

Universität Stuttgart

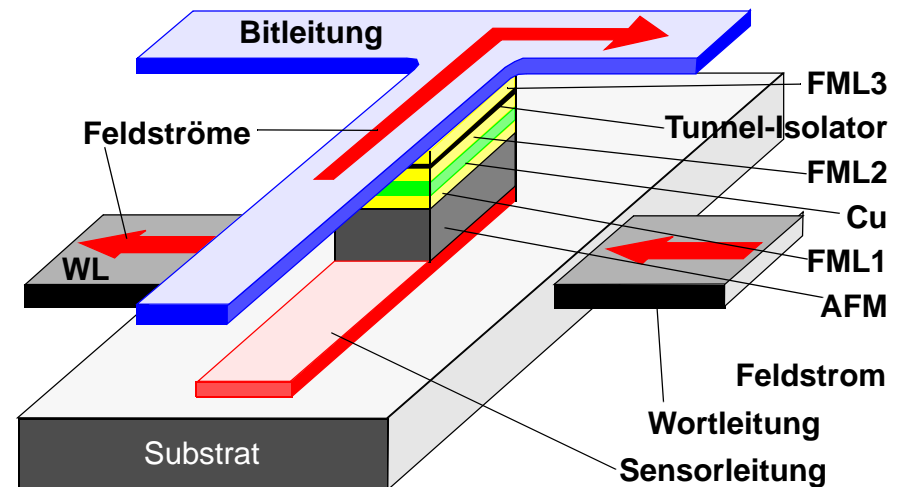
Institut für Parallele und
Verteilte Systeme (IPVS)

Universitätsstrasse 38
D-70569 Stuttgart

Elektro-Technische- Grundlagen

Dr.rer.nat. Rainer Böhm / IPVS
Universität Stuttgart

Folien zur Vorlesung WS 2004/05



Inhaltsverzeichnis

1. Mass-Systeme als Axiomensysteme.	5
1.1 Aufbau von Mass-Systemen	6
1.2 Mass-Systeme und ihre Normale	8
1.3 MKSA-System und seine Grund-Einheiten	9
1.4 Historisches	15
2. Skalare und Vektoren	16
2.1 Vektoren	17
2.2 Vektor-Addition	18
2.3 Multiplikation Vektor mit Skalar	21
2.4 Skalare Multiplikation zweier Vektoren	22
2.5 Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren	23
2.6 Zusammenfassung	25
2.7 Zeitliche Differential-Operationen	26
3. Angeschlossene mechanische Einheiten.	28
3.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung	29
3.2 Kraft-Einheit: Newton	30
3.3 Fläche, Volumen	31
3.4 Das Drehmoment	32
3.5 Sonstige gesetzliche Einheiten	33
4. Angeschlossene el. und magn. Einheiten	35
4.1 Elektrische Spannung	36
4.2 Widerstand	38
4.3 Das Ohmsche Gesetz	39
4.4 Kirchhoff'sche Maschen-Regel	40
4.5 Kirchhoff'sche Knoten-Regel	41
4.6 Kirchhoff'sche Regeln in der Anwendung	42
4.7 „Fehlerfreies“ Messen	44
4.8 Gleichstromnetze	45
5. Felder	48
5.1 Ruhende Ladungen	49
5.2 Das „Feld“ und seine „Stärke“	50
5.3 Visualisierung der „Feld“-Stärke	51
5.4 Das Potential U	52
5.5 Zusammenhang zwischen E und U	53
5.6 Modellvorstellung: Das Elektron	54
5.7 Induktions-Konstante μ_0	57
5.8 Influenz-Konstante ε_0	58
5.9 Nochmals das Ohm	59
6. Der Kondensator als Ladungsspeicher	60
6.1 Kapazitäts-Berechnung	61
6.2 Gespeicherte Energie im E-Feld	62
6.3 Kondensator-Schaltungen	63
6.4 Materie im elektrischen Feld E	64
6.5 Äquivalenz-Beziehung	65
6.6 Zusammenfassung der Einheiten	66

Inhaltsverzeichnis

7. Laplace'sches Gesetz (Bewegte Ladungen)	67
7.1 Magnetfelder von Strömen	68
7.2 Magnetfeld H einer langen Spule	70
7.3 Anmerkung zur Integration	71
7.4 Materie im Magnetfeld	72
7.5 Das Elektron in Feldern	74
7.6 Das Induktionsgesetz (experimentell)	76
7.7 Das Induktionsgesetz (mathematisch)	77
7.8 Die Selbst-Induktion	78
8. Umgang mit DGL	79
8.1 Geometrische Deutung	80
8.2 Mathematische Lösung einfacher DGL	81
8.3 Ausgleichsvorgänge	82
8.4 Energie des Magnetfelds	88
8.5 Aufladen Kondensator	90
9. Wechselströme und ihre Darstellung	93
9.1 Wechselstromwiderstand von R , L , C	94
9.2 Anwendungen der Zeiger	95
9.3 Mittelwerte, Leistung	96
9.4 Der ideale Reihen-Schwingkreis	97
9.5 Realer Reihen-Schwingkreis	98
9.6 Der ideale Parallel-Schwingkreis	99
9.7 Der reale Parallel-Schwingkreis	100
9.8 Zusammengesetzte Netzwerke	101
9.9 Ortskurven für $Z(\omega)$	102
10. Grundlagen der Halbleiter-Physik	103
10.1 Halbleiter-Geschichte	104
10.1 Metall-Elektronen	105
10.2 Der Energie-Raum	106
10.3 Erweiterte Grundlagen (alle Stoffe)	109
10.4 Fermi-Verteilung von Silizium	110
10.5 Fermi-Verteilung von As in Si	111
10.6 Das Periodensystem der Elemente	112
10.7 Schalen-Modell des Atoms	113
10.8 Gittermodell (Teilchen)	114
10.9 Auswahl-Kriterien f. Dotierungs-Partner	115
10.10 Dotierungen	116
10.11 Kenngrößen versch. Materialien	117
10.12 Dotierung von Halbleitern	118
10.13 Leitungs-Arten	119
10.14 Rekombination	120
11. Experimentell bestimmbare Größen	121
11.1 Kombinierte Messverfahren	122
11.2 Massenwirkungsgesetz für Eigenleitung	123
11.3 Arrhenius-Plott und Zonenschmelzen	124
11.4 „Reinheitsgebot“	125
11.5 Temperatur-Abhängigkeiten	126

Inhaltsverzeichnis

11.6 Hoch- und Tieftemperatur-Abhängigkeiten	127
11.7 Einige errechnete Werte für n	128
11.8 Zur Beweglichkeit.	129
11.9 Berührungsspannung von Metallen	130
11.10 Halbleiter-Metall-Kontakt	131
11.11 Kontakt zwischen N- und P-Leiter	134
11.12 Einige Kennlinien-Modelle	141
11.13 Der Arbeitspunkt im „Grundstromkreis“	142
11.14 Dioden-Bauformen	144
12. Der Transistor	146
12.1 Grundlegendes	147
12.2 Transistor, Schema	148
12.2 Die Kennlinien des Transistors	151
12.3 Arbeitspunkt(e)	153
12.4 Signal-Verhalten	154
13. Höchstintegration	155
13.1 Silizium-Einkristall	156
13.2 Von der Idee zum fertigen Chip	158
13.3 Ausführungsformen Bipolar-Technik	164
13.4 Der MOS-Kondensator	166
13.5 NMOS- und PMOS-Varianten	168
13.6 Kennlinien NMOS-FET	170
13.7 Ergänzung MOS-Kennlinie (E-Typ)	171
13.8 Klassifizierung der MOSFET's	172
13.9 Werteextraktion aus den Kennlinien	174
13.10 SPICE-Modell	175
14. Digitale Grundschaltungen	176
14.1 Logische Schaltungen	177
14.2 Negative Logik (nicht invertierend)	178
14.3 Der Transistor als Schalter	179
14.4 Schalter und Inverter	180
14.5 ED-Inverter	182
14.6 CMOS-Inverter	183
14.7 Anwendungen Inverter	185
14.8 Binär-Arithmetik	186
14.9 Boole'sches	190
14.10 Die NMOS-Gatter NAND und NOR	191
14.11 CMOS-Gatter	193
15. Speicherprinzipien	195
15.1 Magnetische Informations-Speicherung	195
15.2 Magnetoresistanz	202
15.3 Kernspeicher	203
15.4 MRAM vs. SQUID	204
16. Elektrische Informations-Speicherung	206
16.1 CCD (Ladungstransfer-Speicher)	207
16.1 Legende zum CMOS-Transferrate	208

Inhaltsverzeichnis

16.2 SRAM und DRAM	210
16.3 ROM, PROM, EPROM	212
16.4 Josephson-Zelle	213
16.4 FRAM (Ferroelektrisches RAM)	214
16.6 CAM (Content Adressable Memory)	215
17. Optische Informations-Speicherung	216
17.1 CD-ROM	217
17.2 Magneto-Optik.	219
17.3 Analog-Film, Microfiche.	220
17.4 Holographische Speicher	221
17.5 Mechanische Informations-Speicherung	222
17.6 Akustische Informations-Speicherung	223
18. Anzeigen	224
18.1 Sieben-Segment-Anzeige	225
18.2 Flüssig-Kristalle: Polarisiertes Licht.	226
18.3 Elektronenstrahl-Bildschirm.	230
19. Sender: Gas-Laser: Physikalischer Aufbau	233
19.1 Laserdioden, LED: Atomares	234
19.2 Empfänger: Photodiode, Solarzelle.	235
19.3 Analog-Digital-Wandler und umgekehrt	237
19.4 Mäuse: Opto-mechanische Maus.	238
19.5 Mäuse: Optische Maus	239
19.6 Einpass-Scanner	240
20. Leitungskonzepte für Informationen	241
20.1 Basisband-Konzepte	242
20.2 Leitungskonzepte	243
20.3 Breitband-Netzwerke	244
20.4 „Rahmen“-Bedingungen	245
20.5 Etwas zu Netzen	246
21. Fehler-Erkennung	247
21.1 Fehler-Korrektur	248
21.2 CRC-8	249
21.3 Die beiden Manchester-Codierungen	250
21.4 Andere Bus-Konzepte	251
21.5 Physik des Coax-Kabels	252
21.6 Fourier-Analyse.	253
21.7 Physik der Glasfasern	254
21.8 Brechungsindex.	255
21.9 Glasfaser- Profile Einkopplung	256
21.10 Das Dezibel.	257
21.11 Dämpfungsursachen	258
21.12 Glasfaserkennwerte	259
21.13 Basis-Charakteristika	260
21.14 Erbium-dotierte Faserverstärker (EDFA)	262

1. Mass-Systeme als Axiomensysteme

Grundlegend gibt es in der Physik zwei Vorgehensweisen zum Erstellen von Gesetzen:

1. Man beobachtet (misst) die Natur, erkennt nach vielen Versuchen eine Gesetzmässigkeit und bildet sich daraus eine Theorie. Damit ist die Zukunft von physikalischen Vorgängen berechenbar.
2. Man bildet sich zuerst ein Modell der Wirklichkeit (Theorie) und prüft dann dieses Modell an der Wirklichkeit.

Warnung: Bei den alten Griechen wurde „vorgeschrieben“: Schwere Körper fallen schneller als leichte

1.1 Aufbau von Mass-Systemen

Eine physikalische Grösse besitzt immer:

- einen Betrag z.B. 1.234
- eine Einheit (oder Dimension z.B. [m])
- manchmal eine Richtung, dann ist sie ein Vektor, ansonsten ein Skalar

Die Verknüpfung zwischen physikalischen Grössen erfolgt durch Gleichungen.

Man sollte bei Gleichungen immer eine Dimensionsprobe machen.

Wir unterscheiden zusätzlich zwischen Grund-Grössen und abgeleiteten Grössen.

