Sei $\pi(u) \in \pi(L)$, dann gibt es ein $v \in L$, sodass $\pi(u) = \pi(v)$. Also gilt $[u]_{\equiv_L} = [v]_{\equiv_L}$. Da $v \in L$ ist, impliziert dies nach Definition (mit $p = q = \varepsilon$), dass $u \in L$ ist. Also erkennt $\mathrm{Synt}(L)$ die Sprache L via der Projektion π. □

Ohne Beweis wird noch folgende Charakterisierung des syntaktischen Monoids vorgestellt.

Lemma 2.17. *Sei $L \subseteq \Gamma^*$ und $\varphi : \Gamma^* \to M$ ein Monoidhomomorphismus, der L erkennt, dann ist* $\mathrm{Synt}(L) \prec M$.

Das syntaktische Monoid ist also das kleinste Monoid, das L erkennt. Über das Transformationsmonoid eines endlichen Automaten zeigt man dann auch, dass L regulär ist genau dann, wenn L von einem endlichen Monoid erkannt wird.

Lemma 2.18. *Seien S_1, S_2 Monoide und L_1, L_2 Sprachen, sodass L_i von S_i ($i \in \{1,2\}$) erkannt wird. Dann wird $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2$ von $S_1 \times S_2$ und $\Gamma^* \setminus L_1$ von S_1 erkannt.*

Beweis. Seien $\mu_i : \Gamma^* \to S_i$ Homomorphismen und $P_i \subseteq S_i$ mit $\mu_i^{-1}(P_i) = L_i$ für $i \in \{1,2\}$. Es ist $\Gamma^* \setminus L_1 = \mu_1^{-1}(S_1 \setminus P_1)$, also wird $\Gamma^* \setminus L_1$ von S_1 erkannt. Setze $P := P_1 \times P_2$ und $\mu : \Gamma^* \to S_1 \times S_2, u \mapsto (\mu_1(u), \mu_2(u))$. Es ist $\mu^{-1}(P) = \mu_1^{-1}(P_1) \cap \mu_2^{-1}(P_2) = L_1 \cap L_2$. Für $\tilde{P} := (S_1 \times P_2) \cup (P_1 \times S_2)$ gilt $\mu^{-1}(\tilde{P}) = \mu_1^{-1}(P_1) \cup \mu_2^{-1}(P_2) = L_1 \cup L_2$. Dies zeigt die Behauptung. □

Analog lässt sich auch die Erkennbarkeit von Sprachen mit Halbgruppen definieren, man muss in der Definition nur Γ^* durch Γ^+ und Monoid durch Halbgruppe ersetzen. Obige Resultate lassen sich dann auch auf Halbgruppen übertragen.

Für eine Sprache L und eine Varietät $\mathbf{V}$ sagen wir $L \in \mathbf{V}$, falls $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{V}$. Nach obigem ist dies äquivalent dazu, dass ein Monoid $M \in \mathbf{V}$ existiert, das L erkennt. Die Sprachen, die mit einer Varietät beschrieben werden, sind also insbesondere regulär. Mit Lemma 2.18 sieht man, dass für Sprachen $L_1, L_2 \in \mathbf{V}$ auch $\Gamma^* \setminus L_1, L_1 \cap L_2, L_1 \cup L_2 \in \mathbf{V}$ sind.

Wir nennen eine Varietät $\mathbf{V}$ entscheidbar, falls bei gegebener reguläre Sprache L das Problem entscheidbar ist, ob $L \in \mathbf{V}$. Es gilt folgende Eigenschaft:

Lemma 2.19. *Ist* $\mathbf{V}$ *eine Varietät von Monoiden und ist* $\mathbf{V}$ *entscheidbar, dann ist auch* $\mathbf{LV}$ *entscheidbar.*

Beweis. Klar. $\square$

2.5 Unendliche Wörter

Für ein endliches Alphabet Γ setzen wir

$$\Gamma^\omega = \{a_1 a_2 \ldots \mid a_i \in \Gamma\}$$

als die Menge der unendlichen Wörter über Γ. Formal ist ein unendliches Wort eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach Γ. Um endliche und unendliche Wörter gleichzeitig zu betrachten, setzen wir

$$\Gamma^\infty = \Gamma^* \cup \Gamma^\omega.$$

Analog lassen sich für Teilmengen $A \subseteq \Gamma^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ die Mengen A^∞ und A^ω definieren. Wir sagen auch hier, dass eine Teilmenge L von Γ^∞ eine Sprache (über unendlichen Wörtern) heißt. Für $\alpha \in \Gamma^\infty$ setzen wir

$$\mathrm{alph}_k(\alpha) = \left\{ v \in \Gamma^k \mid \alpha = wv\beta \text{ mit } w \in \Gamma^*, \beta \in \Gamma^\infty \right\}.$$

Wir schreiben $\mathrm{im}_k(\alpha)$ für jene Faktoren in $\mathrm{alph}_k(\alpha)$, die unendlich oft in α vorkommen. Für $A \subseteq \Gamma^k$ definieren wir

$$A^{\mathrm{im}_k} = \{\alpha \in \Gamma^\infty \mid \mathrm{im}_k(\alpha) = A\}.$$

Um Erkennbarkeit auf unendliche Wörter zu übertragen, benutzt man sogenannte linked pairs. Ein Tupel $(s, e) \in M \times M$ für ein Monoid M heißt linked pair, falls $se = s$ und $e^2 = e$ gilt. Sei $h : \Gamma^* \to M$ ein surjektiver Homomorphismus und $L \subseteq \Gamma^\infty$ eine Sprache. Falls der Homomorphismus h klar ist, schreiben wir $[s]$ für die Menge $h^{-1}(s)$ mit $s \in M$. h erkennt L schwach, falls

$$L = \bigcup \{[s][e]^\omega \mid (s, e) \text{ ist linked pair und } [s][e]^\omega \subseteq L\}.$$

h erkennt L stark, falls

$$L = \bigcup \{[s][e]^\omega \mid (s,e) \text{ ist linked pair und } [s][e]^\omega \cap L \neq \emptyset\}\,.$$

Sei $e \in M$ ein Idempotent. Die Menge P_e besteht aus allen Produkten der Form

$$x_0 f_1 \ldots x_{m-1} f_m x_m$$

mit Idempotenten $f_1, \ldots, f_m \in h(\Gamma^+)$ und Elementen $x_0, \ldots, x_m \in M$, die die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned}
&e \leq_{\mathcal{R}} x_0 f_1 \\
&e \leq_{\mathcal{J}} f_i x_i f_{i+1} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq m-1 \\
&e \leq_{\mathcal{L}} f_m x_m.
\end{aligned}$$

Wir übernehmen die Verknüpfung $\circ_k$ aus [KKL2011]. Für $u \in \Gamma^*$, $k \geq 1$ und $\alpha \in \Gamma^\infty$ sei

$$w \circ_k \alpha = vx\beta \text{ falls es ein } x \in \Gamma^{k-1} \text{ gibt mit } w = vx \text{ und } \alpha = x\beta.$$

Außerdem setzen wir $w \circ_k \varepsilon = w$ und $\varepsilon \circ_k \alpha = \alpha$. In allen anderen Fällen sei diese Verknüpfung undefiniert. Wir erweitern diese Verknüpfung auch auf Mengen. Sei $A \subseteq \Gamma^*$. Wir setzen

$$\begin{aligned}
A^{*_k} &= \{w_1 \circ_k \ldots \circ_k w_n \mid n \geq 0, w_i \in A\} \\
A^{\omega_k} &= \{w_1 \circ_k w_2 \circ_k \ldots \mid w_i \in A\} \\
A^{\infty_k} &= A^{*_k} \cup A^{\omega_k}.
\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich jetzt die strikte k-Faktor-Topologie definieren. Eine Basis von dieser Topologie ist gegeben durch die Mengen $u \circ_k A^{\infty_k} \cap A^{\mathrm{im}_k}$ mit $u \in \Gamma^*$ und $A \subseteq \Gamma^k$.

2.6 Die Operation $\mathbf{V} * \mathbf{W}$

Zunächst führen wir in diesem Abschnitt das semidirekte Produkt und das Kranzprodukt ein. Mit Hilfe dieser Produkte lässt sich das Produkt $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ für Varietäten $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ definieren.

Seien $(S, \odot)$ und $(T, \cdot)$ Halbgruppen. Wir nennen eine Abbildung $(t,s) \mapsto ts$ von $T \times S$ in S eine Linksoperation, falls

$$\begin{aligned}
(t_1 \cdot t_2)s &= t_1(t_2 s) \\
t(s_1 \odot s_2) &= ts_1 \odot ts_2
\end{aligned}$$

für alle $s, s_1, s_2 \in S$ und $t, t_1, t_2 \in T$ gilt. Wir sagen dann, dass T auf S von links operiert. Man schreibt oft auch ${}^t s$ für die Operation von t auf s. Sei nun eine solche Linksoperation gegeben.

Wir definieren das semidirekte Produkt $S * T$ von S mit T auf der Menge $S \times T$ zusammen mit der Multiplikation

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 \odot {}^{t_1}s_2, t_1 \cdot t_2).$$

Diese Verknüpfung ist assoziativ, da

$$\begin{aligned}
((s_1,t_1)(s_2,t_2))(s_3,t_3) &= (s_1 \odot {}^{t_1}s_2, t_1 \cdot t_2)(s_3,t_3) & &= (s_1 \odot {}^{t_1}s_2 \odot {}^{t_1 \cdot t_2}s_3, t_1 \cdot t_2 \cdot t_3) \\
&= (s_1 \odot {}^{t_1}(s_2 \odot {}^{t_2}s_3), t_1 \cdot t_2 \cdot t_3) & &= (s_1,t_1)((s_2 \odot {}^{t_2}s_3, t_2 \cdot t_3) \\
&= (s_1,t_1)((s_2,t_2)(s_3,t_3))
\end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass $S * T$ eine Halbgruppe ergibt. Ist S ein Monoid, so sagen wir, dass die Linksoperation unitär ist, falls ${}^t1_S = 1_S$ für alle $t \in T$ gilt. In diesem Fall nennen wir das semidirekte Produkt $S * T$ unitär in S.

Wir definieren nun ein spezielles semidirektes Produkt. Seien dazu wieder $(S, \odot)$ und $(T, \cdot)$ Halbgruppen. Die Menge der Abbildungen S^{T^1} von T^1 nach S wird zu einem Monoid durch

$$(f \odot g)(t) := f(t) \odot g(t)$$

für $f, g \in S^{T^1}$ und $t \in T^1$. Wir betrachten nun die Abbildung $T \times S^{T^1} \to S^{T^1}$, $(t, f) \mapsto {}^tf$, wobei

$${}^tf(\tilde{t}) := f(\tilde{t} \cdot t) \quad \text{für } \tilde{t} \in T^1$$

gesetzt wird. Diese Abbildung ist eine Linksoperation von T auf S^{T^1}. Falls S ein Monoid ist, so ist diese Operation unitär. Das semidirekte Produkt $S^{T^1} * T$ nennen wir das Kranzprodukt von S mit T. Wir schreiben dafür $S \wr T$. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen dem semidirekten Produkt und dem Kranzprodukt:

Lemma 2.20. *Seien S und T Halbgruppen. Dann ist jedes semidirekte Produkt zwischen S und T, das unitär in S ist, eine Unterhalbgruppe von $S \wr T$.*

Beweis. Siehe [Pin1986]. □

Wir können mit diesen Begriffen nun eine Definition von $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ geben.

Definition 2.21. Sei $\mathbf{V}$ eine Monoidvarietät und $\mathbf{W}$ eine Halbgruppenvarietät. $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ sei die Menge aller Divisoren von Halbgruppen der Form $S \wr T$ für $S \in \mathbf{V}$ und $T \in \mathbf{W}$.

Eine technische Rechnung zeigt nun, dass $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ eine Varietät von Halbgruppen ist. Falls $S \in V$ ist, dann ist auch $S^{T^1} \in \mathbf{V}$, da dies nur ein $|T^1|$-faches direktes Produkt von S ist. Man kann nach Lemma 2.20 die Varietät $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ also auch als die Menge aller Divisoren von semidirekten Produkten $S * T$, die unitär in S sind, mit $S \in \mathbf{V}$ und $T \in \mathbf{W}$ definieren. Dies ist auch der Grund für die Schreibweise $\mathbf{V} * \mathbf{W}$.

2.7 Die Varietät $\mathrm{V} * \mathrm{D}$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Varietät $\mathbf{V} * \mathbf{D}$ genauer. Das zentrale Resultat dieses Abschnittes ist es, eine Beschreibung der Sprachen in $\mathbf{V} * \mathbf{D}$ zu erhalten. Dies liefert eine greifbare Beschreibung von $\mathbf{V} * \mathbf{D}$.