Zur Beschreibung der Wirklichkeit versucht man mit wenigen Grundgrössen auszukommen: Historisch CGS (ungeeignet für E-Technik), heute MKSA [m] [kg] [s] [A]

Die Einheiten werden mit Vorsilben aus Dreierpotenzfolgen versehen, wie kilo = k || K, mega = M, milli = m, mikro = μ , nano = n, pico = p

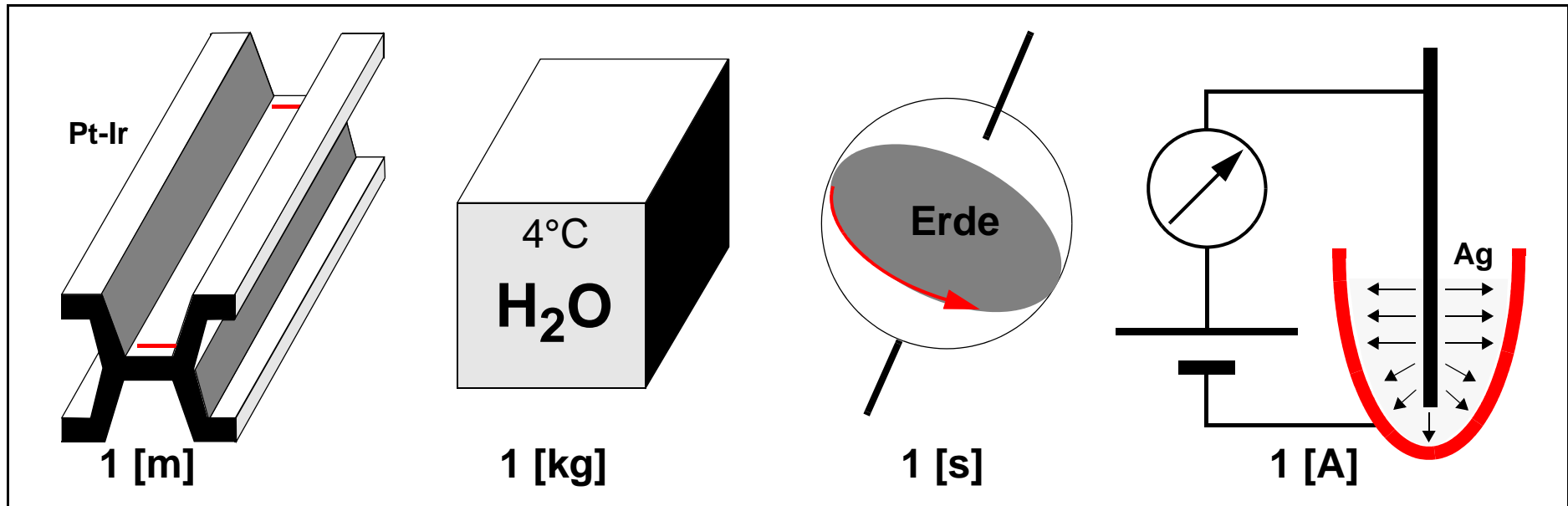
1.1.1 Vorsilben-Tabelle

Vorsilbe	Symbol	Zehnerpotenz	Zweierpotenz
yocto	y	10^{-24}	-
zepto	z	10^{-21}	-
atto	a	10^{-18}	-
femto	f	10^{-15}	-
pico	p	10^{-12}	-
nano	n	10^{-9}	-
micro	μ	10^{-6}	-
milli	m	10^{-3}	-
centi	c	10^{-2}	-
dezi	d	10^{-1}	-
ohne	-	10^0	2^0
deka	D	10^1	-
hecto	h	10^2	-
kilo	k oder K	10^3	2^{10}
mega	M	10^6	2^{20}
giga	G	10^9	2^{30}
tera	T	10^{12}	2^{40}
peta	P	10^{15}	2^{50}
exa	E	10^{18}	2^{60}
zeta	Z	10^{21}	2^{70}
yota	Y	10^{24}	2^{80}

1.2 Mass-Systeme und ihre Normale

- Alle Grundgrößen müssen **unabhängig** von einander sein
- Mehrere Grundgrößen erforderlich, z.B. LMTI
- Messen heisst vergleichen
- Materiell festlegen, damit auch juristisch = Eichnormale
Eich-Normale können als Labor-Normale dupliziert werden
- Ableitung von anderen Größen nach physikalischen Gesetzen
- Unbekanntes mit Bekanntem festlegen

1.3 MKSA-System und seine Grund-Einheiten



Paris
(Sèvres)

Paris
(Sèvres)

Planet
Erde

jedes
Labor

1.3.1 Länge: Meter-Konvention

Alte Griechen hatten auch schon konkrete Vorstellungen vom Äquator-Umfang

Seit 1799 liegt das **Urmeter** in Paris (mit sekundären nationalen „Ur-Metern“) als 40.000.000 Teil des Äquatorumfangs der Erde.

Dies ist eine ebensolche willkürliche Einheit wie die Elle, Zoll, Fuss, usw.

Seit 1983 ist das Urmeter ersetzt (angeschlossen) durch eine Zeitmessung mit der Atomuhr als Wegstrecke, die ein Lichtstrahl im Vakuum in der Zeit von $1/299792485$ Sekunden = 3.34 [ns] zurücklegt. Oder auch

$$1.553.164,13 \cdot \lambda_{\text{Cd}} \text{ bei } 15^\circ\text{C und } 1 \text{ [atm]}$$

Grosse Längen sind somit direkt als Laufzeit, kleine Länge interferometrisch (Bruchteile von Lichtwellenlängen) messbar. Technische Längen für sekundäre Normale (Endmaße, Meterstab = 0.2% Fehler, Schieblehre, Messuhr)

1.3.2 Praktische Längen-Messung

Mit dem Meterstab: Unterteilung in 1000 Teile = [milli meter] = [mm]

Anlegen an das Objekt und vergleichen, bis eine Strich-Markierung passt

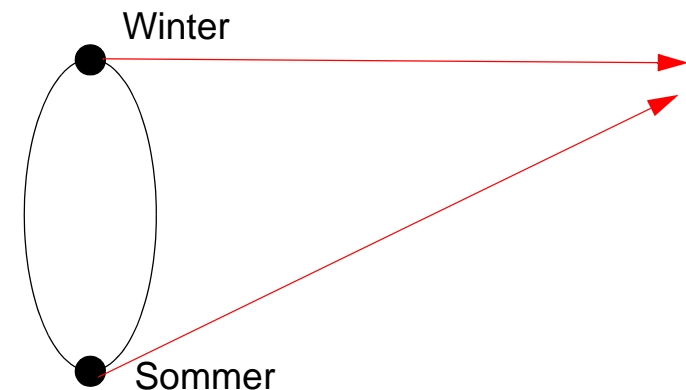
Genauigkeit: Meterstab selbst 2 Promille, Messung $1/2$ [mm], somit bei kleinen Strecken gewaltige Fehler (z.B. bei 5 [mm] ergeben sich 10% Fehler)

Abhilfe mit Schieblehre: Diese erlaubt Ablesungen von $1/10$ [mm]

Grössere Längen durch Aneinander-Legen von Meterstäben, Zeitmessung von Ultraschall-Signalen oder Laser-Blitzen

In der Astronomie durch Parallaxe auf der Erdbahn
Relativ-Messung zu den Fixsternen

Interferometer für kleinste Längen(änderungen)



1.3.3 Die Massen-Einheit Kilogramm

Grundlage der Herleitung des Ur-Kilogramms ist eine Substanz, die auf der Erde sehr häufig vorkommt. Auch heute noch ist ein $[\text{dm}^3]$ H_2O luftfrei bei 4°C als Standard einsetzbar. In Paris (Sèvres) liegt ein Platin-Würfel mit exakt 1 [kg] Masse. (Vorteil: Er verdampft nicht und kann zum „Anschliessen“ der nationalen Standards dienen).

Die so definierte Masse ist als **nicht-relativistisch** zu betrachten.

Messung: Absolute Wägung mit Balkenwaage (Vergleich von Massen)

Mit der Federwaage (Hooke'sches Gesetz) ==> Krätemessung

Wichtig: Messung muss reproduzierbar (beliebig oft wiederholbar) sein

Prototyp Nr. 52 (BRD 1953 in Sèvres angeschlossen) Masse = 1.000 000 162 [kg]

1.3.4 Die Zeit-Einheit Sekunde

Ursprünglich war die Sekunde [s] an der Erdrotation festgemacht, die nur **relativ zur Sonne** (Sonnentag mit Unterteilungen bis zur Sekunde) oder zu den Fixsternen (Sterntag) messbar ist. Der mittlere Sonnentag ist um 1/365.256 länger als der Sterntag (daher Schaltjahre). Die Erdrotation ist nicht konstant und wird immer langsamer wegen der Gezeitenreibung.

Man benutzt daher seit 1964 periodische Vorgänge (Schwingungen) des Cäsium-Isotops ^{133}Cs für die Festlegung der Einheit $1[\text{s}] = 9192631770$ Schwingungen.

Erreichbare Genauigkeit $\Delta t/t = 10^{-13}$

1.3.5 Die elektrische Stromstärke I

Schon in der ursprünglichen Festlegung dieser Grundgrösse wurde an eine Zeit- und an eine Massen-Einheit angeschlossen: AgNO_3 in wässriger Lösung scheidet in 1 [s] bei 1 [A] eine Masse von 1.118 [mg] Ag ab. $1[\text{A}] \triangleq 1.118 [\text{mg} \cdot \text{s}^{-1}] \text{ Ag}$ (kein '=')

In heutiger Zeit wird die Stromstärke von 1 [A] an eine Kraftmessung zwischen zwei parallelen, stromführenden Leiterbahnen angeschlossen nach dem Biot-Savart'schen Gesetz.

Wir müssen deshalb zunächst die Kraft einführen und benötigen dazu den Begriff des Vektors.

1.4 Historisches

Der nachfolgende Ausschnitt stammt aus

F.Kohlrausch: Lehrbuch der PRAKTISCHEN PHYSIK, 9. Auflage, B.G.Teubner,
1901, Leipzig und Berlin, S. 345

Elektricität.

80. Allgemeines über galvanische Arbeiten.

I. Gesetze des Zusammenhanges zwischen Stromstärke i , elektromotorischer Kraft oder Spannung E und Widerstand w . E i n h e i t e n.

Die aus den Weber'schen Definitionen des absoluten Maßsystems entnommenen Einheiten sind durch Multiplikation mit einer Potenz von 10 auf eine für den Verkehr passend erachtete Größe gebracht worden (vgl. Anhang 24, 26 u. 29). Es gelten

für den Widerstand das Ohm $1\Omega = 10^9$ [C.G.S.-Einheiten]

für die Stromstärke das Ampere $1A = 10^{-1}$ " "

für die Spannung oder elektro-
motorische Kraft das Volt $1V = 10^8$ " "

Wegen der Schwierigkeit der absoluten Messung ist gesetzlich die Stromeinheit auf das elektrochemische Äquivalent und die Widerstandseinheit auf das Quecksilber folgendermaßen zurückgeführt (internationale Einheiten):

.....

Das Ohm ist also $= 1,063$ Siemens-Einh.

Ferner ist $1\Omega = 1,0136$ Brit. Ass.-Einh.

Zeitweilig war das Ohm definirt als 1,060 m Hg 0°, „legales Ohm“.

Es gilt:

Ohm:leg. Ohm:Brit. Ass.-Einh.:Siemens-Einh. = 1,063:1,060:1,0487:1

2. Skalare und Vektoren

Definitionen

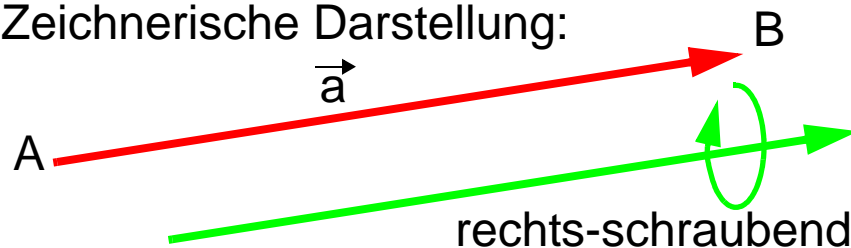
Skalare sind Größen, deren Werte reelle Zahlen sind. Beispiele sind Masse, Temperatur, Energie, Arbeit, ...

Vektoren sind Größen, zu deren Charakterisierung man neben einer Masszahl noch einer Richtung (polare Vektoren) benötigt. Kommt zur Richtung noch ein Drehsinn hinzu, dann sprechen wir von axialen Vektoren.

Beispiele für **polare** Vektoren:
Kraft, Geschwindigkeit,
Beschleunigung, Feldstärke

Beispiele für **axiale** Vektoren:
Winkelgeschwindigkeit und
Winkelbeschleunigung

Zeichnerische Darstellung:



Mathematisch besteht **kein**
Unterschied zwischen Polar-
und Axial-Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$$

2.1 Vektoren

Mathematische Beschreibung von Vektoren in geeigneten Koordinaten-Systemen wie kartesisch, zylindrisch oder kugelig (wichtig für Vektorfelder).