Zunächst definieren wir die Rhodes-Expansion. Diese weist jedem Wort ein Fensterwort zu. Sei $k \in \mathbb{N}$ die Fenstergröße. Wir definieren uns dann ein neues Alphabet $\Sigma_k = (\Gamma \cup \{\triangleleft, \triangleright\})^k$. Wir definieren die Funktion $\tilde{\rho}_k : (\Gamma \cup \{\triangleleft, \triangleright\})^* \to \Sigma_k^*$ durch

$$\tilde{\rho}_k(u) = \begin{cases} u[1;k]\tilde{\rho}_k(u[2;|u|]) & \text{falls } |u| \geq k \\ \varepsilon & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Rhodes-Expansion $\rho_k : \Gamma^* \to \Sigma_k^*$ ist dann gegeben durch $\rho_k(u) = \tilde{\rho}_k\left(\triangleright^k u \triangleleft^k\right)$. Das Wort $\rho_k(u)$ besteht also aus Fenstern der Größe k die ein Teilwort von u zeigen. Diese Fenster passen jeweils zusammen, d. h. man kann sich $\rho_k(u)$ so vorstellen, dass über das Wort u das Fenster der Größe k nach rechts geschoben wird.

Beispiel 2.22. Sei $k = 2$, $\Gamma = \{a, b\}$, $u = abbba$. Dann ist $\rho_k(u) = \tilde{\rho}_k(\triangleright \triangleright u \triangleleft \triangleleft) = (\triangleright\triangleright)(\triangleright a)(ab)(bb)(bb)(ba)(a\triangleleft)(\triangleleft\triangleleft)$.

Es gilt nun folgender Zusammenhang zwischen Sprachen aus $\mathbf{V} * \mathbf{D}$ und $\mathbf{V}$, welches als Wreath Product Principle von Straubing bekannt ist.

Satz 2.23. *Sei $L \subseteq \Gamma^*$. $L \in \mathbf{V} * \mathbf{D}$ genau dann, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und eine Sprache $K \subseteq \Sigma_k^*$ gibt, mit $K \in \mathbf{V}$ und $\rho_k^{-1}(K) = L$.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Es gibt $S \in \mathbf{V}$ und $\varphi : \Sigma_k^* \to S$, sodass φ die Sprache K erkennt. Sei $T^1 = T = (\Sigma^{\leq k}, \cdot)$ mit der Verknüpfung $t_1 \cdot t_2 := \mathrm{suffix}_k(t_1 t_2)$. Damit ist $T \in D_k$. Wir zeigen, dass $L = \rho_k^{-1}(K)$ von $S \wr T$ erkannt wird. Definiere $s_\varphi : T \to S, t \mapsto \varphi\left(\mathrm{suffix}_k\left(\triangleright^k t\right)\right)$ und $\psi : \Gamma^+ \to S \wr T$ durch $a \mapsto (s_\varphi, a)$. Wir zeigen, $\psi(u) \in \psi(L) \Rightarrow u \in L$, also ψ erkennt L. Sei also $\psi(a_1 \dots a_n) \in \psi(L)$. Dann gibt es ein Wort $b_1 \dots b_m \in L$ mit $\psi(a_1 \dots a_n) = \psi(b_1 \dots b_m)$. Es ist

$$\begin{aligned} \psi(a_1 \dots a_n) &= (s_\varphi \cdot {}^{a_1}s_\varphi \dots {}^{a_1 \dots a_{n-1}}s_\varphi, \mathrm{suffix}_k(a_1 \dots a_n)) \\ &= (s_\varphi \cdot {}^{b_1}s_\varphi \dots {}^{b_1 \dots b_{m-1}}s_\varphi, \mathrm{suffix}_k(b_1 \dots b_m)) \\ &= \psi(b_1 \dots b_m) \end{aligned}$$

Es gilt somit insbesondere

$$\begin{aligned} (s_\varphi \cdot {}^{a_1}s_\varphi \dots {}^{a_1 \dots a_{n-1}}s_\varphi)(1_T) &= \prod_{i=0}^{n-1} \varphi\left(\mathrm{suffix}_k\left(\triangleright^k a_1 \dots a_i\right)\right) \\ &= \prod_{i=0}^{m-1} \varphi\left(\mathrm{suffix}_k\left(\triangleright^k b_1 \dots b_i\right)\right) \\ &= (s_\varphi \cdot {}^{b_1}s_\varphi \dots {}^{b_1 \dots b_{m-1}}s_\varphi)(1_T) \end{aligned}$$

Falls $n < k$ oder $m < k$ ist, so gilt bereits $a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_m$. Wir können also annehmen, dass $n > k$ und $m > k$ gilt. Damit gilt $a_{n-k+1} \dots a_n = b_{m-k+1} \dots b_m$. Insbesondere ist also $\mathrm{suffix}_k(\rhd^k a_1 \dots a_n \lhd^i) = \mathrm{suffix}_k(\rhd^k b_1 \dots b_m \lhd^i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Zusammen ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho_k(a_1 \dots a_n)) &= \prod_{i=0}^{n+k} \varphi\left(\mathrm{suffix}_k\left(\rhd^k a_1 \dots a_i\right)\right) \text{ mit } a_i = \lhd \text{ für } i > n \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} \varphi\left(\mathrm{suffix}_k\left(\rhd^k a_1 \dots a_i\right)\right) \cdot \prod_{i=0}^{k} \varphi\left(\mathrm{suffix}_k\left(\rhd^k a_1 \dots a_n \lhd^i\right)\right) \\
&= \prod_{i=0}^{m-1} \varphi\left(\mathrm{suffix}_k\left(\rhd^k b_1 \dots b_i\right)\right) \cdot \prod_{i=0}^{k} \varphi\left(\mathrm{suffix}_k\left(\rhd^k b_1 \dots b_m \lhd^i\right)\right) \\
&= \varphi(\rho_k(b_1 \dots b_m)) \in \varphi(K)
\end{aligned}$$

Da φ die Sprache K erkennt, ist damit $\rho_k(a_1 \dots a_n) \in K$ und damit $a_1 \dots a_n \in L$, was zu zeigen war.

„$\Rightarrow$“: Sei $L \in \mathbf{V} * \mathbf{D}_k$, dann existieren $S \in \mathbf{V}, T \in \mathbf{D}_k$, $\psi : \Gamma^+ \to S * T$ mit $\psi^{-1}(\psi(L)) = L$. Wir setzen die Fenstergröße auf $2k$ und definieren uns einen Homomorphismus

$$\begin{aligned}
\varphi : \Sigma_{2k}^* &\to S \times S^T \\
\rhd^k a_1 \dots a_k &\mapsto (s_1 \cdot {}^{t_1}s_2 \cdot \ldots \cdot {}^{t_1 \dots t_{k-1}}s_k, 1_{S^T}) \\
\rhd^i a_1 \dots a_{2k-i} &\mapsto ({}^{t_1 \dots t_{2k-i-1}}s_{2k-i}, 1_{S^T}) \text{ für } 0 \le i < k \\
b_1 \dots b_{k-1} a_1 \dots a_k \lhd &\mapsto (1_S, \chi_{t_1 \dots t_k}) \\
\rhd a_1 \dots a_l \lhd^{2k-l-1} &\mapsto (s_1 \cdot {}^{t_1}s_2 \cdot \ldots \cdot {}^{t_1 \dots t_{l-1}}s_l, \chi_{t_1 \dots t_l}) \text{ für } 1 \le l \le 2k-1
\end{aligned}$$

wobei $a_i \in \Gamma$ und $b_i \in \Gamma \cup \{\rhd, \lhd\}$ gilt. Außerdem seien in jeder Zeile $\psi(a_i) = (s_i, t_i)$. Für die restlichen Buchstaben von Σ_{2k}, auf denen φ noch nicht definiert wurde, setzen wir den Funktionswert auf $(1_S, 1_{S^T})$. Die Funktion χ_t für $t \in T$ sei definiert durch

$$\chi_t(\tilde{t}) = \begin{cases} 1_S & \text{falls } t \neq \tilde{t} \\ c & \text{falls } t = \tilde{t}, \end{cases}$$

wobei $1_S \neq c \in S$ beliebig aber fest gewählt ist. φ ist also so definiert, dass für $\psi(w) = (s, t)$ gilt $\varphi(\rho_{2k}(w)) = (s, \chi_t)$. Wir setzen $P := \{(s, \chi_t) \mid (s, t) \in \psi(L)\}$ und $K := \varphi^{-1}(P)$. Nach Konstruktion ist also $K \in \mathbf{V}$. Zu zeigen ist noch, dass $\rho_{2k}^{-1}(K) = L$ gilt. Sei also $\rho_{2k}(w) \in K$. Zu zeigen ist, dass $w \in L$ ist. Nach Definition von K ist $\varphi(\rho_{2k}(w)) \in P$. Daraus folgt nach Konstruktion von φ, dass $\psi(w) \in \psi(L)$ ist. Da ψ erkennend ist, ist somit $w \in L$. $\square$

Definition 2.24. Eine Varietät $\mathbf{V}$ heißt lokal, falls $\mathbf{V} * \mathbf{D} = \mathbf{LV}$ gilt.

Kann man also für eine entscheidbare Varietät $\mathbf{V}$ nachweisen, dass sie lokal ist, so kann man folgendes Lemma benutzen.

Lemma 2.25. *Sei* $\mathbf{V}$ *entscheidbar und lokal, dann ist* $\mathbf{V} * \mathbf{D}$ *entscheidbar.*

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 2.19 und der Definition von lokal. $\square$

3 Logik

In diesem Kapitel untersuchen wir bestimmte Logikfragmente. Jeder Formel aus einem dieser Fragmente können wir dann eine Sprache zuweisen. In Kapitel 4 werden wir dann den Zusammenhang zwischen solchen Sprachen und denen, die wir mit Methoden aus Kapitel 2 definiert haben, beschreiben. In Abschnitt 3.1 führen wir Ranker über Wörtern und die zugehörigen Rankersprachen ein. In Abschnitt 3.2 definieren wir dann zwei Fragmente der temporalen Logik. Das Konzept der Intervall-Temporal-Logik wird in Abschnitt 3.3 eingeführt. In Abschnitt 3.4 wenden wir uns dann der Logik erster Stufe zu. In Abschnitt 3.5 werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele eingeführt, ein Hilfsmittel, um Äquivalenzen von Wörtern bezüglich Formeln einer bestimmtem Tiefe zu beweisen.

3.1 Ranker

Ein Ranker über Wörtern ist ein Wort über dem Alphabet $\{\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w \mid w \in \Gamma^*\}$. Dabei interpretieren wir X_w als die Anweisung, zum nächsten Vorkommen des Teilwortes w zu springen. Genauso interpretieren wir Y_w als die Anweisung, zum letzten Vorkommen des Teilwortes w zu springen. Wir formalisieren dies wie folgt. Sei $\alpha \in \Gamma^\infty$ ein Wort und $i \in \mathbb{N}$ eine Position im Wort α. Dann ist

$$\mathsf{X}_w(\alpha, i) := \min\{j \mid j > i \text{ und } w \text{ ist Präfix von } \alpha[j; |\alpha|]\}$$
$$\mathsf{Y}_w(\alpha, i) := \max\{j \mid j < i \text{ und } w \text{ ist Suffix von } \alpha[1; j]\}$$

Dabei setzen wir den Wert auf undefiniert, falls das Minimum bzw. Maximum nicht existiert. Sei ein Ranker r gegeben. Wir nennen r einen X-Ranker, falls es ein Wort $w \in \Gamma^*$ und einen Ranker s gibt, mit $r = \mathsf{X}_w\, s$. Analog heißt r ein Y-Ranker, falls es ein Wort $w \in \Gamma^*$ und einen Ranker s gibt, mit $r = \mathsf{Y}_w\, s$. Damit lässt sich sich die obige Definition der Operatoren $\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w$ induktiv auf Ranker fortsetzen.

$$r(\alpha, i) := s(\alpha, \mathsf{X}_w(\alpha, i)) \text{ für } r = \mathsf{X}_w\, s$$
$$r(\alpha, i) := s(\alpha, \mathsf{Y}_w(\alpha, i)) \text{ für } r = \mathsf{Y}_w\, s$$

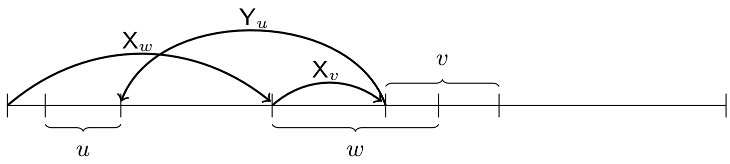

Abbildung 3.1: Illustration zu Rankern

Falls der Ranker s undefiniert ist, so soll auch r undefiniert sein. Abhängig davon, ob r ein X-Ranker oder Y-Ranker ist, definieren wir nun die Position, die ein Ranker auf ein Wort α zurückgibt.

$$r(\alpha) = \begin{cases} r(\alpha, 0) & \text{falls } r \text{ ein } \mathsf{X}\text{-Ranker ist} \\ r(\alpha, \infty) & \text{falls } r \text{ ein } \mathsf{Y}\text{-Ranker ist} \end{cases}$$

Abbildung 3.1 illustriert die Wirkungsweise eines Rankers. Wir sagen, dass r auf α definiert ist, falls $r(\alpha)$ nicht undefiniert liefert. Die hier definierten Ranker entsprechen auf unendlichen Wörtern den Eager-Rankern aus [DKL2010]. Es ist manchmal sinnvoll, auch an das Ende des Wortes zu springen. Wir definieren deswegen die Abkürzungen

$$\overrightarrow{\mathsf{X}_w} := \mathsf{X}_w \, \mathsf{X}_{w(2)} \ldots \mathsf{X}_{w(|w|)}$$
$$\overleftarrow{\mathsf{Y}_w} := \mathsf{Y}_w \, \mathsf{Y}_{w(|w|-1)} \ldots \mathsf{Y}_{w(1)} \,.$$

Die von einem Ranker r erzeugte Sprache ist

$$L(r) = \{\alpha \in \Gamma^\infty \mid r \text{ ist definiert auf } \alpha\}.$$

Wir nennen eine Sprache L eine Rankersprache, falls L die boolsche Kombination von Sprachen des Typs $L(r)$ für Ranker r ist.