Jeder Vektor wird durch zwei Werte-Tripel für Start- und Endpunkt beschrieben, wobei die Ursprungs-Koordinate entfallen kann: $\{x_0, y_0, z_0\}$ $\{x_1, y_1, z_1\}$

- **Einheits**-Vektor: Vektor \vec{e} der Länge 1 jeweils in x, y und z-Richtung ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$)
- **Null**-Vektor: Vektor der Länge NULL (Punkt), **keine** Richtung
- **Radius**-Vektor: Vektor vom Ursprung zum Punkt P

Betrag eines Vektors allgemein:

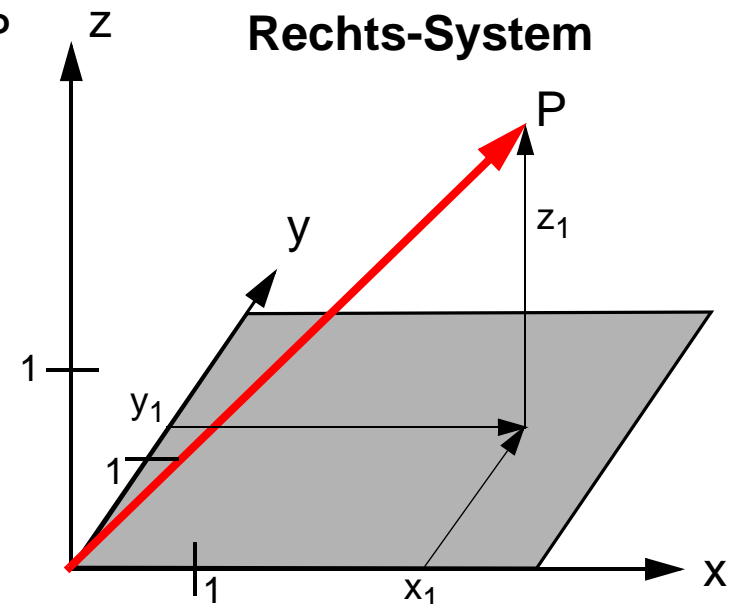
$$|\vec{x}| = \{ (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \}^{1/2}$$

Betrag des Radius-Vektors:

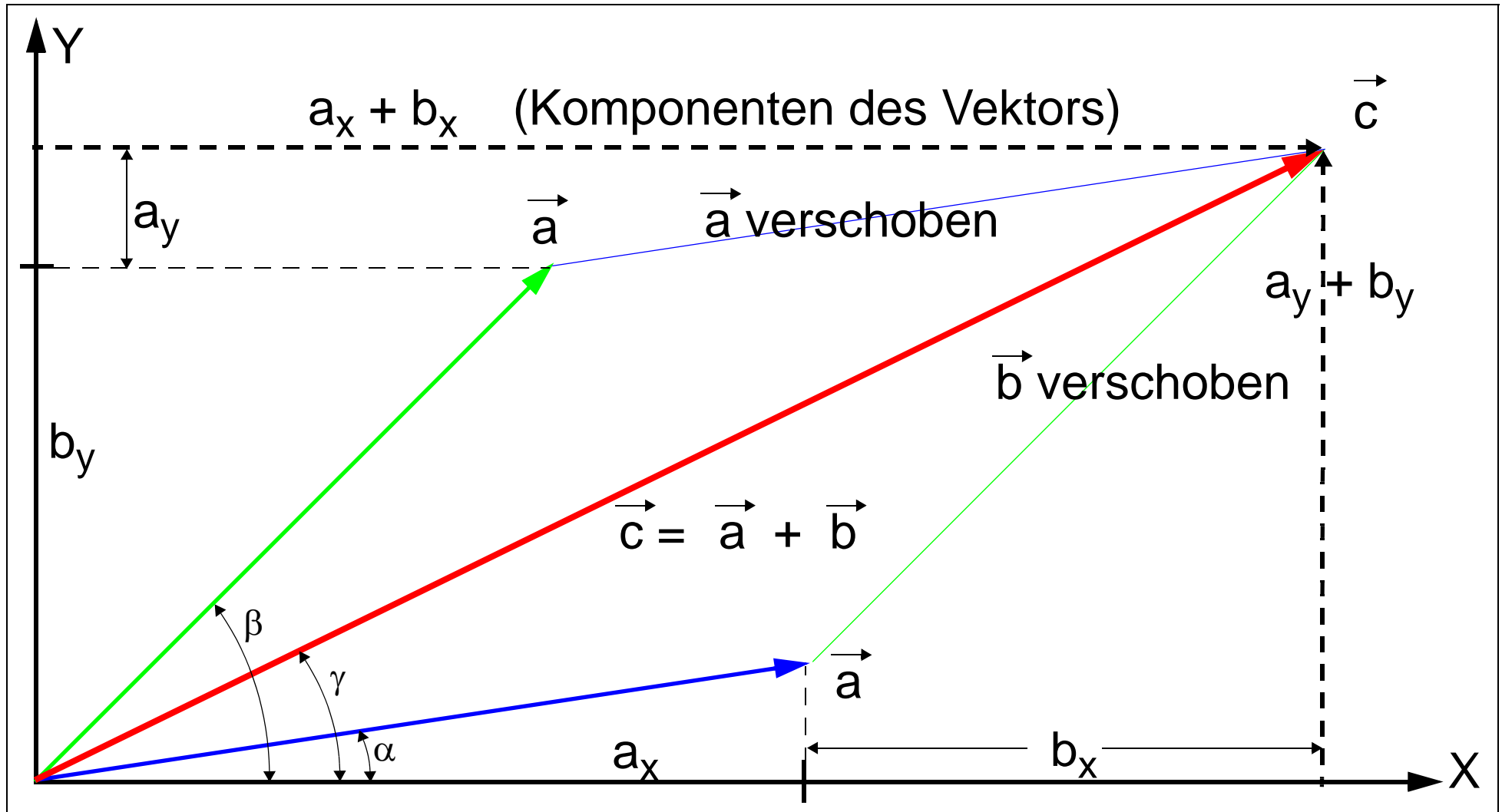
$$|\vec{r}| = \{ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \}^{1/2}$$

Einheits-Vektor: $\vec{e} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$

Allgemein: $\vec{a} = \vec{e}_x(x_1) + \vec{e}_y(y_1) + \vec{e}_z(z_1)$



2.2 Vektor-Addition im R2 (grafisch)



2.2.1 Vektor-Addition im R3 (mathematisch)

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y + (a_z + b_z)\vec{e}_z \quad \text{ADD}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{e}_x + (a_y - b_y)\vec{e}_y + (a_z - b_z)\vec{e}_z \quad \text{SUB}$$

Winkelbeziehungen:

$$\sin \alpha = a_y / \vec{a}, \quad \sin \beta = b_y / \vec{b}$$

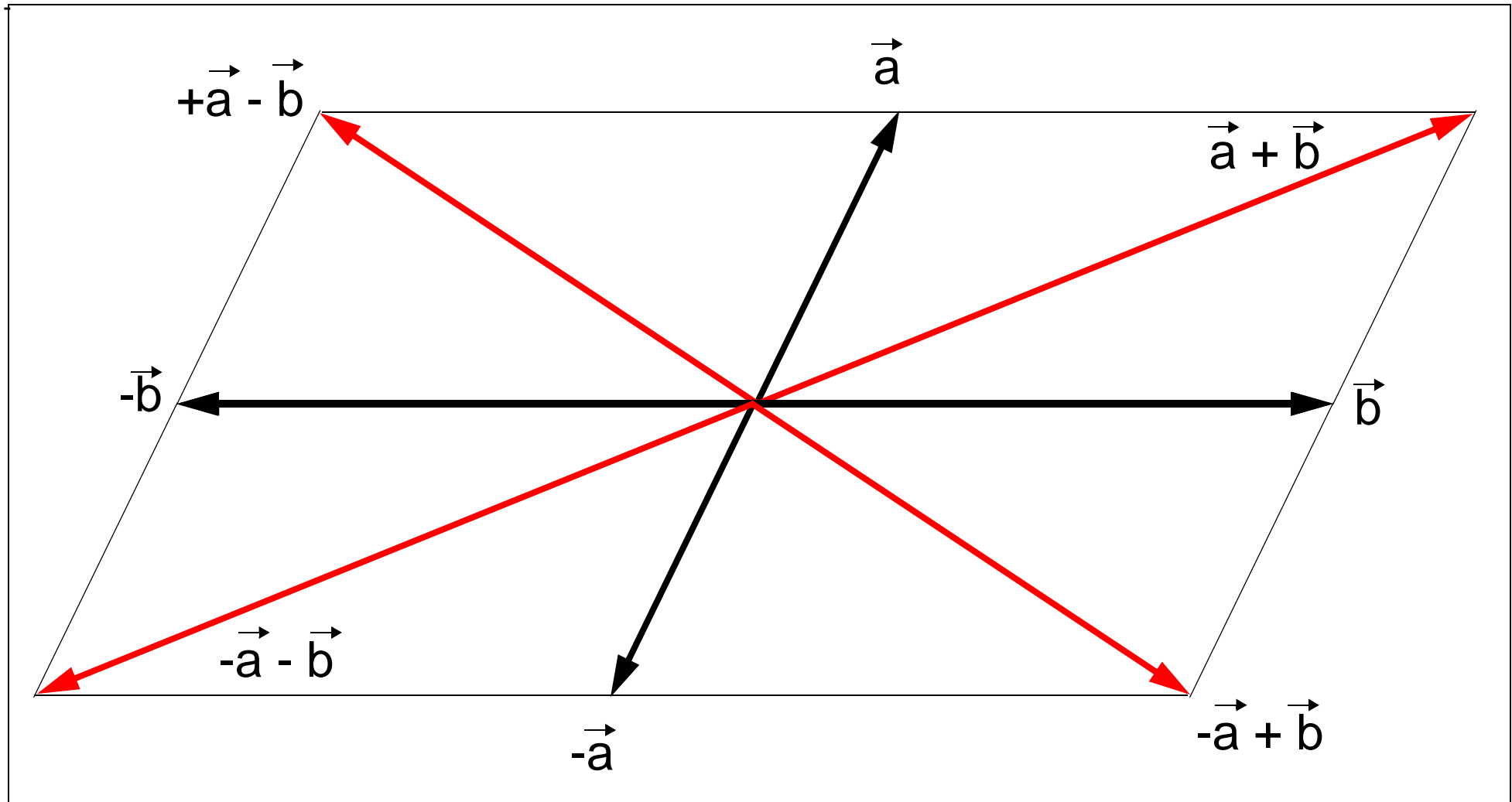
$$\cos \alpha = a_x / \vec{a}, \quad \cos \beta = b_x / \vec{b}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\vec{a} * \vec{b}}$$

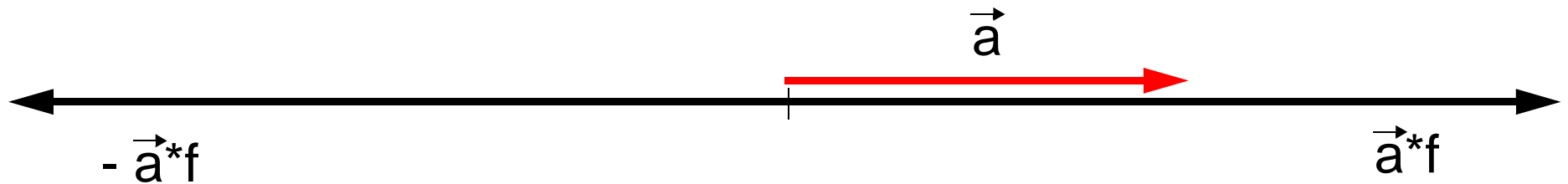
$$\text{Im R3: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} \quad \text{--- (Komp.)}$$

$$\text{Oder: } \vec{a} \cdot \vec{b} \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

2.2.2 Vektor-Subtraktion



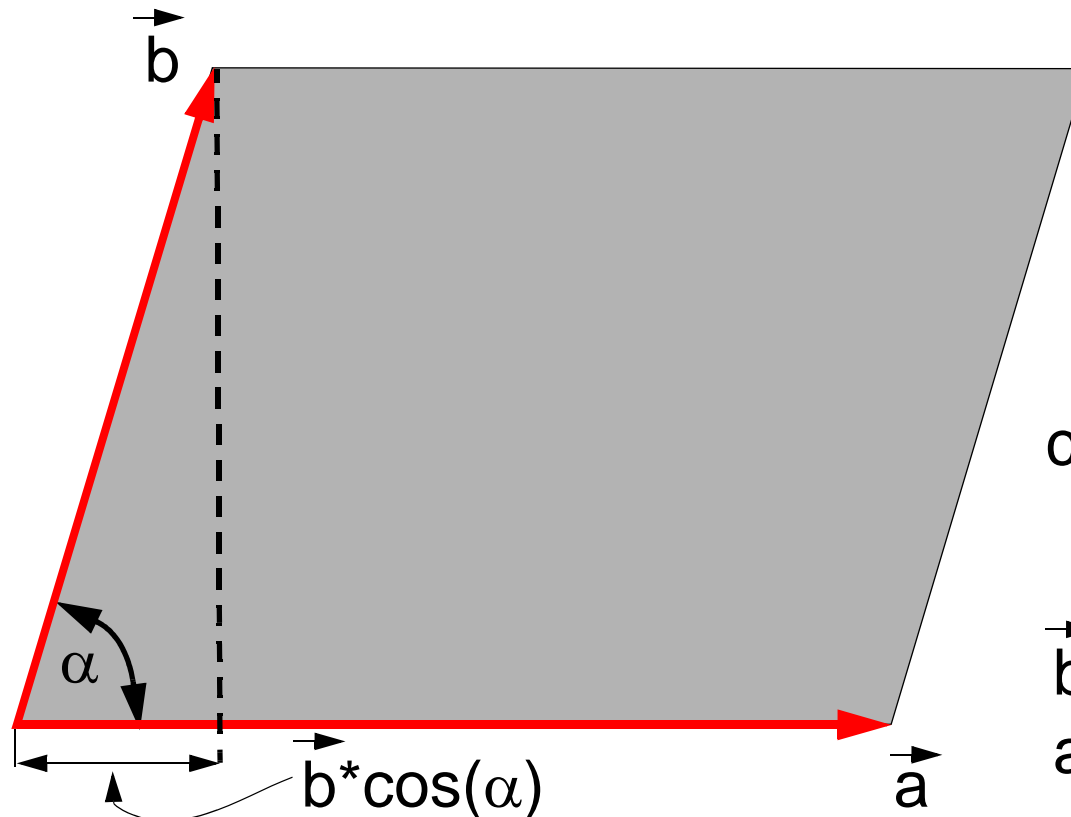
2.3 Multiplikation Vektor mit Skalar



Richtung des Vektors \vec{a} bleibt erhalten bei der
Multiplikation, Länge = Betrag wird mit Faktor f
multipliziert, incl. Vorzeichen für Richtung
Division durch Skalar = inverse Multiplikation

2.4 Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$



Oder auch:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

$b \cdot \cos(\alpha)$ als Projektion
auf den Vektor \vec{a}

2.5 Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{c}|$$

Nur Betrag

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

\vec{b}

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

usw.