3.2 Temporal-Logik

Wir führen nun die Temporal-Logik ein. Syntaktisch ist eine Formel ϕ in TL gegeben durch

$$\phi ::= \top \mid a \mid \psi \vee \tilde{\psi} \mid \psi \wedge \tilde{\psi} \mid \neg\psi \mid \mathsf{X}\,\psi \mid \mathsf{Y}\,\psi \mid \mathsf{F}\,\psi \mid \mathsf{P}\,\psi \mid \mathsf{X}_w\,\psi \mid \mathsf{Y}_w\,\psi$$

wobei $a \in \Gamma$ und $\psi, \tilde{\psi} \in$ TL rekursiv definiert wurden. Wir interpretieren Formeln in TL über Wörtern in Γ^∞ und Positionen auf diesen Wörtern. Wir schreiben $\alpha, x \models \phi$, falls die Formel

$\phi \in \mathrm{TL}$ wahr ist auf $\alpha \in \Gamma^\infty$ an Position $x \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ist dies nicht der Fall, so schreiben wir $\alpha, x \not\models \phi$. Die Semantik wird induktiv definiert. $\alpha, x \models \top$ sei immer wahr.

$$\begin{aligned}
\alpha, x \models a \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha(x) = a \\
\alpha, x \models \psi \vee \tilde{\psi} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, x \models \psi \text{ oder } \alpha, x \models \tilde{\psi} \\
\alpha, x \models \psi \wedge \tilde{\psi} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, x \models \psi \text{ und } \alpha, x \models \tilde{\psi} \\
\alpha, x \models \neg\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, x \not\models \psi \\
\alpha, x \models \mathsf{X}\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, x+1 \models \psi \\
\alpha, x \models \mathsf{Y}\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, x-1 \models \psi \\
\alpha, x \models \mathsf{F}\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \exists y : y \geq x \wedge \alpha, y \models \psi \\
\alpha, x \models \mathsf{P}\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \exists y : y \leq x \wedge \alpha, y \models \psi \\
\alpha, x \models \mathsf{X}_w\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, \mathsf{X}_w(x) \models \psi \\
\alpha, x \models \mathsf{Y}_w\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, \mathsf{Y}_w(x) \models \psi
\end{aligned}$$

Wir definieren nun, wann ein Wort α eine Formel ϕ erfüllt. Wir schreiben dafür $\alpha \models \phi$. Wir setzen wieder $\alpha \models \top$ auf wahr. Für jedes $a \in \Gamma$ setzen wir $\alpha \models a$ auf falsch. Die boolschen Operatoren $\neg, \wedge, \vee$ werden wie oben definiert. Für die temporalen Modalitäten setzen wir

$$\begin{aligned}
\alpha \models \mathsf{X}\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, 1 \models \psi \\
\alpha \models \mathsf{Y}\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, |\alpha| \models \psi \\
\alpha \models \mathsf{F}\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, 0 \models \mathsf{F}\,\psi \\
\alpha \models \mathsf{P}\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, \infty \models \mathsf{P}\,\psi \\
\alpha \models \mathsf{X}_w\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, 0 \models \mathsf{X}_w\,\psi \\
\alpha \models \mathsf{Y}_w\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha, \infty \models \mathsf{Y}_w\,\psi
\end{aligned}$$

Jeder Formel $\phi \in \mathrm{TL}$ lässt sich so in natürlicher Weise eine Sprache

$$L(\phi) := \{\alpha \in \Gamma^\infty \mid \alpha \models \phi\}$$

zuweisen. Wir nennen eine Sprache L definierbar in TL, falls eine Formel $\phi \in \mathrm{TL}$ existiert, mit $L = L(\phi)$.

Wir führen die Fragmente $\mathrm{TL}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{F}, \mathsf{P}]$ und $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ ein. In beiden Fragmenten darf man die atomaren Modalitäten und boolsche Operatoren benutzen. In $\mathrm{TL}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{F}, \mathsf{P}]$ darf man nur die temporalen Modalitäten $\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{F}, \mathsf{P}$, wohingegen in $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ nur die temporalen Modalitäten $\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w$ gebraucht werden dürfen. Wie zuvor nennen wir eine Sprache L definierbar in einem der Fragmente, falls es eine Formel ϕ in diesem Fragment gibt mit $L = L(\phi)$.

Beispiel 3.1. Seien $a, b \in \Gamma$. Wir definieren die Sprache

$$L = \{uab\alpha \in \Gamma^\infty \mid u \in \Gamma^*, \alpha \in \Gamma^\infty, ab \notin \mathrm{alph}_2(u) \cup \mathrm{alph}_2(\alpha)\}.$$

Betrachte die folgende TL[$\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w$]-Formel und TL[$\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{F}, \mathsf{P}$]-Formel

$$\begin{aligned} \phi &= \mathsf{X}_{ab} \neg \mathsf{X}_{ab} \top \\ \tilde{\phi} &= \mathsf{F}(a \wedge \mathsf{X}(b \wedge \neg \mathsf{F}(a \wedge \mathsf{X}\, b))). \end{aligned}$$

Es gilt $L(\phi) = L(\tilde{\phi}) = L$. Damit ist L sowohl in TL[$\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w$], als auch in TL[$\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{F}, \mathsf{P}$] definierbar.

3.3 Intervall-Temporal-Logik

Eine Formel $\phi \in$ ITL[$\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w$] ist gegeben durch

$$\phi ::= \top \mid \psi \vee \tilde{\psi} \mid \psi \wedge \tilde{\psi} \mid \neg\psi \mid \psi\, \mathsf{F}_w\, \tilde{\psi} \mid \psi\, \mathsf{L}_w\, \tilde{\psi}$$

für Wörter $w \in \Gamma^*$ und Formeln $\psi, \tilde{\psi} \in$ ITL[$\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w$]. Die Semantik von ITL[$\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w$]-Formeln ist über Intervallen und Wörtern definiert. Die Operatoren F_w und L_w erzeugen zwei Teilintervalle, indem das erst- bzw. letztvorkommende Wort w herausgeschnitten wird. Der Schnittpunkt ist das erste bzw. letzte Vorkommen von w im Intervall. Als Anschauung dient Abbildung 3.2. Wir formalisieren diese Anschauung. $\alpha, (x, y) \models \top$ ist immer wahr. Die boolschen Operatoren $\neg, \wedge, \vee$ werden wie bereits im Abschnitt 3.2 definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha, (x, y) \models \psi\, \mathsf{F}_w\, \tilde{\psi} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathsf{X}_w(\alpha, x) \text{ existiert } \wedge \overrightarrow{\mathsf{X}_w}(\alpha, x) < y \wedge \\ &\qquad \alpha, (x, \mathsf{X}_w(\alpha, x)) \models \psi \wedge \alpha, (\overrightarrow{\mathsf{X}_w}(\alpha, x), y) \models \tilde{\psi}, \\ \alpha, (x, y) \models \psi\, \mathsf{L}_w\, \tilde{\psi} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathsf{Y}_w(\alpha, y) \text{ existiert } \wedge \overleftarrow{\mathsf{Y}_w}(\alpha, y) > x \wedge \\ &\qquad \alpha, (x, \overleftarrow{\mathsf{Y}_w}(\alpha, y)) \models \psi \wedge \alpha, (\mathsf{Y}_w(\alpha, y), y) \models \tilde{\psi}. \end{aligned}$$

Ein Wort α ist nun ein Modell für ϕ, falls $\alpha, (0, \infty) \models \phi$. Wir schreiben dann $\alpha \models \phi$. Ausgehend davon können wir die zu einer Formel ϕ zugehörige Sprache

$$L(\phi) = \{\alpha \in \Gamma^\infty \mid \alpha \models \phi\}$$

definieren. Wir sagen, dass eine Sprache L in ITL[$\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w$] definierbar ist, falls eine Formel $\phi \in$ ITL[$\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w$] existiert, mit $L = L(\phi)$.

Beispiel 3.2. Wir betrachten die Sprache L aus Beispiel 3.1. Für

$$\phi = \top\, \mathsf{F}_{ab}(\neg(\top\, \mathsf{F}_{ab}\, \top)) \in \text{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$$

gilt $L = L(\phi)$. Also ist L definierbar in ITL[$\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w$].

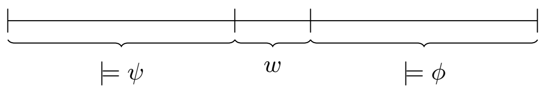

Abbildung 3.2: Illustration zu $\psi \, \mathsf{F}_w \, \phi$

3.4 Logik erster Stufe

Wir definieren Prädikatenlogik erster Stufe FO über dem Modell der Wörter. Atomare Formeln in FO sind $\top$, das einstellige Prädikat $\lambda(x) = a$, für eine Variable x und einen Buchstaben $a \in \Gamma$, und die zweistelligen Prädikate $x < y$ und $x \leq y$ für Variablen x und y. Zusammengesetzte Formeln ϕ sind dann

$$\phi ::= \neg\psi \mid \psi \vee \tilde{\psi} \mid \psi \wedge \tilde{\psi} \mid \forall x\psi \mid \exists x\psi$$

für beliebige Formeln $\psi, \tilde{\psi} \in \text{FO}$ und beliebige Variablenbezeichner x. Wir nennen ein Vorkommen einer Variablen x gebunden, falls das Vorkommen von x in einer Teilformel der Form $\exists x\psi$ oder $\forall x\psi$ auftritt. Ansonsten heißt das Vorkommen von x frei. Eine Formel ohne freie Variablen nennen wir geschlossen oder einen Satz.

Für die Semantik der Formeln in FO stellen wir uns die Variablen als Positionen auf den Wörtern α, also als Elemente der Menge $\{1, \ldots, |\alpha|\} \cap \mathbb{N}$, vor. Die Ordnungsrelation ist dann in natürlicher Weise definiert. Das Prädikat $\lambda(x) = a$ überprüft, ob die Beschriftung des Wortes an der Stelle x dem Buchstaben a entspricht. Die Semantik der zusammengesetzten Formeln wird wie üblich definiert. Für einen Satz ϕ schreiben wir $u \models \phi$ falls ϕ auf dem Wort u mit wahr ausgewertet wird.

Das Fragment $\text{FO}^2[<]$ enthält alle FO-Formeln, die maximal zwei Variablenbezeichner benutzen. Üblicherweise bezeichnen wir diese mit x und y.

Wir definieren ein Prädikat $x = y + 1$, kurz als $+1$ bezeichnet. Die Semantik ist gegeben durch die FO-Formel $\forall z\,(x < z \vee z < y)$, wobei z ein bisher nicht benutzter Variablenbezeichner sein soll. Dieses Prädikat ist nicht in $\text{FO}^2[<]$ definierbar, da man dafür drei Variablen benötigt. Deswegen ist das Fragment $\text{FO}^2[<, +1]$, in dem wir zusätzlich das Prädikat $+1$ erlauben, eine echte Erweiterung von $\text{FO}^2[<]$.

Weitere Fragmente ergeben sich durch Restriktion der Quantorenalternierungen. Wir sagen, eine Formel $\phi \in \text{FO}[<, +1]$ ist in $\Sigma_2[<, +1]$, falls ϕ eine äquivalente Formel in Pränex-Normalform besitzt, die nur zwei Blöcke von Quantoren besitzt, beginnend mit einem Block von Existenzquantoren. Eine Formel ϕ ist in $\Pi_2[<, +1]$, falls $\neg\phi \in \Sigma_2[<, +1]$. Außerdem setzen wir $\Delta_2[<, +1] = \Sigma_2[<, +1] \cap \Pi_2[<, +1]$.