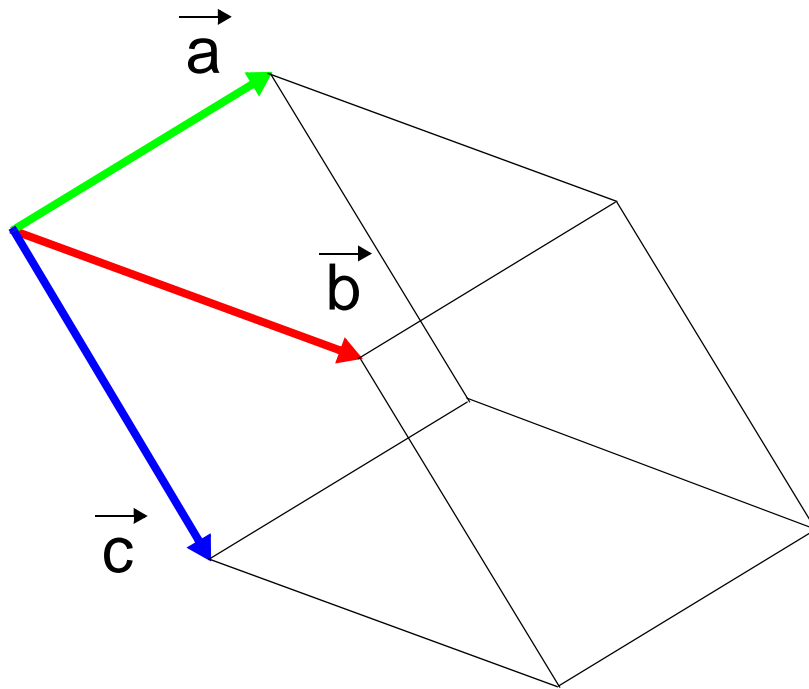
Richtung von \vec{c} :
Rechts-System,
orthogonal zu
beiden Vektoren

Betrag = Fläche des
Parallogramms

$$\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$$

\vec{a}

2.5.1 Drei Vektoren im Raum (Spat-Produkt)



$(a \times b) \cdot c$ ergibt einen Skalar, der dem Betrag nach gleich dem Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallel-Epipeds ist. Man bezeichnet diese gemischte Rechnung als **Spat-Produkt**.

$a \times (b \times c)$ ergibt einen zu b und c „komplanaren“ = parallelen Vektor

Division von Vektoren gibt es nicht

2.6 Zusammenfassung

Auf das Assoziativ- und Distributiv-Gesetz wird nur hingewiesen

Produkte im kartesischen Koordinaten-System: (mit $a_x = a_{x2} - a_{x1}, \dots, b_z = b_{z2} - b_{z1}$)

1. Skalares Produkt: $\vec{a} * \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

2. Vektor-Produkt: $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
(man vergleiche den Betrag nach 2.5)

3. Spat-Produkt: $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = \vec{a} * \vec{b} * \vec{c} = \vec{b} * \vec{c} * \vec{a} = \vec{c} * \vec{a} * \vec{b} = -\vec{a} * \vec{c} * \vec{b} = -\vec{b} * \vec{a} * \vec{c} = -\vec{c} * \vec{b} * \vec{a} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
(Vektor-Produkt ergibt Vektor, skalare Multiplikation dann einen Skalar)

Die Determinanten-Schreibweise kann mit der Sarrus'schen Regel nach

Unterdeterminanten entwickelt werden. Jeweiliges Vorzeichen beachten!

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ & \times & \\ & & \end{vmatrix}$$

2.7 Zeitliche Differential-Operationen

Einige **Rechenregeln** (meist ist die Ableitung eine Tangente an die Raumkurve):

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt} \pm \frac{d\vec{c}}{dt} \quad \text{Die Zeit ist ein Skalar}$$

$$\frac{d}{dt} (\varphi \vec{a}) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{a} + \varphi \frac{d\vec{a}}{dt} \quad (\varphi \text{ ist eine skalare Funktion von } t)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} * \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} * \vec{b} + \vec{a} * \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (\text{ergibt Vektor-Summe aus zwei Vektoren})$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (\text{die Faktoren dürfen **nicht** vertauscht werden})$$

$$\frac{d}{dt} \vec{a}[\varphi(t)] = \frac{d\vec{a}}{d\varphi} * \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{Kettenregel, ergibt Vektor})$$

2.7.1 Räumliche Differential-Operationen

1. **Punktweise** Ableitungen von Skalaren nach den Raum-Koordinaten (kartesisch)

$$\text{grad } U(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \vec{e}_z$$

U ist ein Skalar-„Feld“
grad(U) ein V.-Feld

Der Vektorgradient wird hier nicht behandelt

2. **Punktweise** Ableitungen von Vektoren nach den Raum-Koordinaten (kartesisch)

$$\text{div } \vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial \vec{V}(x)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{V}(y)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{V}(z)}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Skalar-
feld

$$\text{rot } \vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Die Anwendung von rot auf einen Punkt im Vektorfeld ergibt wieder ein Vektorfeld

3. Angeschlossene mechanische Einheiten

Zweiter Schritt: An die zuvor festgelegten Grund-Einheiten LMTI sind durch entsprechende Gesetze und Messungen die benötigten Grössen „anzuschliessen“.

Zweckmässig: Vom Einfachen zum Komplizierten

Im Beispiel **Kraft** ist das Newton'sche Grundgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ der Ausgangspunkt, man wird sich daher zunächst mit den ersten und zweiten Ableitungen der Länge befassen, dann mit dem Skalar-Produkt $m \cdot \vec{a}$. Dazu sind grundlegende Überlegungen über die Gleichheit von „schwerer“ und „träger“ Masse erforderlich.

Bei den Eich-Normalen [m] und [kg] konnte man etwas „in die Hand“ nehmen, bei der [s] ist dies zwar noch irgend eine Art von „Uhr“, die Sekunde selbst kann man nirgends aufbewahren, sie wird nur durch die Messung von Zeit-Intervallen erhalten.

Vorteil im Mittelalter: Eine Sanduhr ist ein Zeit-Normal zum Anfassen und Portieren. In jedem mechanischen Foto-Apparat war ein „Ablauf-Werk“ eingebaut, das Zeiten zwischen 1/1000 [s] und 1 [s] einigermaßen reproduzierbar darstellen konnte, dies ist aber kein Eich-Normal, sondern eine sekundäre bis tertiäre Zeitbasis.

3.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

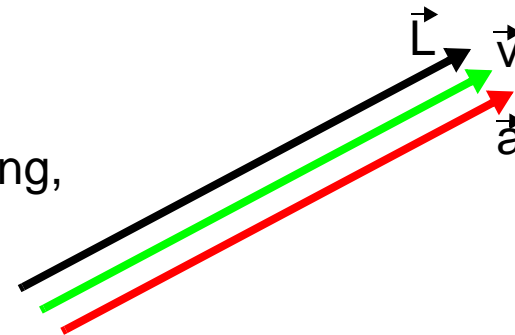
Ausgangspunkt: Länge $\vec{L} = \vec{L}_x + \vec{L}_y + \vec{L}_z = \vec{e}_x l_x + \vec{e}_y l_y + \vec{e}_z l_z$ (auch erlaubt)

Erste Ableitung: $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_x}{dt} + \frac{d\vec{L}_y}{dt} + \frac{d\vec{L}_z}{dt} \quad \left[\frac{m}{s} \right] = [ms^{-1}]$

Zweite Ableitung: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_x}{dt} + \frac{d\vec{v}_y}{dt} + \frac{d\vec{v}_z}{dt} = \frac{d^2\vec{L}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{L}_x}{dt^2} + \frac{d^2\vec{L}_y}{dt^2} + \frac{d^2\vec{L}_z}{dt^2}$
 $\left[\frac{m}{s} \right] \left[\frac{1}{s} \right] = [ms^{-2}]$

Richtungs-Abhängigkeiten: Keine, alle in L-Richtung,

bzw. in die Koordinaten-Richtungen



3.2 Kraft-Einheit: Newton

$\vec{F} = m * \vec{a}$ Die Kraft F ergibt sich aus der skalaren Multiplikation, sie wirkt somit in der Richtung der Beschleunigung a auf 1 [kg],

$\vec{a} = 9.80665 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}] = [\text{ms}^{-2}]$ Standard-Erdbeschleunigung

$$1 [\text{N}] = 1 [\text{kg}] [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}] = 1 [\text{mkgs}^{-2}] \quad \text{Einheit der Kraft}$$

Es sei bereits hier darauf hingewiesen, dass alle Kräfte, auch die der elektro-statischen, der magneto-statischen und die der elektro-magnetischen Art ebenfalls in [N] gemessen werden!

3.3 Fläche, Volumen

Ausgangspunkt: Länge \vec{L} , ein Vektor

Fläche $A = \vec{L} * \vec{L}$, Skalar-Produkt, also ein Skalar

Übliche Einheiten (Ausschnitt): $[m^2]$, $[\mu m^2]$, $[km^2]$,
 $1 [Ar] = 100 [m^2]$, $1 [Hektar] = 100 [Ar] = 10.000 [m^2]$

Volumen $V = \vec{L} * \vec{L} * \vec{L}$, auch ein Skalar

Übliche Einheiten (Ausschnitt): $[m^3]$, $[\mu m^3]$, $[km^3]$,
oder auch Hohlmaße wie Liter, [Barrel] bei Rohöl

3.4 Das Drehmoment

Definiert als $\vec{M} = \vec{L} \times \vec{F}$

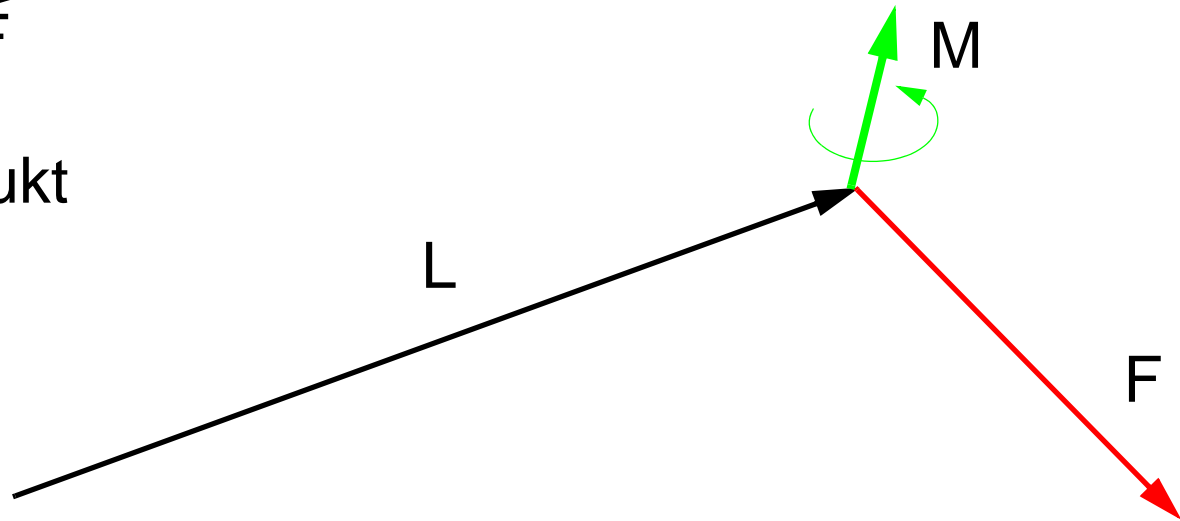
Aus dem Vektor-Produkt

ergibt sich ein axialer

Vektor, der einen

Drehsinn und einen Betrag aufweist.