Für einen Satz $\phi \in \text{FO}$ definieren wir die zugehörige Sprache

$$L(\phi) = \{\alpha \in \Gamma^\infty \mid \alpha \models \phi\}.$$

Eine Sprache L heißt definierbar in FO, falls eine Formel $\phi \in \text{FO}$ existiert, mit $L = L(\phi)$. Analog definiert man dies für $\text{FO}^2[<]$, $\text{FO}^2[<,+1]$, $\Delta_2[<,+1]$, $\Sigma_2[<,+1]$ und $\Pi_2[<,+1]$.

Beispiel 3.3. Wir betrachten nochmals die Sprache L aus Beispiel 3.1. Für die Formel

$$\begin{aligned}\phi = \exists x \exists y (y = x+1 \wedge \lambda(x) = a \wedge \lambda(y) = b \wedge \\ \forall x((x > y \wedge \lambda(x) = a) \Rightarrow \neg \exists y(y = x+1 \wedge \lambda(y) = b)))\end{aligned}$$

gilt $L = L(\phi)$ und $\phi \in \text{FO}^2[<,+1]$. L ist also auch in $\text{FO}^2[<,+1]$ definierbar.

3.5 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele sind ein Hilfsmittel aus der Modelltheorie. Sie wurden erstmals von Fraïssé in [Fra1950] beschrieben und dann von Ehrenfeucht als Spiel in [Ehr1961] formuliert. Wir führen diese Spiele für die Logikfragmente $\text{FO}^2[<,+1]$ und $\text{FO}^2[<]$ ein.

Ein Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel wird von zwei Spielern gespielt, oft Spoiler und Duplicator genannt. Ein Spiel wird auf zwei Strukturen gespielt, in unserem Fall sind dies zwei Wörter u und v. Spoilers Ziel ist zu zeigen, dass u und v eine verschiedene Teilstruktur haben, Duplicator versucht dies durch seine Spielzüge zu vertuschen. Ein $\mathcal{FO}_n^2(u,v)$-Spiel wird mit zwei Spielsteinen auf den Wörtern u, v und n Spielzügen gespielt. Diese Spielsteine werden auch Marken oder Pebbles genannt.

Im ersten Schritt sucht sich Spoiler ein Wort aus und legt eine Marke an eine bestimmte Position des Wortes. Duplicator legt auf das andere Wort einen Spielstein. Im zweiten Schritt wiederholt sich dieses Prozedere mit den anderen beiden Spielsteinen. In jedem nachfolgenden Schritt sucht sich jetzt Spoiler ein Wort aus, nimmt einen der Spielsteine und versetzt ihn. Duplicator macht dasselbe auf dem anderen Wort.

Dabei muss nach jedem Schritt gelten, dass die relative Ordnung der beiden Spielsteine auf den Wörtern gleich ist. Ist also der erste Spielstein in Wort u vor dem zweiten Spielstein gesetzt, so muss dies auch in Wort v gelten. Außerdem muss die Beschriftung an den Positionen der Spielsteine gleich sein. Wird das Spiel über $\text{FO}^2[<,+1]$ gespielt, so sind die Spielsteine genau dann benachbart in u, falls sie benachbart in v sind. Ist eine dieser Bedingungen während einem der Schritte nicht erfüllt, so hat Spoiler das Spiel gewonnen, ansonsten hat Duplicator das Spiel gewonnen.

Wir sagen, dass Duplicator eine Gewinnstrategie auf $\mathcal{FO}_n^2(u,v)$-Spielen hat, falls er für alle Spielzüge von Spoiler entsprechende Züge ziehen kann, sodass er gewinnt.

Für zwei Wörter u, v sagen wir, dass $u \equiv_n v$ bzw. $u \equiv_n^{+1} v$, falls u und v diesselben Formeln in $\text{FO}^2[<]$ bzw. $\text{FO}^2[<,+1]$ der Tiefe n erfüllen. Es gilt nun folgender Satz, der Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele für uns interessant macht.

Satz 3.4. *Duplicator hat eine Gewinnstrategie auf allen $\mathcal{FO}_n^2(u,v)$-Spielen für* $\mathrm{FO}^2[<]$ *(bzw.* $\mathrm{FO}^2[<,+1]$*) genau dann, wenn $u \equiv_n v$ (bzw. $u \equiv_n^{+1} v$)*

Beweis. Siehe [Ehr1961]. □

4 Das Fragment $\mathrm{FO}^2[<, +1]$ auf endlichen Wörtern

In diesem Kapitel werden endliche Wörter untersucht. Dabei wurde versucht die Beweise allgemein genug zu formulieren, sodass die meisten Beweise auch für das Kapitel 5 benutzt werden können. Das Hauptresultat der Arbeit ist der folgende Satz. Er zeigt die Äquivalenz zwischen den eingeführten Konzepten.

Satz 4.1. *Sei $L \subseteq \Gamma^*$. Dann sind äquivalent:*

1. *L wird erkannt in* $\mathbf{DA} * \mathbf{D}$.
2. *L wird erkannt in* $\mathbf{LDA}$.
3. *L ist definierbar in* $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$.
4. *L ist definierbar in* $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$.
5. *L ist eine Rankersprache.*
6. *L ist definierbar in* $\mathrm{TL}[\mathsf{X}, \mathsf{F}, \mathsf{Y}, \mathsf{P}]$.
7. *L ist definierbar in* $\mathrm{FO}^2[<, +1]$.
8. *L ist definierbar in* $\Delta_2[<, +1]$.

Die folgenden beiden Lemmata stehen auch in ähnlicher Form in [Eil1976].

Lemma 4.2. *Es gilt:*

1. *Seien S, T Halbgruppen. Falls $S \prec T$, dann gibt es für jedes Idempotent $e \in E(S)$ ein Idempotent $f \in E(T)$ so, dass $eSe \prec fTf$.*
2. *Sei (g, e) ein Idempotent des Kranzprodukts $S \wr T$. Dann gilt*

$$(g, e)(S \wr T)(g, e) \prec S \wr (eTe).$$

Beweis. 1. Nach Definition existiert eine Halbgruppe U und die Homomorphismen $\phi\colon U \to T$, $\psi\colon U \to S$ so, dass ϕ injektiv und ψ surjektiv ist. Sei $x \in \psi^{-1}(e)$ und $f' := x^\omega$. Kurze Rechnung zeigt, dass $\psi(f') = e$. Sei $f := \phi(f')$. f ist somit ein Idempotent, da f' idempotent ist. Die Abbildung $\phi|_{f'Uf'}\colon f'Uf' \to fTf$ (bzw. $\psi|_{f'Uf'}\colon f'Uf' \to eSe$) ist injektiv (bzw. surjektiv). Damit gilt $eSe \prec fTf$.

2. Siehe [Eil1976]. ☐

Proposition 4.3. *Für zwei Varietäten* $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ *ist* $\mathbf{V} * \mathbf{LW} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{V} * \mathbf{W})$.

Beweis. Sei $X \in \mathbf{V} * \mathbf{LW}$. Damit gilt $X \prec Y \wr Z$ für bestimmte $Y \in \mathbf{V}, Z \in \mathbf{LW}$. Für jedes $e \in E(X)$ gilt

$$eXe < X \prec Y \wr Z,$$

was $eXe \prec Y \wr Z$ impliziert. Mit Lemma 4.2 folgt, dass ein $f \in E(Z)$ existiert so, dass

$$eXe \prec Y \wr (fZf).$$

Da $fZf \in \mathbf{W}$, gilt $eXe \in \mathbf{V} * \mathbf{W}$ nach Defnition. Daraus folgt $X \in \mathbf{L}(\mathbf{V} * \mathbf{W})$. ☐

Dies kann man direkt anwenden für die Varietät $\mathbf{DA} * \mathbf{D}$.

Korollar 4.4. $\mathbf{DA} * \mathbf{D} \subseteq \mathbf{LDA}$

Beweis. Nach Lemma 2.13 gilt $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{LI}$. Damit gilt auch $\mathbf{DA} * \mathbf{D} \subseteq \mathbf{DA} * \mathbf{LI}$. Nach Proposition 4.3 gilt dann $\mathbf{DA} * \mathbf{LI} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{DA} * \mathbf{I}) = \mathbf{LDA}$. ☐

Der Beweis benutzt keine Eigenschaften von $\mathbf{DA}$. Damit gilt allgemeiner auch $\mathbf{V} * \mathbf{D} \subseteq \mathbf{LV}$. Wir untersuchen im weiteren die Varietät $\mathbf{LDA}$ auf nützliche Eigenschaften. In Kapitel 2.3 haben wir bereits gesehen, dass $\mathbf{LDA}$ aperiodisch ist. Folgendes Resultat lässt sich also insbesondere auf $\mathbf{LDA}$ anwenden.

Lemma 4.5. *Sei M aperiodisch, $x, y \in M$, $x \leq_{\mathcal{R}} y$ und $y \leq_{\mathcal{L}} x$. Dann ist $x = y$.*

Beweis. Es gibt $b, c \in M$ mit $x = yb$ und $y = cx$. Es ist $x = cxb = c^\omega x b^\omega = c^{\omega+1} x b^\omega = cx = y$. ☐

Lemma 4.6. *Sei $M \in$ $\mathbf{LDA}$ und $e, u, a \in M$. Falls $e^2 = e, ue = u, uae = ua$ und $u \mathrel{\mathcal{R}} ua$ gilt, dann ist $u \mathrel{\mathcal{R}} uaa$*

Beweis. Da $u \mathrel{\mathcal{R}} ua$, existiert ein $b \in M$, sodass $uab = u$. Es ist

$$\begin{aligned} u &= u(eaebe)^\omega \\ &= u(eaebe)^\omega eae(eaebe)^\omega \in uaa \cdot M. \end{aligned}$$

Folglich gilt $u \mathrel{\mathcal{R}} uaa$. ☐

Dieses Lemma zeigt eine Bedingung dafür, dass kein $\mathcal{R}$-Abstieg auftritt. Wir benutzen dies, um das folgende Lemma zu beweisen. Es zeigt, dass Faktoren einer bestimmten Länge keinen $\mathcal{R}$-Abstieg verursachen, falls diese schon einmal auftraten.

Lemma 4.7. *Seien $u, x \in \Gamma^*$, $M \in \mathbf{LDA}$, $a \in \Gamma$ mit $|x| \geq m > |M|$. Sei $\mu\colon \Gamma^* \to M$ ein Homomorphismus. Falls $\mu(u) \mathrel{\mathcal{R}} \mu(ux)$ und $\mathrm{alph}_m(x) = \mathrm{alph}_m(xa)$, dann ist $\mu(u) \mathrel{\mathcal{R}} \mu(uxa)$.*

Beweis. Sei $w := \mathrm{suffix}_m(xa)$. Da $\mathrm{alph}_m(x) = \mathrm{alph}_m(xa)$, gibt es $s, t \in \Gamma^*$ so, dass $x = swt$. Da $|w| > |M|$ ist, existieren nach Lemma 2.2 $w_1, w_2 \in \Gamma^*$, sodass $w = w_1 w_2 a$ und $\mu(w_1)e = \mu(w_1)$ für ein Idempotent $e \in M$. Sei $|w_1|$ maximal mit dieser Eigenschaft. Es ist

$$x = sw_1w_2at'w_2$$

für ein $t' \in \Gamma^*$ und w_1 ist ein Suffix von w_1w_2at'. Wir setzen $a' = \mu(w_2at')$ und $u' = \mu(usw_1)$. Damit ist

$$u'e = u' \quad \text{und} \quad u'a'e = u'a'$$

Mit Lemma 4.6 folgt, dass $u'a'a' \mathrel{\mathcal{R}} u'$. Also gilt $\mu(uxat') \mathrel{\mathcal{R}} u' \mathrel{\mathcal{R}} \mu(u)$ und es folgt, dass $\mu(u) \mathrel{\mathcal{R}} \mu(uxa)$. ☐

Proposition 4.8. *Sei $L \subseteq \Gamma^+$ erkennbar mit einem $M \in \mathbf{LDA}$. Dann ist L definierbar in $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$.*

Beweis. Sei $\mu\colon \Gamma^+ \to M \in \mathbf{LDA}$ ein Homomorphismus, der L erkennt. Wir fixieren $m > |M|$. Für Wörter u, $v \in \Gamma^*$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $u \equiv_n v$, falls u und v dieselben Formeln in $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$ erfüllen mit Operatortiefe von höchstens n und mit $|w| \leq m$ für alle Wörter w, die in einer Modalität vorkommen. Sei $u \equiv_n v$. Mit Induktion nach $|\mathrm{alph}_m(u)|$ zeigen wir, dass $n > |M| \cdot |\mathrm{alph}_m(u)|$ die Gleichheit $\mu(u) = \mu(v)$ impliziert.

Sei $|\mathrm{alph}_m(u)| = 0$, d. h. $|u| < m$. Aus $u \equiv_n v$ und $n \geq 1$ folgt direkt $u = v$. Sei nun also $|\mathrm{alph}_m(u)| > 0$ und $u = u'_1a_1 \ldots u'_ka_ku'_{k+1}$ mit $u'_i \in \Gamma^*$ und $a_i \in \Gamma$ die $\mathcal{R}$-Faktorisierung von u, d. h. $1 \mathrel{\mathcal{R}} \mu(u'_1)$ und

$$\mu(u'_1a_1 \ldots u'_i) >_{\mathcal{R}} \mu(u'_1a_1 \ldots u'_ia_i) \mathrel{\mathcal{R}} \mu(u'_1a_1 \ldots u'_ia_iu'_{i+1}) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq k.$$

Für $1 \leq i \leq k$ sei $u'_ia_i = u_iw_i$ mit $|w_i| = m$, falls $|u'_ia_i| \geq m$ und sonst $u_i = 1$ und $w_i = u'_ia_i$. Es gilt

$$\mu(u_1w_1 \ldots u'_i) >_{\mathcal{R}} \mu(u_1w_1 \ldots u_iw_i) \mathrel{\mathcal{R}} \mu(u_1w_1 \ldots u_iw_iu'_{i+1}) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq k.$$

Nach Lemma 4.7 gilt dann $w_i \notin \mathrm{alph}_m(u'_i)$ für alle $1 \leq i \leq k$. Da es maximal $|M|$ verschiedene $\mathcal{R}$-Klassen gibt, gilt $k < |M|$. Ferner gilt $u \models \top \mathsf{F}_{w_1}(\top \mathsf{F}_{w_2}(\ldots \top \mathsf{F}_{w_k} \top) \ldots)$ und $u \equiv_n v$ mit $n > k$, also folgt, dass v eine Faktorisierung $v = v_1w_1 \ldots v_kw_kv_{k+1}$ mit $v_i \in \Gamma^*$ und

$w_i \notin \mathrm{alph}_m(v_i w_i a_i^{-1})$ besitzt. $u \equiv_n v$ impliziert $u_i \equiv_{n-i} v_i$ für $1 \leq i \leq k$. Da aber $\mathrm{alph}_m(u_i) \subseteq \mathrm{alph}_m(u_i') \subsetneq \mathrm{alph}_m(u)$, gilt $n-i > |M|\,|\mathrm{alph}_m(u_i)|$. Nach Induktion gilt also $\mu(u_i) = \mu(v_i)$ und

$$\mu(v) \leq_{\mathcal{R}} \mu(v_1 w_1 \dots v_k w_k) = \mu(u_1 w_1 \dots u_k w_k) \mathrel{\mathcal{R}} \mu(u).$$

Symmetrisch folgt $\mu(u) \leq_{\mathcal{L}} \mu(v)$, indem man mit einer $\mathcal{L}$-Faktorisierung von v beginnt. Daraus folgt $\mu(u) = \mu(v)$ nach Lemma 4.5 und Lemma 2.12.

Sei $n > |M|\,|\Gamma|^m$ und $p \in M$. Nach obigem ist $\mu^{-1}(p)$ eine endliche Vereinigung von $\equiv_n$-Klassen. Bis auf Äquivalenz gibt es nur endlich viele $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$-Formeln mit Operatortiefe von höchstens Tiefe n und $|w| \leq m$ so, dass jede $\equiv_n$-Klasse durch eine Formel in $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$ ausgedrückt werden kann, indem man angibt, welche dieser Formeln gelten. Also kann $\mu^{-1}(p)$ in $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$ beschrieben werden. Da μ die Sprache L erkennt, gilt $L = \bigcup_{p \in P} \mu^{-1}(p)$ mit $P = \mu(L)$ und es folgt, dass L in $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$ definierbar ist. □

Um die Intervallgrenzen der Intervall-Logik in $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ zu beschreiben, benutzen wir das nächste Lemma. Dieses liefert Formeln, mit denen wir garantieren können, im richtigen Intervall zu sein.

Proposition 4.9. *Sei r ein Ranker. Dann gibt es Formeln $\vartheta_r, \varrho_r \in \mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ so, dass für alle $\alpha \in \Gamma^\infty$, $x \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} \alpha, x \models \vartheta_r \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq r(\alpha), \\ \alpha, x \models \varrho_r \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq r(\alpha). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $r(\alpha)$ genau dann definiert, wenn es eine Position x gibt mit $\alpha, x \models \vartheta_r$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Position x gibt mit $\alpha, x \models \varrho_r$.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach der Länge von r. Für $r = \mathsf{X}_w$ setzen wir

$$\vartheta_r = \overrightarrow{\mathsf{X}}_{w[2;|w|]} \neg \mathsf{Y}_w \top \quad \text{und} \quad \varrho_r = \neg \overrightarrow{\mathsf{X}}_w \neg \mathsf{Y}_w \top$$

und für $r = \mathsf{Y}_w$

$$\varrho_r = \overleftarrow{\mathsf{Y}}_{w[1;|w|-1]} \neg \mathsf{X}_w \top \quad \text{und} \quad \vartheta_r = \neg \overleftarrow{\mathsf{Y}}_w \neg \mathsf{X}_w \top.$$

Sei $r = s\,\mathsf{X}_w$ für einen Ranker s und setze

$$\vartheta_r = \overrightarrow{\mathsf{X}}_{w[2;|w|]} \neg \overleftarrow{\mathsf{Y}}_w \neg \vartheta_s \quad \text{und} \quad \varrho_r = \neg \overrightarrow{\mathsf{X}}_w \neg \overleftarrow{\mathsf{Y}}_w \neg \vartheta_s$$

und für $r = s\,\mathsf{X}_w$ setzen wir symmetrisch

$$\varrho_r = \overleftarrow{\mathsf{Y}}_{w[1;|w|-1]} \neg \overrightarrow{\mathsf{X}}_w \neg \varrho_s \quad \text{und} \quad \vartheta_r = \neg \overleftarrow{\mathsf{Y}}_w \neg \overrightarrow{\mathsf{X}}_w \neg \varrho_s.$$

□

Mit dieser Vorbereitung kann nun die folgende Proposition bewiesen werden.

Proposition 4.10. *Sei $L \subseteq \Gamma^\infty$ definierbar in* $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$*. Dann ist L definierbar in* $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$.

Beweis. Wir definieren für jede Formel $\varphi \in \mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$ und für Ranker q und r eine Formel $\varphi_{(q;r)} \in \mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\alpha \in \Gamma^\infty$ so, dass $q(\alpha)$ und $r(\alpha)$ definiert sind mit $q(\alpha) < r(\alpha)$, gilt $\alpha \models \varphi_{(q;r)}$ genau dann wenn

$$\alpha, \big(q(\alpha); r(\alpha)\big) \models \varphi.$$

Also definiert $(q; r)$ ein Intervall, dass parametrisiert wird vom Wort α. Außerdem erlauben wir, dass q und r leer sind (bezeichnet mit ε). Für $q = \varepsilon$ setzen wir $q(\alpha) = 0$ und um eine bequeme Schreibweise zu erhalten, setzen wir $r(\alpha) = |\alpha|$ für $r = \varepsilon$. Folglich erfüllt die Formel $\varphi_{(\varepsilon;\varepsilon)} \in \mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ die Bedingung $L(\varphi_{(\varepsilon;\varepsilon)}) = L(\varphi)$.

Wir definieren $\varphi_{(q;r)}$ mit strukturieller Induktion auf φ. Atomare Modalitäten und boolsche Verknüpfungen werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \top_{(q;r)} &= \top \\ (\neg\varphi)_{(q;r)} &= \neg\varphi_{(q;r)} \\ (\varphi \wedge \psi)_{(q;r)} &= \varphi_{(q;r)} \wedge \psi_{(q;r)} \\ (\varphi \vee \psi)_{(q;r)} &= \varphi_{(q;r)} \vee \psi_{(q;r)} \end{aligned}$$

Für die temporalen Modalitäten benutzen wir die Formeln ϑ_r und ϱ_r aus Proposition 4.9 und setzen:

$$\begin{aligned} (\varphi \,\mathsf{F}_w\, \psi)_{(q;r)} &= \varphi_{(q;q\,\mathsf{X}_w)} \wedge \psi_{(q\overrightarrow{\mathsf{X}}_w;r)} \wedge q\overrightarrow{\mathsf{X}}_w \neg\varrho_r \\ (\varphi \,\mathsf{L}_w\, \psi)_{(q;r)} &= \varphi_{(q;r\overleftarrow{\mathsf{Y}}_w)} \wedge \psi_{(r\,\mathsf{Y}_w;r)} \wedge r\overleftarrow{\mathsf{Y}}_w \neg\vartheta_q. \end{aligned}$$

□

Zu jeder Sprache, die in $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ definierbar ist, lässt sich effektiv die Rankersprache berechnen. Wir zeigen dies im nächsten Lemma.

Lemma 4.11. *Sei $L \subseteq \Gamma^\infty$ definierbar in* $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$*, dann ist L eine Rankersprache.*

Beweis. Sei ϕ eine $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$-Formel so, dass $L(\phi) = L$. Wir formen ϕ syntaktisch äquivalent um, sodass alle Modalitäten $\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w$ nach innen gezogen werden. Dies wird induktiv gemacht mittels $\mathsf{X}_w(\psi_1 \vee \psi_2) \equiv \mathsf{X}_w\,\psi_1 \vee \mathsf{X}_w\,\psi_2$, $\mathsf{X}_w(\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv \mathsf{X}_w\,\psi_1 \wedge \mathsf{X}_w\,\psi_2$ und $\mathsf{X}_w\,\neg\psi \equiv \mathsf{X}_w \top \wedge \neg\,\mathsf{X}_w\,\psi$. Analog gilt dies für Y_w. Damit ist L eine boolsche Kombination von Rankern. □

Ein ähnliches Resultat wie bereits in Proposition 4.9 für $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ formuliert, lässt sich auch für $\mathrm{TL}[\mathsf{X}, \mathsf{F}, \mathsf{Y}, \mathsf{P}]$ formulieren.

Proposition 4.12. *Sei r ein Ranker, dann gibt es Formeln $\vartheta_r, \varrho_r \in \mathrm{TL}[\mathsf{X},\mathsf{F},\mathsf{Y},\mathsf{P}]$ so, dass für alle $\alpha \in \Gamma^\infty$, $x \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} \alpha, x \models \vartheta_r \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq r(\alpha), \\ \alpha, x \models \varrho_r \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq r(\alpha). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $r(\alpha)$ genau dann definiert, wenn es eine Position x gibt mit $\alpha, x \models \vartheta_r$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Position x gibt mit $\alpha, x \models \varrho_r$.

Beweis. Sei $w \in \Gamma^+$. Nach Induktion über die Länge von w, definieren wir Formeln $\overrightarrow{w}$ und $\overleftarrow{w}$ in $\mathrm{TL}[\mathsf{X},\mathsf{F},\mathsf{Y},\mathsf{P}]$ als $w(1) \wedge \mathsf{X}\,\overrightarrow{(w[2;|w|])}$, und $w(|w|) \wedge \mathsf{Y}\,\overleftarrow{(w[1;|w|-1])}$. Folglich ist die Formel $\overrightarrow{w}$ wahr für v an der Position x genau dann, wenn $w = \alpha[x; x+|w|)$, und $\overleftarrow{w}$ ist wahr genau dann, wenn $w = \alpha(x-|w|\,; x]$. Wir führen eine Induktion nach der Länge von r. Für $r = \mathsf{X}_w$ setzen wir

$$\vartheta_r = \neg\,\mathsf{YP}(\overrightarrow{w}) \quad \text{und} \quad \varrho_r = \mathsf{P}(\overrightarrow{w}).$$

Symmetrisch für $r = \mathsf{Y}_w$ setzen wir

$$\vartheta_r = \mathsf{F}(\overleftarrow{w}) \quad \text{und} \quad \varrho_r = \neg\,\mathsf{XF}(\overleftarrow{w}).$$

Sei $r = s\,\mathsf{X}_w$ oder $r = s\,\mathsf{Y}_w$ für einen Ranker s. Nach Induktion existieren Formuln ϑ_s and ϱ_s. Definiere

$$\begin{aligned} &\vartheta_r = \neg\,\mathsf{YP}(\overrightarrow{w}) \vee \mathsf{YP}(\overrightarrow{w} \wedge \vartheta_s) && \text{und} && \varrho_r = \mathsf{P}(\overrightarrow{w} \wedge \mathsf{Y}\,\varrho_s) && \text{für } r = s\,\mathsf{X}_w, \\ &\vartheta_r = \mathsf{F}(\overleftarrow{w} \wedge \mathsf{X}\,\vartheta_s) && \text{und} && \varrho_r = \neg\,\mathsf{XF}(\overleftarrow{w}) \vee \mathsf{XF}(\overleftarrow{w} \wedge \varrho_s) && \text{für } r = s\,\mathsf{Y}_w. \end{aligned}$$

□

Aus dieser Proposition kann man direkt folgern, dass jede von einem Ranker erzeugte Sprache durch eine Formel $\varphi \in \mathrm{TL}[\mathsf{X},\mathsf{Y},\mathsf{F},\mathsf{P}]$ definierbar ist.