Achtung: Nur die orthogonal zu L stehende Komponente von F ist für den Betrag von M wirksam.



3.5 Sonstige gesetzliche Einheiten

Der **Grad Kelvin** [K] ist die Grund-Einheit der thermodynamischen Temperatur und definiert als der 273.16 te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripel-Punkts von Wasser.

Ausgangspunkt der Kelvin-Skala war die Unterteilung der Celsius-Skala in 100 Teile zwischen dem Gefrierpunkt von Wasser (0°C) und dessen Siedepunkt (100°C)

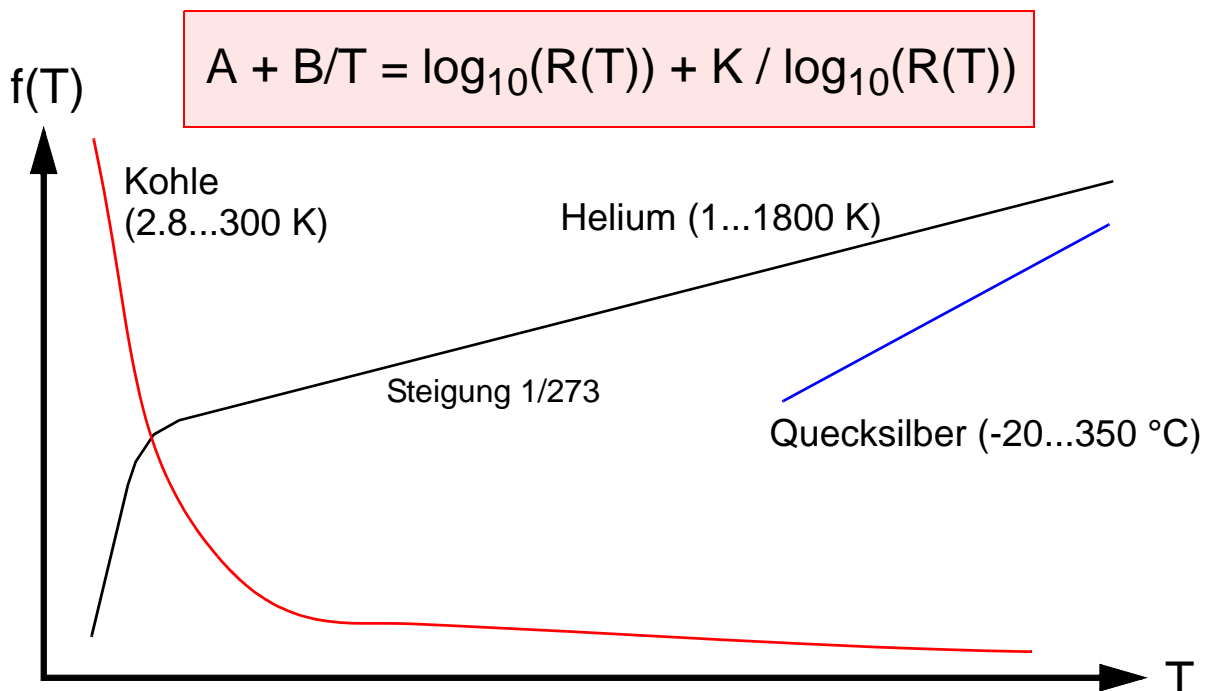
Ein **Mol** besteht aus $6.0221367 \cdot 10^{23}$ Teilchen (Avogadro'sche Zahl, N_A), welche der Anzahl Atome entspricht, die in 12 g des Kohlenstoff-Isotops ^{12}C enthalten sind.

Die **Candela** (cd) ist definiert als die Lichtstärke, mit der ein **Schwarzer Strahler** mit der Oberfläche $1/6 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^2\text{]}$ beim Schmelzpunkt von Platin ($T_{Pt} = (2045.9 \pm 0.7) \text{ [K]}$) senkrecht zu seiner Oberfläche leuchtet. (Sekundär-Normale: Glühlampen)

3.5.1 Praktische T-Messungen

1. Thermometer: Hier wird die (als linear postulierte) Ausdehnung einer Flüssigkeit in einer Glasröhre an zwei Fixpunkten fest gemacht (z.B. 0°C und 100°C) und dann in eine vorgegebene Anzahl Teile unterteilt (Celsius = 100). Alkohol-Thermometer hat nichtlineare Teilung
2. Gas-Thermometer: Hier wird die thermische Ausdehnung von als „ideales“ Gas angenommenen Volumina als Druck- oder Volumen-Abhängigkeit an die Kelvin-Skala angeschlossen. \Rightarrow Gasgesetze: p oder $V = \text{const.}$
3. In der Tieftemperatur-Physik wird die Temperatur-Abhängigkeit kleiner Kohle-Widerstände zu sehr genauen Messungen verwendet (**empirische Gl.**)

$2.8 < T < 300 \text{ K}$, mit $A = 3.6804$, $B = 2.104$, $K = 3.381$



4. Angeschlossene el. und magn. Einheiten

An die obigen mechanischen Grössen sind nun zunächst die elektrischen Grössen anzuschliessen:

1 [A]: Zwei parallele, unendlich lange Leiter in 1 [m] Abstand erzeugen je Meter eine Kraft $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ [m.kg.s}^{-2}] = 2 \cdot 10^{-7} \text{ [N]}$,

somit ist die Stromstärke I makroskopisch auf eine „einfache“ Kraftmessung zurück geführt (Stromwaagen nach Rayleigh, Kelvin, Helmholtz, usw. Meist als Spulen-Konstruktion)

Über eine mikroskopische Definition auf der Basis der Elementarladung des Elektrons wird noch berichtet.

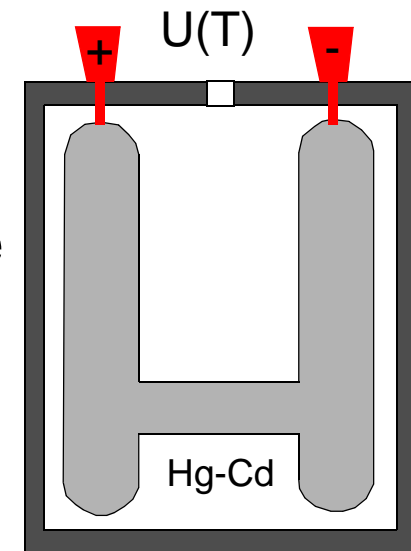
Wenn möglich, wird bei den anderen Grössen ebenso verfahren.

4.1 Elektrische Spannung: U [Volt]

Bereits beim Ampere hat man „nichts mehr in der Hand“ und dies zieht sich durch die gesamten elektrischen und magnetischen Grundgrößen. Man ist daher bemüht, ausser der theoretischen Definition noch **portable Sekundär-Einheiten** zu schaffen. So gab es das sog. „int. Weston Normal-Element“ mit einer Spannung $U = 1.01864_6[\text{V}]$ bei 20°C und einem Eichschein der PTB*).

Die theoretische Definition von U werden wir später angehen, hier wird 1 [V] nur phänomenologisch definiert über das noch zu besprechende Ohm'sche Gesetz.

Die elektrische Spannung ist ein Skalar, der später als Potential-Differenz erscheint.

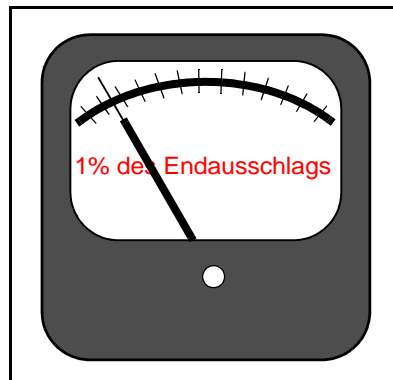


*) Physikalisch Technische Bundesanstalt (Nationale Eichbehörde der Bundesrepublik Deutschland)

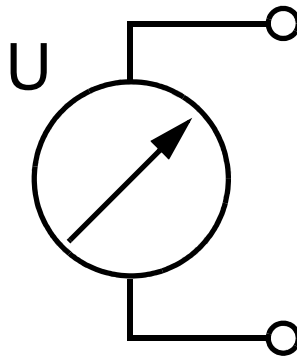
4.1.1 Praktische Spannungs-Messung

Es gibt zwei wesentliche Verfahren zur Spannungs-Messung (Messen heisst vergleichen):

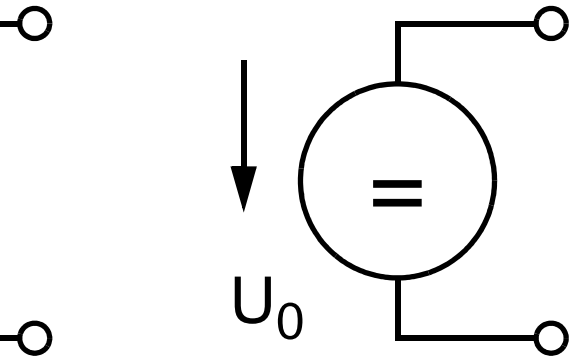
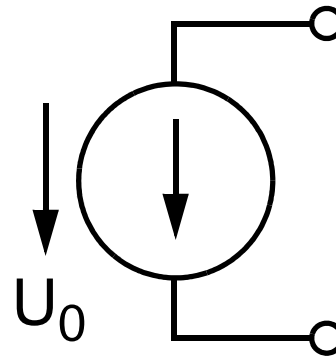
1. Messung mit einem geeichten Mess-Instrument z.B. als Kraftwirkung, Drehmoment



- Analoges elektr. Instrument -



Schaltungs-Symbol
Spannungs-Messer



Spannungs-Quellen
als Zweipole

2. Vergleichs-Messung durch Kompensation d.h. man vergleicht mit einer einstellbaren Spannungsquelle so lange, bis beide Spannungen identisch sind, dann ist die unbekannte Spannung ermittelt aus der bekannten (z.B. Digital-Voltmeter)

4.2 Widerstand

Relativ einfach gestaltet sich die Schaffung von Sekundär-Standards für den Widerstand R . Diese Bezeichnung erfüllt gleichzeitig zwei Aufgaben: Einerseits ist dies eine Material-Eigenschaft, andererseits wird damit auch das Bauteil R so bezeichnet.

Die Eigenschaft „elektrischer Widerstand R “ ist ein Skalar, als Bauteil ein „Zweipol“

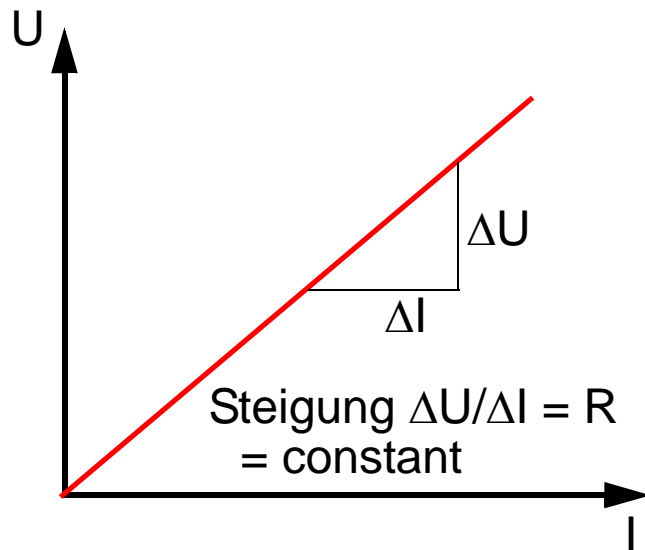


Sekundärer, portabler Standard z.B mit einem ölgekühlten (Trafo-Öl) Normal-Widerstand 10 [m Ω] mit Eichschein der PTB mit Fehler von $\Delta R/R = \pm 3 \cdot 10^{-4}$

4.3 Das Ohmsche Gesetz (empirisch gefunden)

$U = R \cdot I$ verknüpft zwei beliebige Einheiten zu einer dritten.

Man kann z.B. das [V] und das [Ω] vorgeben und dann das [A] definieren, usw.