Lemma 4.13. *Sei r ein Ranker. Dann gibt es eine Formel $\varphi \in \mathrm{TL}[\mathsf{X},\mathsf{F},\mathsf{Y},\mathsf{P}]$ so, dass $L(r) = L(\varphi)$.*

Beweis. Nach Proposition 4.12 gilt $v \models r$ genau dann, wenn $v \models \mathsf{F}\,\vartheta_r \in \mathrm{TL}[\mathsf{X},\mathsf{F},\mathsf{Y},\mathsf{P}]$ und folglich $L(r) = L(\mathsf{F}\,\vartheta_r)$. □

Wir zeigen in den nächsten beiden Lemmata, dass sich eine $\mathrm{TL}[\mathsf{X},\mathsf{F},\mathsf{Y},\mathsf{P}]$-Formel effektiv in eine äquivalente $\mathrm{FO}^2[<,+1]$-Formel umwandeln lässt.

Lemma 4.14. *Für alle $\phi \in \mathrm{TL}[\mathsf{X},\mathsf{F},\mathsf{Y},\mathsf{P}]$ gibt es ein $\psi_\phi(x) \in \mathrm{FO}^2[<,+1]$ so, dass*

$$w, x \models \phi \Leftrightarrow w \models \psi_\phi(x).$$

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion nach dem Aufbau von ϕ. Es reicht die Fälle $\phi \in \left\{\mathsf{X}\,\tilde{\phi}, \mathsf{F}\,\tilde{\phi}, \mathsf{Y}\,\tilde{\phi}, \mathsf{P}\,\tilde{\phi}\right\}$ für ein $\tilde{\phi} \in \mathrm{TL}[\mathsf{X}, \mathsf{F}, \mathsf{Y}, \mathsf{P}]$ zu untersuchen, da alle anderen Fälle sich direkt nach $\mathrm{FO}^2[<, +1]$ übertragen lassen. Es ist

$$\psi_{\mathsf{X}\,\tilde{\phi}}(x) = \exists y \left(y = x + 1 \wedge \psi_{\tilde{\phi}}(y)\right)$$
$$\psi_{\mathsf{Y}\,\tilde{\phi}}(x) = \exists y \left(x = y + 1 \wedge \psi_{\tilde{\phi}}(y)\right)$$
$$\psi_{\mathsf{F}\,\tilde{\phi}}(x) = \exists y \left(y \geq x \wedge \psi_{\tilde{\phi}}(y)\right)$$
$$\psi_{\mathsf{P}\,\tilde{\phi}}(x) = \exists y \left(y \leq x \wedge \psi_{\tilde{\phi}}(y)\right)$$

Dabei werden in $\psi_{\tilde{\phi}}(y)$ die Variablen getauscht, die freie Variable ist dort y und x die gebundene Variable. $\square$

Lemma 4.15. *Sei* $\phi \in \mathrm{TL}[\mathsf{X}, \mathsf{F}, \mathsf{Y}, \mathsf{P}]$. *Dann gibt es eine Formel* $\psi \in \mathrm{FO}^2[<, +1]$ *so, dass* $L(\phi) = L(\psi)$.

Beweis. Es reicht wieder, sich auf die Fälle $\phi \in \left\{\mathsf{X}\,\tilde{\phi}, \mathsf{F}\,\tilde{\phi}, \mathsf{Y}\,\tilde{\phi}, \mathsf{P}\,\tilde{\phi}\right\}$ zu beschränken. Es gilt

$$w \models \mathsf{X}\,\tilde{\phi} \Leftrightarrow w \models \exists x \forall y \left((x \neq y + 1) \wedge w, x \models \tilde{\phi}\right)$$
$$w \models \mathsf{Y}\,\tilde{\phi} \Leftrightarrow w \models \exists x \forall y \left((x \neq y - 1) \wedge w, x \models \tilde{\phi}\right)$$
$$w \models \mathsf{F}\,\tilde{\phi} \Leftrightarrow w \models P\tilde{\phi} \Leftrightarrow w \models \exists x \left(w, x \models \tilde{\phi}\right)$$

Die Formel $w, x \models \tilde{\phi}$ ist nach Lemma 4.14 in $\mathrm{FO}^2[<, +1]$ definierbar, was die Behauptung zeigt. $\square$

In der nächsten Proposition wird die Verbindung von $\mathrm{FO}^2[<, +1]$ zu $\mathbf{DA} * \mathbf{D}$ beschrieben. Wir benutzen für den Beweis die in Abschnitt 3.5 eingeführten Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele.

Proposition 4.16. *Sei* $L \subseteq \Gamma^*$ *definierbar in* $\mathrm{FO}^2[<, +1]$. *Dann ist* L *erkennbar in* $\mathbf{DA} * \mathbf{D}$.

Beweis. Seien $u, v \in \Gamma^*$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Äquivalenzrelation $u \equiv_n v$ (bzw. $u \equiv_n^{+1} v$), falls u und v dieselben $\mathrm{FO}^2[<]$-Formeln (bzw. $\mathrm{FO}^2[<, +1]$-Formeln) auf Wörtern über dem Alphabet Σ_{2n+1} (bzw. Γ) der Tiefe n erfüllen. Wir schreiben $[u]_n$ (bzw. $[u]_n^{+1}$) für die zu u gehörige Äquivalenzklasse. Wir zeigen nun, dass

$$\rho_{2n+1}^{-1}([\rho_{2n+1}(u)]_n) \subseteq [u]_n^{+1}$$

gilt. Sei also $\rho_{2n+1}(u) \equiv_n \rho_{2n+1}(v)$. Zu zeigen ist nun, dass $u \equiv_n^{+1} v$ gilt. Die Beweisstrategie wird über Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele gehen. Da $\rho_{2n+1}(u) \equiv_n \rho_{2n+1}(v)$ gilt, hat Duplicator auf diesen beiden Worten eine Gewinnstrategie. Wir werden diese Gewinnstrategie auf $\rho_{2n+1}(u)$ und $\rho_{2n+1}(v)$ nun nutzen, um eine Gewinnstrategie für Duplicator für die Worte u und v zu konstruieren. Nehmen wir an, Spoiler setzt ein Pebble an die Stelle i auf Wort u. Das Teilwort $u[\max(1, i-n); \min(|u|, i+n)]$ findet sich in $\rho_{2n+1}(u)$ als Fenster wieder. Falls $i < n$ oder $i + n > |u|$ gilt, so wurde dieses Fenster mit $\rhd$ oder $\lhd$ aufgefüllt. Spoiler setzt im $\mathrm{FO}^2[<]$-Spiel auf den Fensterwörtern an dieser Stelle seinen Pebble. Duplicator setzt anhand der vorhandenen Gewinnstrategie einen Pebble in $\rho_{2n+1}(v)$. Duplicator kann somit den Pebble auf Position j in v so setzen, dass das Teilwort $v[\max(1, j-n); \min(|u|, j+n)] = u[\max(1, i-n); \min(|u|, i+n)]$ im Fenster des Pebbles in $\rho_{2n+1}(v)$ vorkommt. Die Umgebungen der beiden Pebbles sind jetzt also gleich. Macht Spoiler im nächsten Schritt einen Successor-Schritt, so kann dieser auch von Duplicator kopiert werden, da die Umgebungen dieselben sind. Falls Spoiler keinen Successor-Schritt macht, so kann Duplicator wie bereits beschrieben die Strategie auf den Fensterwörtern nutzen, um eine geeignete Stelle für den Pebble zu finden. Also hat Duplicator eine Gewinnstrategie auf u und v. Damit gilt

$$\rho_{2n+1}^{-1}([\rho_{2n+1}(u)]_n) \subseteq [u]_n^{+1}$$

und somit

$$[u]_n^{+1} = \rho_{2n+1}^{-1}\left(\bigcup_{v \in [u]_n^{+1}} [\rho_{2n+1}(v)]_n\right). \tag{4.1}$$

Die Vereinigung ist endlich, da $\equiv_n^{+1}$ endlichen Index hat. Dies liegt daran, dass es nur endlich viele semantisch nicht-äquivalente Formeln der Tiefe n gibt. Insbesondere ist

$$\bigcup_{v \in [u]_n^{+1}} [\rho_{2n+1}(v)]_n$$

definierbar in $\mathrm{FO}^2[<]$ durch Angabe, welche dieser Formeln wahr sind und welche nicht. Da durch $\mathrm{FO}^2[<]$ definierbare Sprachen genau den Sprachen in $\mathbf{DA}$ entsprechen, vgl. [DGK2008], ist $\bigcup_{v \in [u]_n^{+1}} [\rho_{2n+1}(v)]_n \in \mathbf{DA}$. Nach Satz 2.23 und Gleichung (4.1) ist damit $[u]_n^{+1} \in \mathbf{DA} * \mathbf{D}$. Damit ist auch

$$L = \bigcup_{u \in L} [u]_n^{+1} \in \mathbf{DA} * \mathbf{D},$$

was zu zeigen war. $\square$

Lemma 4.17. *Für alle $\phi \in \mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ gibt es ein $\psi_\phi(x) \in \Sigma_2[<,+1]$ so, dass*

$$w, x \models \phi \Leftrightarrow w \models \psi_\phi(x)$$

Beweis. Wir führen eine Induktion nach dem Aufbau der Formel. Da $\wedge$ und $\vee$ in $\Sigma_2[<,+1]$ ausdrückbar sind, beschränken wir uns ohne Einschränkungen auf Formeln, die nur $\neg, \mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w$ und $\top$ benutzen. $\top$ und $\neg\top$ sind offensichtlich in $\Sigma_2[<,+1]$ definierbar. Sei $w = a_1 \ldots a_k$. Setze

$$\psi_{\mathsf{X}_w \tilde{\phi}}(x) := \exists x_1 \ldots \exists x_k \left(x_1 > x \wedge \bigwedge_{i=2}^{k} (x_i = x_{i-1} + 1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \lambda(x_i) = a_i \wedge \psi_{\tilde{\phi}}(x_1) \right)$$

und

$$\psi_{\mathsf{Y}_w \tilde{\phi}}(x) := \exists x_1 \dots \exists x_k \left(x_k < x \wedge \bigwedge_{i=2}^{k} (x_{i-1} = x_i + 1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \lambda(x_i) = a_i \wedge \psi_{\tilde{\phi}}(x_k) \right).$$

Sei $\mathsf{Z}_w \in \{\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w\}$. Für die Negation gilt

$$\neg \mathsf{Z}_w \tilde{\phi} \equiv \neg \mathsf{Z}_w \top \vee \mathsf{Z}_w \neg\tilde{\phi}.$$

Damit muss man induktiv nur noch $\neg \mathsf{Z}_w \top$ darstellen. Wir setzen

$$\psi_{\neg \mathsf{X}_w \top} := \forall y_1 \dots \forall y_k \left(\left(y_1 > x \wedge \bigwedge_{i=2}^{k} (y_i = y_{i-1} + 1) \right) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} \lambda(y_i) \neq a_i \right)$$

$$\psi_{\neg \mathsf{Y}_w \top} := \forall y_1 \dots \forall y_k \left(\left(y_k < x \wedge \bigwedge_{i=2}^{k} (y_{i-1} = y_i + 1) \right) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} \lambda(y_i) \neq a_i \right)$$

□

Lemma 4.18. *Sei $\phi \in \mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$. Dann gibt es eine Formel $\psi \in \Sigma_2[<, +1]$ mit $L(\phi) \cap \Gamma^* = L(\psi) \cap \Gamma^*$.*

Beweis. Es reicht wie bereits in Lemma 4.17 sich auf Formeln zu beschränken die nur $\neg, \mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w$ und $\top$ benutzen. Sei $\phi = \mathsf{Z}_w \tilde{\phi}$ mit $\mathsf{Z}_w \in \{\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w\}$ und wie zuvor $w = a_1 \dots a_k$. Wir setzen

$$\begin{aligned}\psi := &\exists x_1 \dots \exists x_k \left(\bigwedge_{i=2}^{k} (x_{i-1} = x_i + 1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \lambda(x_i) = a_i \wedge \psi_{\tilde{\phi}}(x_1) \wedge \right. \\ &\left. \forall y_1 \dots \forall y_k \left(\left(\bigwedge_{i=2}^{k} (x_{i-1} = x_i + 1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \lambda(x_i) = a_i \right) \Rightarrow x_1 \leq y_1 \right) \right)\end{aligned}$$

für $\mathsf{Z}_w = \mathsf{X}_w$ und

$$\begin{aligned}\psi := &\exists x_1 \dots \exists x_k \left(\bigwedge_{i=2}^{k} (x_i = x_{i-1} + 1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \lambda(x_i) = a_i \wedge \psi_{\tilde{\phi}}(x_k) \wedge \right. \\ &\left. \forall y_1 \dots \forall y_k \left(\left(\bigwedge_{i=2}^{k} (x_{i-1} = x_i + 1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \lambda(x_i) = a_i \right) \Rightarrow x_1 \geq y_1 \right) \right)\end{aligned}$$

für $\mathsf{Z}_w = \mathsf{Y}_w$ mit $\psi_{\tilde{\phi}}(x)$ aus Lemma 4.17.