Geometrisch für ein Stück leitendes Material der Länge L , Querschnitt A

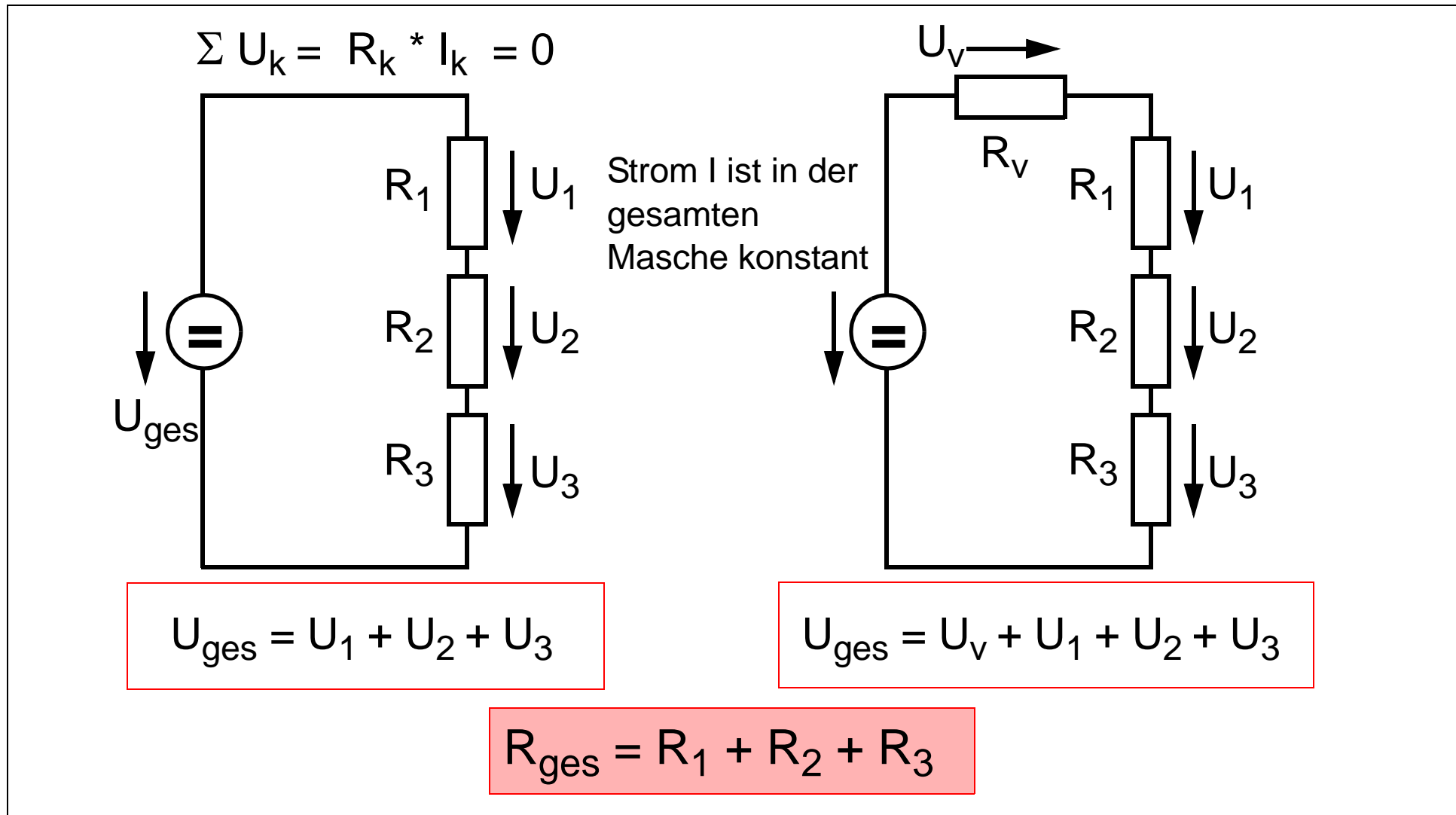
$R = \rho \cdot L / A$ [Ω], ρ ist materialabhängig
mit L [m], A [mm^2] wird ρ [$\Omega \text{mm}^2 \text{m}^{-1}$]

Temperatur-Abhängigkeit von R

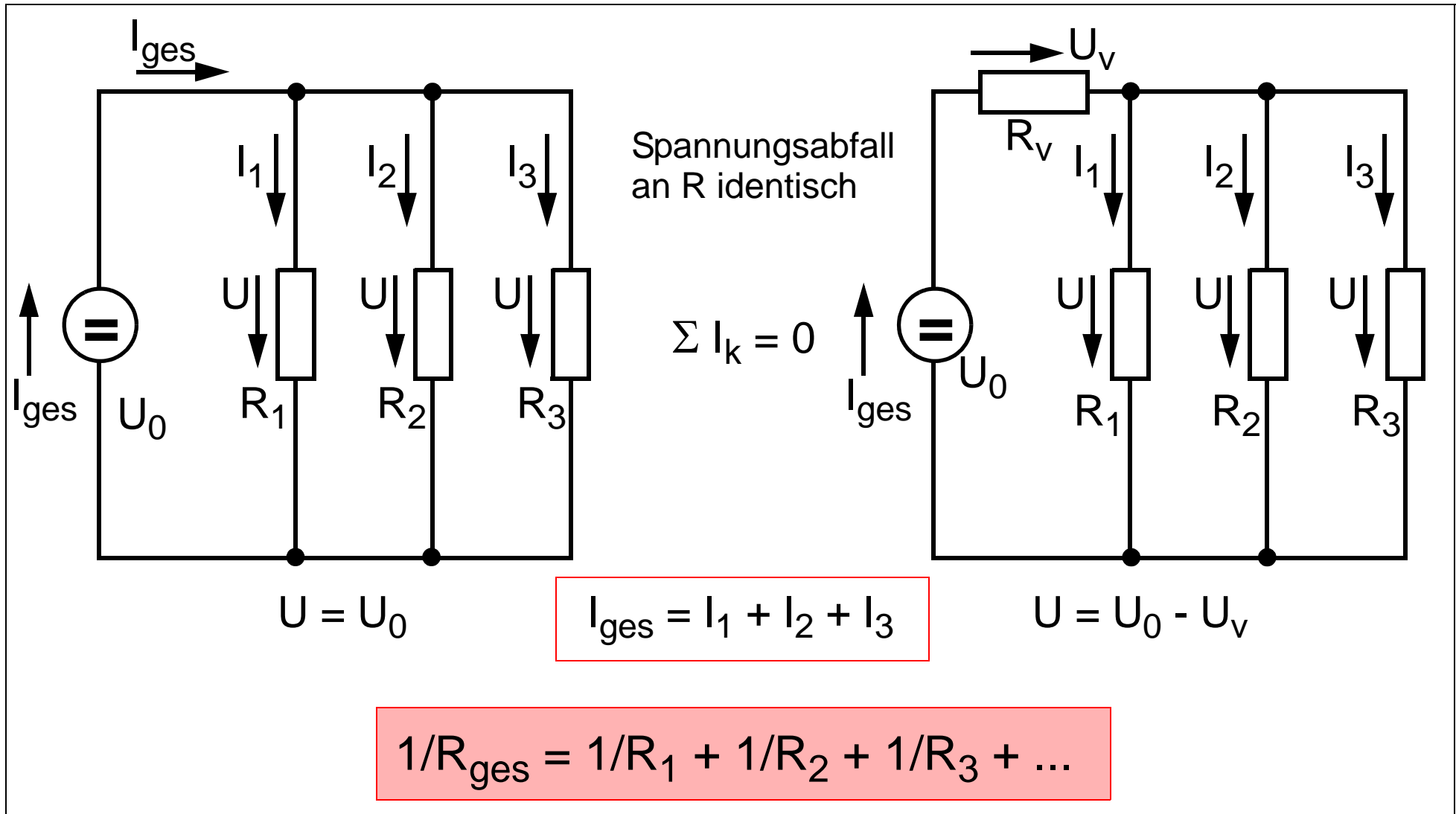
$R(T) = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$ α [grad^{-1}]

materialspezifisches ρ und α sind aus Tabellen entnehmbar

4.4 Kirchhoff'sche Maschen-Regel



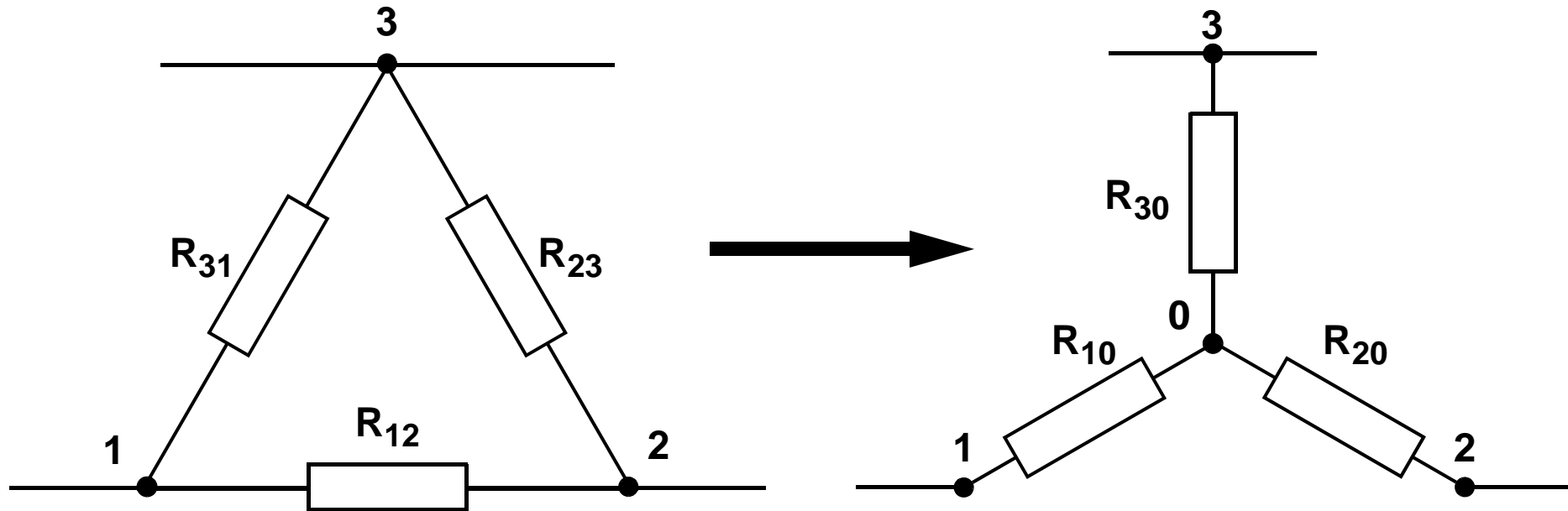
4.5 Kirchhoff'sche Knoten-Regel



4.6 Kirchhoff'sche Regeln in der Anwendung

Dreieck-Stern-Transformation

(jedes R wirkt auf die restlichen R)



$$R_{10} = \frac{R_{12} * R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

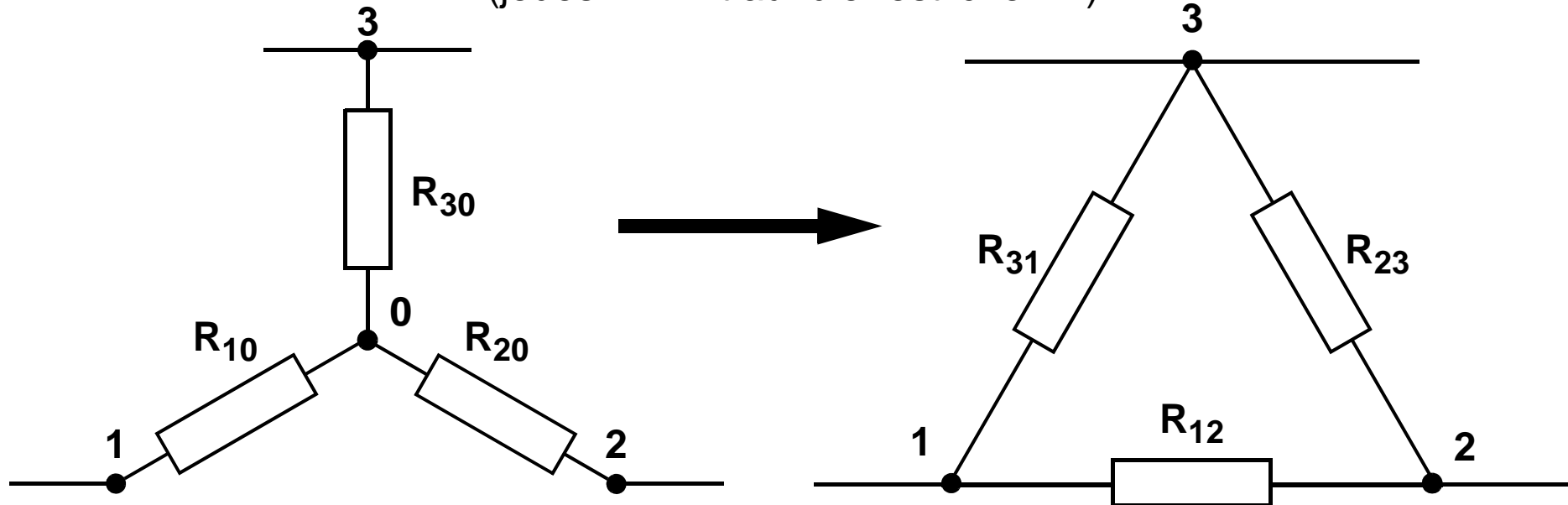
$$R_{10} = \frac{R_{23} * R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{10} = \frac{R_{31} * R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

4.6.1 Kirchhoff'sche Regeln

Stern-Dreieck-Transformation

(jedes R wirkt auf die restlichen R)

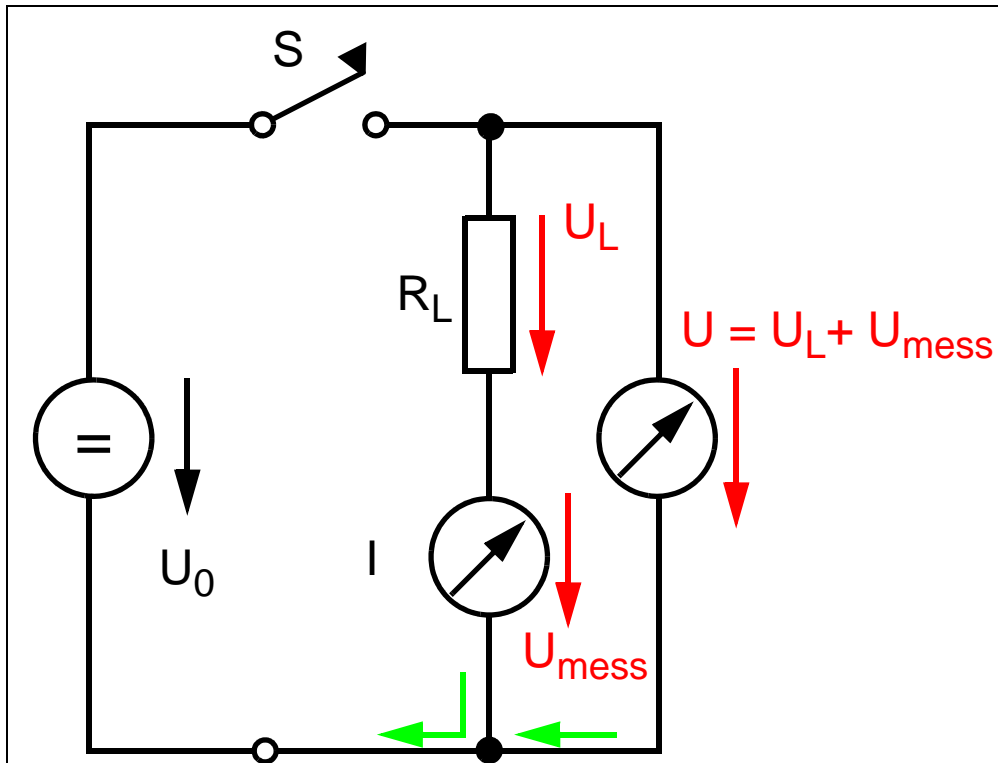


$$R_{12} = \frac{R_{10} * R_{20}}{R_{30}} + R_{10} + R_{20}$$

$$R_{23} = \frac{R_{20} * R_{30}}{R_{10}} + R_{20} + R_{30}$$

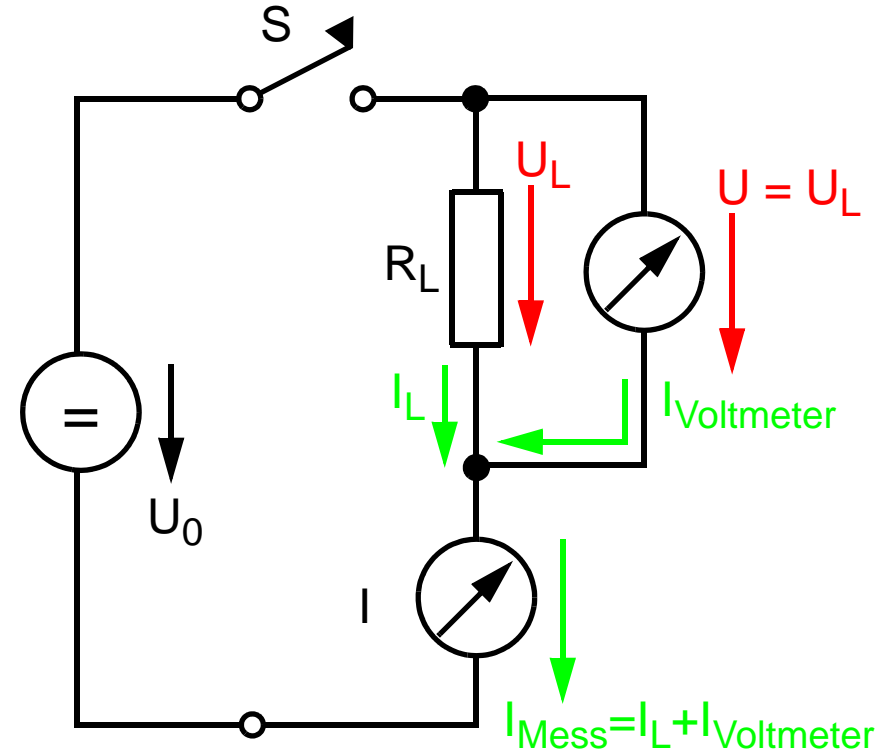
$$R_{31} = \frac{R_{30} * R_{10}}{R_{20}} + R_{30} + R_{10}$$

4.7 „Fehlerfreies“ Messen von U und I an R



Spannungsfehler = stromrichtig

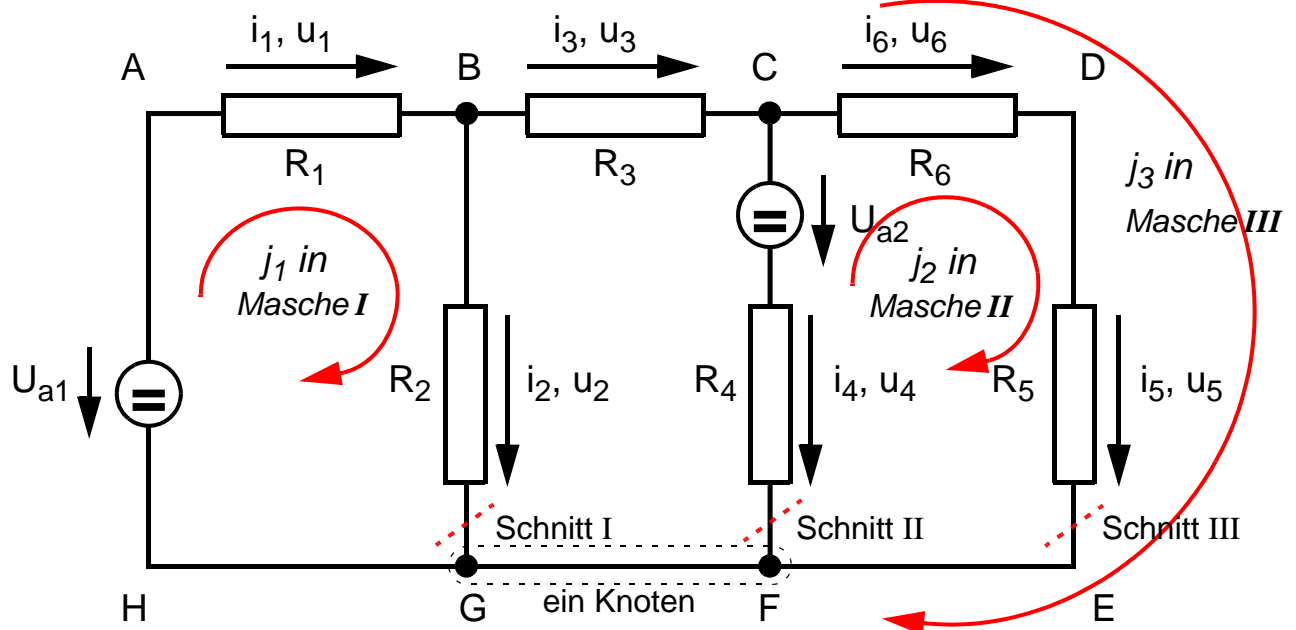
$R_L = 10 \text{ } [\Omega]$, $R_{\text{Amperemeter}} = 1 \text{ } [\Omega]$



Stromfehler = spannungsrichtig

$R_L = 10 \text{ } [\Omega]$, $R_{\text{Voltmeter}} = 100 \text{ } [\Omega]$

4.8 Gleichstromnetze



Vereinbarungen für Gleichstromnetze mit eingepprägten Spannungen

- Zählrichtung von Strom i_k und Spannung u_k (jeweils klein geschrieben) sind identisch
- Maschenumlaufströme werden mit j_k bezeichnet. Eindeutiger Zusammenhang mit den Strömen i_k durch die einzelnen Zweige (Zweig = Verbindung zweier Knoten)
- Nur soviel Maschenumlaufströme wie erforderlich. Bei l Zweigen und k Knoten ergeben sich $n = l - k + 1$ unabhängige Maschen (ohne Beweis)

Vorgehensweise zum Erzeugen der n unabhängigen Maschen in obiger Schaltung

- Jede Masche wird an beliebiger Stelle unterbrochen. Lässt sich keine weitere Masche mehr aufbrechen, dann sind alle unabhängigen Maschen erfasst. Wir beginnen mit Masche **I** (ABGH) und unterbrechen zwischen B und G (Schnitt I). Dann schneiden wir Masche **II** (CDEF) zwischen C und F aus einander (Schnitt II).
- Dadurch bleibt nur noch die „grosse“ Masche **III** (ADEH) übrig. Wird diese Masche ebenfalls an beliebiger Stelle geöffnet (Schnitt III), so lassen sich keine weiteren Maschen mehr finden, deren Umlaufstrom sich nicht durch die bereits unterbrochenen Maschen ausdrücken lässt. Probe: 6 Zweige - 4 Knoten + 1 = 3 Maschen, somit ist die Zerlegung vollständig. (Äpfel aus Birnen errechnen)
- Gesucht sind nun alle Teilströme i_k durch die gegebenen Widerstände R_k , sowie die Spannungsabfälle u_k an den Widerständen R_k . Gegeben sind in obiger Schaltung noch die beiden „äusseren“ Spannungen U_{a1} und U_{a2} , deren Einfluss auf die Teilströme ebenfalls ermittelt werden soll.

4.8.1 Kirchhoff live

Maschen-Regel (modifizierte Aufstellung auch mit Knoten-Regel machbar)

$$\text{Masche I :} \quad u_1 + u_2 = -U_{a1}$$

$$\text{Masche II:} \quad u_5 + u_6 - u_4 = -U_{a2} \quad (1)$$

$$\text{Masche III:} \quad u_1 + u_3 + u_6 + u_5 = -U_{a1}$$

Maschenumlaufströme j_k und Zweigströme i_k :

$$\begin{aligned} i_1 &= j_1 + j_3 & i_2 &= j_1 & i_3 &= j_3 \\ i_4 &= -j_2 & i_5 &= j_2 + j_3 & i_6 &= j_2 + j_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Nun wenden wir das **Ohm'sche Gesetz** an für $u_k = R_k \cdot i_k$:

$$u_1 = R_1 i_1 = R_1 (j_1 + j_3); \quad u_2 = R_2 i_2 = R_2 j_1; \quad u_3 = R_3 i_3 = R_3 j_3; \quad (3)$$

$$u_4 = R_4 i_4 = -R_4 j_2; \quad u_5 = R_5 i_5 = R_5 (j_2 + j_3); \quad u_6 = R_6 i_6 = R_6 (j_2 + j_3);$$

Einsetzen in die Maschen-Gleichungen (1) ergibt lineares Gleichungs-System:

$$\begin{aligned} R_1 (j_1 + j_3) + R_2 j_1 &= -U_{a1} \\ R_5 (j_2 + j_3) + R_6 (j_2 + j_3) + R_4 j_2 &= -U_{a2} \\ R_1 (j_1 + j_3) + R_3 j_3 + R_6 (j_2 + j_3) + R_5 (j_2 + j_3) &= -U_{a1} \end{aligned} \quad (4)$$

Ordnen nach den Unbekannten j_k :

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) \mathbf{j_1} &+ R_1 \mathbf{j_3} = -U_{a1} \\ (R_4 + R_5 + R_6) \mathbf{j_2} &+ (R_5 + R_6) \mathbf{j_3} = -U_{a2} \quad (5) \\ R_1 \mathbf{j_1} &+ (R_5 + R_6) \mathbf{j_2} + (R_1 + R_3 + R_5 + R_6) \mathbf{j_3} = -U_{a1} \end{aligned}$$

Sind nun die Spannungen U_{ak} und die Widerstände R_k vorgegeben, so lassen sich zunächst die Maschenumlaufströme j_k und aus diesen dann die Spannungsabfälle u_k und Ströme i_k an den Widerständen R_k ermitteln.