Für die Negation nutzen wir wieder die Äquivalenz

$$\neg \mathsf{Z}_w \tilde{\phi} \equiv \neg \mathsf{Z}_w \top \vee \mathsf{Z}_w \neg\tilde{\phi}.$$

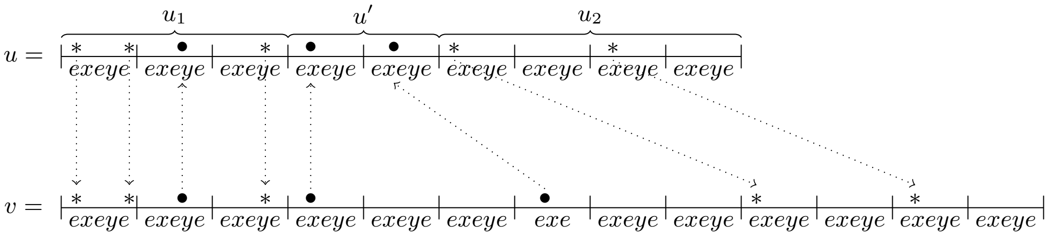

Abbildung 4.1: Illustration zu Proposition 4.21

Dabei gilt

$$\neg\,\mathsf{X}_w \top \equiv \neg\,\mathsf{Y}_w \top$$

und dieses lässt sich darstellen durch die Formel

$$\forall y_1 \ldots \forall y_k \left(\left(\bigwedge_{i=2}^{k} (y_i = y_{i-1} + 1) \right) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} \lambda(y_i) \neq a_i \right)$$

Die Formel $\mathsf{Z}_w\,\neg\tilde{\phi}$ lässt sich wie oben beschrieben in $\Sigma_2[<,+1]$ ausdrücken. $\square$

Bemerkung 4.19. Die Äquivalenz $\neg\,\mathsf{X}_w \top \equiv \neg\,\mathsf{Y}_w \top$ gilt nur auf endlichen Wörtern. Deswegen muss mit Γ^* geschnitten werden. Eine Darstellung von $\neg\,\mathsf{Y}_w \top$ kann es somit nach [KKL2011] und Kapitel 5 nicht geben, da $\Delta_2[<,+1] \subsetneq \mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$ über unendlichen Wörtern gilt.

Korollar 4.20. *Sei $\phi \in \mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$. Dann gibt es eine Formel $\psi \in \Delta_2[<,+1]$ mit $L(\phi) \cap \Gamma^* = L(\psi) \cap \Gamma^*$.*

Beweis. Zu ϕ lässt sich nach Lemma 4.18 eine Formel $\psi \in \Sigma_2[<,+1]$ mit $L(\phi) \cap \Gamma^* = L(\psi) \cap \Gamma^*$ finden. Wir finden ebenfalls zu $\neg\phi$ ein $\tilde{\psi} \in \Sigma_2[<,+1]$ mit $L(\neg\phi) \cap \Gamma^* = L(\tilde{\psi}) \cap \Gamma^*$. Damit gilt $L(\phi) \cap \Gamma^* = L(\neg\tilde{\psi}) \cap \Gamma^*$ und $\neg\tilde{\psi} \in \Pi_2[<,+1]$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Proposition 4.21. *Sei $L \subseteq \Gamma^*$ in $\Delta_2[<,+1]$ definierbar. Dann ist $L \in$* **LDA**.

Beweis. Sei $\phi \in \Sigma_2[<,+1]$ mit $L(\phi) = L$. Sei n größer oder gleich der Anzahl der Variablen von ϕ. Seien $x, y \in \Gamma^*$ und $z \in \Gamma^+$ beliebig. Wir setzen $e := z^{n+1}$ und

$$\begin{aligned} u &= (exeye)^{n^2+1} \\ v &= (exeye)^{n^2+1} exe (exeye)^{n^2+1} = v_1 exe v_2. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun für alle $p, q \in \Gamma^*$, dass $puq \models \phi \Rightarrow pvq \models \phi$. Dazu sei ohne Einschränkung $\phi = \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \varphi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$, wobei φ eine aussagenlogische Formel ist. Nach Wahl von n gilt $k + l \leq n$. Da $puq \models \phi$, gibt es eine Belegung für den Existenzblock in puq, sodass puq unter dieser Belegung die Formel $\forall y_1 \ldots \forall y_l \varphi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ erfüllt.

Wir konstruieren damit eine Belegung der Variablen $x_1, \dots, x_k$ für das Wort pvq. Belegungen in den Faktoren p und q lassen sich direkt nach pvq an dieselbe Stelle übertragen. Auf Grund der Wahl von u gibt es einen Faktor $u' = (exeye)^n$ in u, in dem keine Belegung der Variablen des Existenzblocks liegen. Wir setzen $u = u_1 u' u_2$. Wir übertragen alle Belegungen von u_1 auf den Anfang von v_1. Die Belegungen die rechts von diesem Faktor liegen, übertragen wir auf das Ende von v_2.

Angenommen, es gibt jetzt eine Belegung des Blocks der Allquantoren auf pvq, sodass φ nicht erfüllt ist. Belegungen aus v_1 bzw. v_2, die aus dem Teil von u_1 bzw. u_2 kommen, übertragen wir direkt auf diese Teile zurück. Belegungen aus v_1, die nicht in dem Teil vorhanden sind, der durch u_1 abgedeckt wird, werden auf die linke Seite von u' geschrieben. Dabei verändert sich die Erfüllbarkeit bezüglich Formeln aus $\Sigma_2[<, +1]$ nicht, da lediglich die relative Position und Nachbarschaft getestet werden kann. Analog werden Belegungen aus v_2, die nicht durch u_2 abgedeckt werden, rechts von u' belegt. Bei dieser Prozedur werden nicht alle Faktoren der Form $exeye$ in u' belegt, da $l \leq n$ ist. Es bleibt der Faktor $exeexe$ in v. Wir übertragen Belegungen aus diesem Faktor in einen Faktor $exeye$ aus u', der in der Mitte liegt und noch nicht belegt wurde. Dies verändert die Erfüllbarkeit der Formel φ nicht, da die Nachbarschaftsbeziehungen und die relative Ordnung beibehalten wurde. Mit dieser konstruierten Belegung von $y_1, \dots, y_l$ in puq gilt aber nicht $puq \models \phi$. Also ist die Annahme falsch und damit $pvq \models \phi$. Dies zeigt $puq \in L \Rightarrow pvq \in L$.

Sei $\psi \in \Pi_2[<, +1]$ mit $L(\psi) = L$. Es gilt

$$\begin{aligned} pvq \models \psi \Rightarrow puq \models \psi && \Leftrightarrow \\ \neg(puq \models \psi) \Rightarrow \neg(pvq \models \psi) && \Leftrightarrow \\ puq \models \neg\psi \Rightarrow pvq \models \neg\psi. && \end{aligned}$$

Da $\neg\psi \in \Sigma_2[<, +1]$ ist, gilt dies nach Obigem. Damit gilt also $pvq \in L \Rightarrow puq \in L$ und somit $[u]_L = [v]_L$. Also ist $\mathrm{Synt}(L) \in \mathbf{LDA}$. □

Setzen wir nun diese Resultate zusammen, so können wir das Hauptresultat beweisen.

Beweis von Satz 4.1. Wir zeigen zunächst den Ringschluss $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 1$. Die Äquivalenz zu 8 zeigen wir durch die Implikationen $4 \Rightarrow 8$ und $8 \Rightarrow 2$.

„$1 \Rightarrow 2$“: Korollar 4.4.

„$2 \Rightarrow 3$“: Proposition 4.8.

„$3 \Rightarrow 4$“: Proposition 4.10.

„$4 \Rightarrow 5$“: Lemma 4.11.

„$5 \Rightarrow 6$“: Lemma 4.13.

„$6 \Rightarrow 7$“: Lemma 4.15.

„$7 \Rightarrow 1$“: Proposition 4.16.

„$4 \Rightarrow 8$“: Korollar 4.20.

„$8 \Rightarrow 2$“: Proposition 4.21. $\square$

5 Das Fragment $\mathrm{FO}^2[<,+1]$ auf unendlichen Wörtern

In diesem Kapitel werden die Resultate aus Kapitel 4 auf unendliche Wörter übertragen.

Um sowohl endliche Wörter als auch unendliche Wörter untersuchen zu können, ist es nützlich, dass das leere Wort in der Sprache sein kann. Wir definieren deswegen eine leicht andere Erkennbarkeit in **LDA**. Wir sagen, eine Sprache $L \subseteq \Gamma^\infty$ wird stark bzw. schwach erkannt von $h : \Gamma^* \to M$ in **LDA**, falls $(exeye)^\omega = (exeye)^\omega exe(exeye)^\omega$ gilt für alle Idempotente $e \in h(\Gamma^+)$ und h die Sprache L im üblichen Sinne stark bzw. schwach erkennt. Somit wird die Halbgruppenvarietät **LDA** so definiert, dass auch mit Monoiden, die nicht in **DA** sind, Sprachen in **LDA** erkannt werden können.

Satz 5.1. *Sei $L \subseteq \Gamma^\infty$. Dann sind äquivalent:*

1. *L wird stark erkannt in* **LDA**.
2. *L wird schwach erkannt in* **LDA** *und ist abgeschlossen in der strikten Faktor-Topologie.*
3. *L ist definierbar in* $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$.
4. *L ist definierbar in* $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$.
5. *L ist eine Rankersprache.*
6. *L ist definierbar in* $\mathrm{TL}[\mathsf{X}, \mathsf{F}, \mathsf{Y}, \mathsf{P}]$.
7. *L ist definierbar in* $\mathrm{FO}^2[<,+1]$.

Die folgenden beiden Lemmata sind aus [KKL2011].

Lemma 5.2. *Sei M endlicher Monoid und $h : \Gamma^* \to M$ surjektiver Homomorphismus. Es sind äquivalent:*

1. *$M \in$* **LDA**
2. *$eP_e e = e$ für alle Idempotente e in M.*

Beweis. Siehe [KKL2011]. □

Lemma 5.3. *Sei $L \subseteq \Gamma^\infty$ stark erkennbar durch $h : \Gamma^* \to M$ in* **LDA**, *dann ist L offen und abgeschlossen in der strikten k-Faktor-Topologie für jedes $k \geq 2|M|$.*

Beweis. Da $\Gamma^\infty \setminus L$ auch von h erkannt wird, reicht es zu zeigen, dass L offen ist. Sei $\alpha \in [s][e]^\omega \subseteq L$, für ein linked pair (s, e) und sei $A = \mathrm{im}_k(\alpha) \neq \emptyset$. Wir schreiben $\alpha = s_0 e_1 e_2 \ldots$ mit $h(s_0) = s$, $h(e_i) = e$ und $e_1 e_2 \ldots \in A^{\infty_k}$. Wir können annehmen, dass $|e_i| \geq k$ und $\mathrm{alph}_k(e_i) = A$ für jedes $i \geq 1$. Sei r_1 das Präfix von e_1 der Länge $k-1$. Es gilt $\alpha \in s_0 r_1 \circ_k A^{\infty_k} \cap A^{\mathrm{im}_k}$.

Wir zeigen $s_0 r_1 \circ_k A^{\infty_k} \cap A^{\mathrm{im}_k} \subseteq L$, was die Behauptung beweist. Sei $\beta \in s_0 r_1 \circ_k A^{\infty_k} \cap A^{\mathrm{im}_k}$ und schreibe $\beta = s_0 r_1 r_2 f_1 f_2 \ldots$ so, dass $f = h(f_1) = h(f_2) = \ldots$ und $(h(r_1 r_2), f)$ ein linked pair ist mit $\mathrm{alph}_k(f_i) = A$ für alle $i \geq 1$. Sei $r = h(r_1 r_2)$. Wir faktorisieren $r_1 r_2 f_1 = x_0 x_1 \ldots x_m$ so, dass $|x_i| \leq |M|$ und für alle x_i gibt es ein Idempotent $g_{i+1} \in h(\Gamma^+)$ mit $h(x_i) g_{i+1} = h(x_i)$. Nach Konstruktion von k und r_1 sehen wir, dass x_0 ein Präfix von r_1 ist. Folglich gilt

$$e \leq_{\mathcal{R}} h(r_1) \leq_{\mathcal{R}} h(x_0) = h(x_0) g_1.$$

Nach Wahl von A und e_1 sehen wir für $0 < i \leq m$, dass das Wort $x_{i-1} x_i$ ein Faktor von e_1 ist. Folglich gilt für alle $1 < i < m$

$$e \leq_{\mathcal{J}} h(x_{i-1} x_i) = h(x_{i-1}) g_i h(x_i) g_{i+1} \leq_{\mathcal{J}} g_i h(x_i) g_{i+1}.$$

Da $x_{m-1} x_m$ ein Faktor von e_1 ist, existiert $t_0 \in \Gamma^*$ so, dass $x_{m-1} x_m t_0$ ein Suffix von e_1 ist. Mit $t = h(t_0)$ gilt dann

$$e \leq_{\mathcal{L}} h(x_{m-1} x_m) t = h(x_{m-1}) g_m h(x_m) t \leq_{\mathcal{L}} g_m h(x_m) t.$$

Nach Lemma 5.2 gilt dann

$$e = e h(x_0) g_1 h(x_1) \ldots g_m h(x_m) t e = e h(r_1 r_2 f_1) t e = e r f t e.$$

Ähnlich, indem man $\mathrm{alph}_k(f_i) = A$ benutzt, zeigt man, dass $p, q \in M$ existieren mit $f = f p e q f$. Da M aperiodisch ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = a^{n+1}$ für alle $a \in M$. Es folgt

$$e = erfpeqfte = (erfp)^n e (qfte)^n = (erfp)^{n+1} e (qfte)^n = erfpe$$

und analog

$$f = fperfteqf = (fper)^n f (teqf)^n = (fper)^{n+1} f (teqf)^n = fperf.$$

Es gilt $s = se = serfpe = srfpe$ und damit $[s][e]^\omega = [srfpe][erfpe]^\omega \subseteq L$. Mit der starken Erkennbarkeit und da $[srfpe][erfpe]^\omega \cap [srf][fperf]^\omega \neq \emptyset$ folgt, dass $\beta \in [sr][f]^\omega = [srf][fperf]^\omega \subseteq L$. Dies zeigt, dass jedes unendliche Wort in L eine offene Umgebung in L besitzt. Jedes endliche Wort hat die triviale Umgebung $\{w\}$. Also ist L offen. $\square$

Die folgende Proposition ist eine Abwandlung eines Resultates aus [KKL2011].

Proposition 5.4. *Sei $L \subseteq \Gamma^\infty$ schwach erkennbar via $h : \Gamma^* \to M$ in* **LDA** *und abgeschlossen in der strikten k-Faktor-Topologie für ein $k \geq 2|M|$. Dann ist L definierbar in* $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$.

Beweis. Sei $\alpha \in L$ und $A = \mathrm{im}_k(\alpha)$. Wir können annehmen, dass $A = \{w_1, \ldots, w_s\} \neq \emptyset$, da $L \cap \Gamma^*$ nach Proposition 4.8 definierbar in $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$ ist. Wir schreiben $\alpha = u \cdot w \cdot \beta$ mit $w \notin \alpha_k(\mathrm{suffix}_{k-1}(w) \cdot \beta)$ und w ist der letzte Faktor in α, der nur endlich oft vorkommt. Falls alle Faktoren unendlich oft vorkommen, setzen wir $\alpha = \beta$. Wir nehmen ohne Einschränkungen im folgenden an, dass es Faktoren gibt, die nur endlich oft vorkommen. Sei r die Ramseyzahl für monochromatische Dreiecke, wenn man $|M|$ Farben benutzt. Wir betrachten die folgende Faktorisierung für β:

$$\beta = u_1 v_1 u_2 \ldots u_{rs} v_{rs} \gamma$$

wobei $v_{i+1} = w_{(i \bmod s)+1}$ und $v_i \notin \mathrm{alph}_k(u_i \cdot \mathrm{prefix}_{k-1}(v_i))$. Wir definieren U_i als die Menge der Wörter in $[h(u_i)] \cap \left((A \setminus \{v_i\})^{*_k} \cup \Gamma^{<k}\right)$, sodass kein Wort in $U_i \cdot \mathrm{prefix}_{k-1}(v_i)$ das Wort v_i als Faktor besitzt. Wir definieren

$$P(\alpha) = [h(u)] \cdot w \cdot (A^{\infty_k} \cap U_1 v_1 \ldots U_{rs} v_{rs} \circ_k A^{\infty_k}) \cap A^{\mathrm{im}_k}.$$

Nach Konstruktion gilt $\alpha \in P(\alpha)$. Wir zeigen nun $P(\alpha) \subseteq L$.

Nach Wahl von r gibt es ein $a \in M$ und ein Idempotent $e \in E(M)$ so, dass jedes Wort in $\alpha' \in P(\alpha)$ eine Faktorisierung $\alpha' = u' \cdot w \cdot x' e_1' e_2' \beta'$ mit $h(u') = h(u)$, $h(x') = a$, $h(e_1') = h(e_2') = e$, $\mathrm{alph}_k(e_1') = \mathrm{alph}_k(e_2') = \mathrm{alph}_k(x' e_1' e_2' \beta') = A$ besitzt. Für α benutzen wir die Faktorisierung $\alpha = u \cdot w \cdot x e_1 e_2 \beta''$. Sei nun $\alpha' = u' \cdot w \cdot x' e_1' e_2' \beta'$ ein beliebiges Wort in $P(\alpha)$. Wir wollen zeigen, dass $\alpha' \in \overline{L} = L$.

Sei z' ein endliches Präfix von β'. Sei z das Suffix von $e_2' z'$ der Länge k. Nach Konstruktion ist z ein Faktor von e_1, d. h. es gibt $y_1, y_2 \in \Gamma^*$ mit $e_1 = y_1 z y_2$. Es gilt $x' e_1' e_2' z' \cdot y_2 e_2 \beta'' \in A^{\infty_k} \cap A^{\mathrm{im}_k}$. Wir behaupten, dass $u' \cdot w \cdot x' e_1' e_2' z' \cdot y_2 e_2 \beta'' \in L$ ist. Um dies zu zeigen, reicht es $h(e_2' z' y_2 e_2) = e$ zu zeigen. Wir faktorisieren $z' y_2 = x_0 \ldots x_m$ mit $0 < |x_i| \leq |M|$, sodass für jedes $i > 0$ ein Idempotent $f_i \in h(\Gamma^+)$ existiert mit $h(x_{i-1}) = h(x_{i-1}) f_i$. Nach Konstruktion und da $k \geq 2|M|$ gilt, haben wir $e \leq_{\mathcal{R}} h(x_0) f_1$, $e \leq_{\mathcal{L}} f_m h(x_m)$, $e \leq_{\mathcal{J}} f_i h(x_i) f_{i+1}$ (vgl. Beweis von Lemma 5.3). Mit Lemma 5.2 folgern wir $h(e_2' z' y_2 e_2) = e$.

Noch zu zeigen ist also, dass $P(\alpha)$ in $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$ definierbar ist. Wie im Beweis zu Proposition 4.8 zeigt man, dass Formeln ψ, ψ_i existieren, sodass $L(\psi) = [h(u)]$ und $L(\psi_i) = [h(u_i)]$. Wir geben Formeln φ_i an, sodass $L(\varphi_i) = U_i$ gilt. Zunächst definieren wir

$$\phi = \bigvee_{u \in \Gamma^{<k}} \left(\neg \bigvee_{a \in \Gamma} (\top \, \mathsf{F}_a \, \top) \right) \mathsf{F}_u \left(\neg \bigvee_{a \in \Gamma} (\top \, \mathsf{F}_a \, \top) \right),$$

um $\Gamma^{<k}$ zu erkennen und

$$\hat{\phi} = \left(\bigvee_{a \in \Gamma} \left(\top \, \mathsf{L}_a \left(\neg \bigvee_{b \in \Gamma} (\top \, \mathsf{F}_a \, \top) \right) \right) \right),$$

um Γ^* zu erkennen. Wir setzen dann

$$\varphi_i = \psi_i \wedge \left(\phi \vee \left(\bigwedge_{u \in \Gamma^k \setminus (A \setminus \{v_i\})} \neg (\top \,\mathsf{F}_u\, \top) \right) \right) \wedge \hat{\phi}.$$

Damit lässt sich nun die Formel

$$\psi \,\mathsf{L}_w \left(\varphi_1 \,\mathsf{F}_{v_1} (\ldots (\varphi_{rs} \,\mathsf{F}_{v_{rs}}\, \top) \ldots) \wedge \bigwedge_{u \in \Gamma^k \setminus A} \neg (\top \,\mathsf{F}_u\, \top) \right) \wedge \left(\bigwedge_{u \in \Gamma^k \setminus A} (\top \,\mathsf{F}_u\, \top) \Rightarrow \neg (\top \,\mathsf{L}_u\, \top) \right)$$

definieren. Diese definiert gerade die Sprache $P(\alpha)$, was zu zeigen war. □

Beweis von Satz 5.1. Wir zeigen den Ringschluss $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 1$.

„$1 \Rightarrow 2$“: Lemma 5.3.

„$2 \Rightarrow 3$“: Proposition 5.4.

„$3 \Rightarrow 4$“: Proposition 4.10.

„$4 \Rightarrow 5$“: Lemma 4.11.

„$5 \Rightarrow 6$“: Lemma 4.13.

„$6 \Rightarrow 7$“: Lemma 4.15.

„$7 \Rightarrow 1$“: Siehe [KKL2011]. □

6 Zusammenfassung

Es wurde die Klasse der Sprachen, die von $\mathrm{FO}^2[<,+1]$ definiert werden kann, untersucht. Dazu wurde ein zu [LPS2010] verschiedenes Intervall-Logikfragment $\mathrm{ITL}[\mathsf{F}_w, \mathsf{L}_w]$ eingeführt. Die zu $\mathrm{FO}^2[<]$ äquivalenten Fragmente $\mathrm{TL}[\mathsf{X}\,\mathsf{F}, \mathsf{Y}\,\mathsf{P}]$ und $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_a, \mathsf{Y}_a]$ wurden erweitert zu $\mathrm{TL}[\mathsf{X}, \mathsf{F}, \mathsf{Y}, \mathsf{P}]$ und $\mathrm{TL}[\mathsf{X}_w, \mathsf{Y}_w]$. Ranker auf Buchstaben wurden zu Rankern auf Wörtern erweitert. Die Äquivalenz zu $\Delta_2[<,+1]$ auf endlichen Wörtern wurde bewiesen. Es wurden außerdem die algebraischen Charakterisierungen mit den Varietäten **LDA** und $\mathbf{DA} * \mathbf{D}$ bewiesen. Dies zeigt die Lokalität von **DA** durch einen kombinatorischen Beweis. Durch die Charakterisierung durch Halbgruppen in **LDA** ergibt sich ein Entscheidungsverfahren für die Definierbarkeit einer regulären Sprache durch eines der Logikfragmente.

Die Ergebnisse wurden auf unendliche Wörter übertragen. Dabei lassen sich alle Charakterisierungen bis auf $\Delta_2[<,+1]$ übertragen. In [KKL2011] wird bewiesen, dass dies nicht möglich ist.

Literaturverzeichnis

[Alm1996] Almeida, Jorge: *A syntacitcal proof of locality of DA*. Internat. J. Algebra Comput. 6, 165–177 (1996)

[DGK2008] Diekert, Volker; Gastin, Paul; Kufleitner, Manfred: *A Survey on Small Fragments of First-Order Logic over Finite Words*. International Journal of Foundations of Computer Science 19.3, 513–548 (June 2008), Special issue DLT 2007

[DKL2010] Dartois, Luc; Kufleitner, Manfred; Lauser, Alexander, *Rankers over Infinite Words*, Technical report Nr. 2010/01, Formale Methoden der Informatik, Universität Stuttgart, Germany, May 2010

[Ehr1961] Ehrenfeucht, Andrzej: *An application of games to the completeness problem for formalized theories*. Fundamenta Mathematicae 49, 129–141 (1961)

[Eil1976] Eilenberg, Samuel: *Automata, Languages, and Machines*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1976

[Fra1950] Fraïssé, Roland: *Sur une nouvelle classification des systèmes de relations*. Comptes Rendus 230, 1022–1024 (1950)

[Gre1951] Green, James A.: *On the structure of semigroups*. Annals of Mathematics (second series) 54.1, 163–172 (July 1951)

[KKL2011] Kallas, Jakub; Kufleitner, Manfred; Lauser, Alexander, *First-order Fragments with Successor over Infinite Words*, STACS, 2011, to appear

[LPS2010] Lodaya, Kamal; Pandya, Paritosh K.; Shah, Simoni S., *Around Dot Depth Two*, Developments in Language Theory, 2010, pp. 303–315

[MP1971] McNaughton, Robert; Papert, Seymour: *Counter-free automata*. The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.-London, 1971, With an appendix by William Henneman, M.I.T. Research Monograph, No. 65

[Pin1986] Pin, Jean-Éric: *Varieties of formal languages*. North Oxford Academic, 1986

[Sch1965] Schützenberger, Marcel-Paul: *On finite monoids having only trivial subgroups*. Information and Control 8, 190–194 (1965)

[TT2002] Tesson, Pascal; Thérien, Denis, *Diamonds are Forever: the Variety DA*, Semigroups, Algorithms, Automata and Languages (G.M.S. Gomes, P.V. Silva; Pin, J.-É., eds.), 2002, pp. 475–500

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen benutzt zu haben.

(Tobias Walter)