Gegeben: $R_1 = R_2 = 1 [\Omega]$, $R_3 = 3 [\Omega]$, $R_4 = R_5 = 2 [\Omega]$, $R_6 = 4 [\Omega]$;

$U_{a1} = 1 [V]$, $U_{a2} = 2 [V]$, alles in (5) einsetzen, ergibt 3 Gleichungen

mit den 3 Unbekannten j_k :

$$\begin{aligned} (1 + 1) j_1 + 1 j_3 &= -1 & 2j_1 + 0j_2 + 1j_3 &= -1 \\ (2 + 2 + 4) j_2 + (2 + 4) j_3 &= -2 & 0j_1 + 8j_2 + 6j_3 &= -2 \\ 1 j_1 + (2 + 4) j_2 + (1 + 3 + 2 + 4) j_3 &= -1 & 1j_1 + 6j_2 + 10j_3 &= -1 \end{aligned}$$

4.8.2 Lösungsweg mathem.

Wir lösen das Ganze mit Determinanten (oder Matrizen, s.u.)

$$j_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & 6 \\ -1 & 6 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 10 \end{vmatrix}} \quad j_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 10 \end{vmatrix}} \quad j_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 10 \end{vmatrix}}$$

Nenner für sich allein: $2(8 \cdot 10 - 6 \cdot 6) - 0(\dots) + 1(0 \cdot 6 - 8 \cdot 1) = 80$

$$j_1 = \{ -1(8 \cdot 10 - 6 \cdot 6) - 0(\dots) + 1(-2 \cdot 6 + 1 \cdot 8) \} / 80 = -48 / 80 = -0.6 \text{ [A]}$$

$$j_2 = \{ 2(-2 \cdot 10 + 1 \cdot 6) + 1(0 \cdot 10 - 1 \cdot 6) + 1(-2 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \} / 80 = -32 / 80 = -0.4 \text{ [A]}$$

$$j_3 = \{ 2(-1 \cdot 8 + 2 \cdot 6) - 0(\dots) - 1(0 \cdot 6 - 8 \cdot 1) \} / 80 = 16 / 80 = 0.2 \text{ [A]}$$

Einzelströme j_k aus (2):

$$i_1 = j_1 + j_3 = -0.6 + 0.2 = -0.4 \text{ [A]}$$

$$i_2 = j_1 = -0.6 \text{ [A]}$$

$$i_3 = j_3 = 0.2 \text{ [A]}$$

$$i_4 = -j_2 = 0.4 \text{ [A]}$$

$$i_5 = j_2 + j_3 = -0.4 + 0.2 = -0.2 \text{ [A]}$$

$$i_6 = j_2 + j_3 = -0.4 + 0.2 = -0.2 \text{ [A]}$$

$$\text{Probe mit Knoten B: } i_2 + i_3 - i_1 = -0.6 + 0.2 + 0.4 = 0$$

Spannungsabfälle an den Widerständen R_k :

$$u_1 = R_1 i_1 = -0.4 \cdot 1 = -0.4 \text{ [V];}$$

$$u_2 = R_2 i_2 = -0.6 \cdot 1 = -0.6 \text{ [V];}$$

$$u_3 = R_3 i_3 = 0.2 \cdot 3 = 0.6 \text{ [V];}$$

$$u_4 = R_4 i_4 = 0.4 \cdot 2 = 0.8 \text{ [V];}$$

$$u_5 = R_5 i_5 = -0.2 \cdot 2 = -0.4 \text{ [V];}$$

$$u_6 = R_6 i_6 = -0.2 \cdot 4 = -0.8 \text{ [V];}$$

Oder in Matrizen-Schreibweise: $\mathbf{Zj} = \mathbf{u}$, mit den Vektoren \mathbf{j} , \mathbf{u} ; \mathbf{Z} = Impedanz-M.

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -U_{a1} \\ -U_{a2} \\ -U_{a1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & 0 & R_1 \\ 0 & R_4 + R_5 + R_6 & R_5 + R_6 \\ R_1 & R_5 + R_6 & R_1 + R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix}$$

5. Felder

Hier beginnt ein neues Kapitel, bei dem eine enge Verflechtung von Mathematik und Physik einsetzt. Es werden nur noch wenige empirische Ergebnisse verwendet, die Theorie steht im Vordergrund.

Wichtig: Im Nachfolgenden wird zunächst von **ruhenden Ladungen**, bzw. von stationären Strömen = Gleichstrom / Gleichspannung ausgegangen.

Weiterhin werden wir an entsprechender Stelle die vektorielle Vorgehensweise einsetzen.

5.1 Ruhende Ladungen

Die Ladung(smenge) als neue, elementare Grösse. Schon sehr früh experimentell entdeckt beim „Spielen“ mit Elektrisier-Maschinen (das sind eigentlich nur Ladungstrenner z.B. mit gegenläufigen Schellack-Schallplatten, die auf zwei isolierte „Gefässe“ = Kondensatoren, Ladung entgegengesetzten Vorzeichens verteilen konnten).

Experimentelle Befunde:

- Es gibt zwei verschiedene Ladungen, die mit '+' und '-' bezeichnet wurden. Frage: Ist das korrekt, oder kommen wir zu einem besseren Modell?
- Gleichartige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an (messbare Kraftwirkung wie in der Mechanik)
- Diese Kräfte sind **abhängig** von der „Ladungsmenge“ und werden Coulomb-Kräfte genannt (die Lorentz-Kräfte kommen im Magnetfeld vor).
- Die „Kraftlinien“ sind grafisch darstellbar und führen zum Begriff des Feldes
- Historische Richtung: Von Plus nach Minus (immer positiv denken!)
- Kräfte sind von der Fläche der geladenen Leiter und deren Abstand abhängig
- Zunächst war nicht feststellbar, was die kleinste(n) Einheit(en) der Ladung bildet, gibt es eine kleinste positive **und** eine kleinste negative Ladung?

5.2 Das „Feld“ und seine „Stärke“

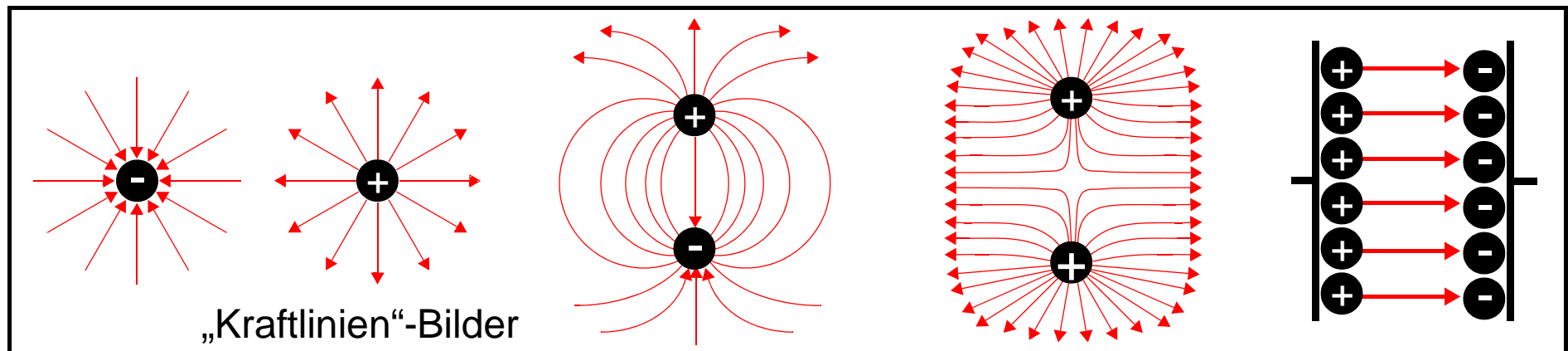
Aus der Kraftwirkung von geladenen Körper auf einander und der Darstellbarkeit der Kraftlinien mit kleinen Probekörpern (Papierflitter = Nichtleiter) konnten Gesetze abgeleitet werden:

Die Kraft \vec{F} zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r ist proportional zu r^{-2} , unabhängig von der Polarität der Ladungen ($+$ \Leftrightarrow $+$, $-$ \Leftrightarrow $-$, $-$ \Leftrightarrow $+$, $+$ \Leftrightarrow $-$)

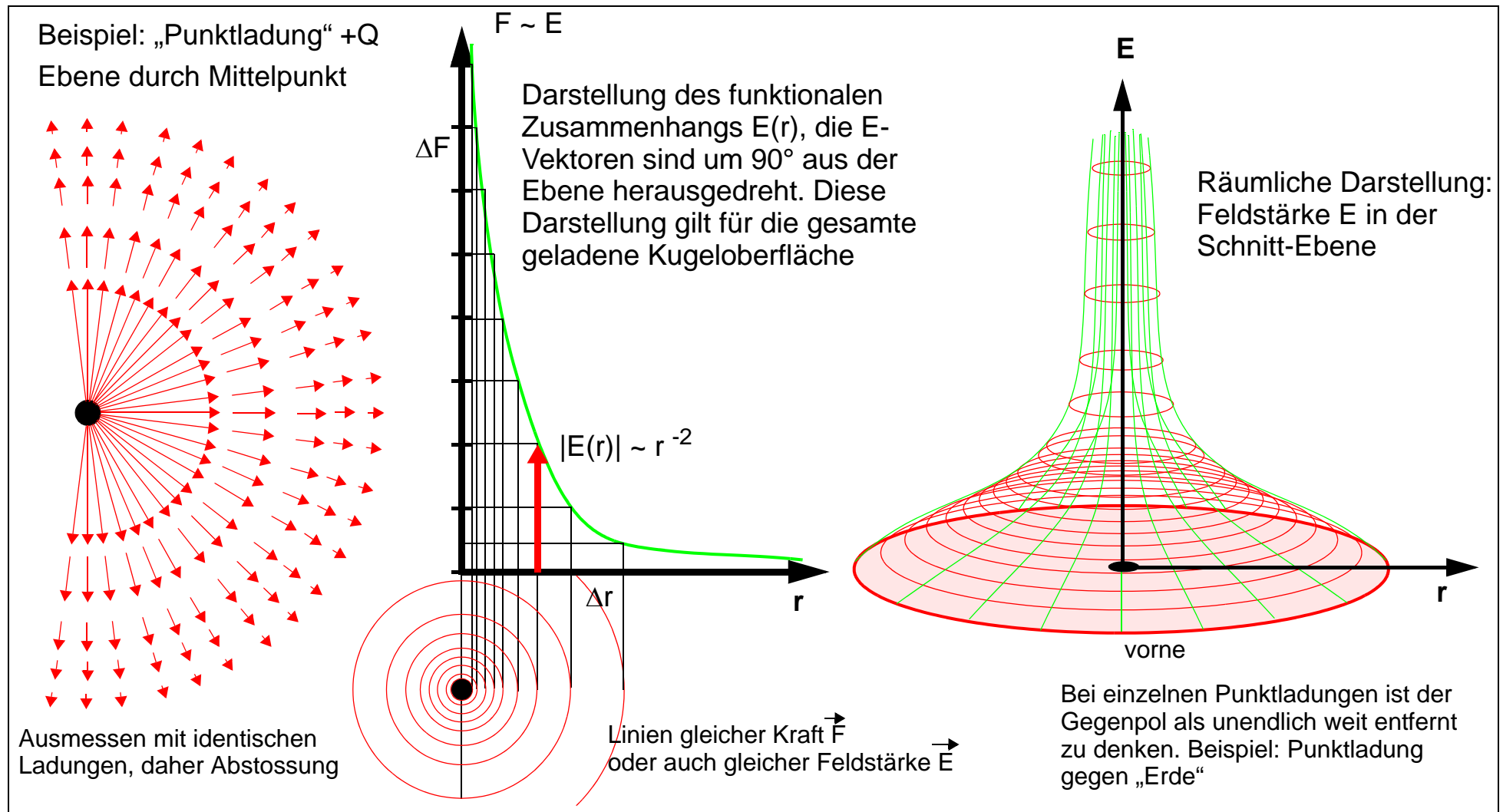
Die Kraft ist bei gleicher Geometrie linear proportional zu der skalaren Ladungs-„Menge“ Q

$$\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} ; \quad Q_2 = \text{Probeladung}, \epsilon_0 \text{ ist eine Naturkonstante, die noch besprochen wird}$$

Verknüpfung zwischen Kraft \vec{F} , Ladungsmenge Q und Feldstärke \vec{E} : $\vec{F} = Q \cdot \vec{E} \quad [\text{N}]$



5.3 Visualisierung der „Feld“-Stärke



5.4 Das Potential U

Wie oben gezeigt, wirkt im elektrischen Feld \vec{E} auf eine Probeladung Q die Kraft $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$. Verschieben wir diese Ladung um den Weg \vec{r} , so müssen wir gegen diese Kraft \vec{F} die elektrische Arbeit $W = -\vec{F} \cdot \vec{r}$ leisten. Das Minuszeichen bedeutet, dass man auf die gegenseitige Richtung von \vec{F} und \vec{r} zu achten hat (gleiche Richtung von \vec{F} und \vec{r} sagt uns, dass negative Arbeit aufzubringen ist, wenn man gegen die Kraft-Richtung „arbeitet“). Korrekt muss die Verschiebung in differentieller Form geschrieben werden, also

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -Q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Nun wird bestimmt integriert zwischen den Punkten r_1 und r_2 :

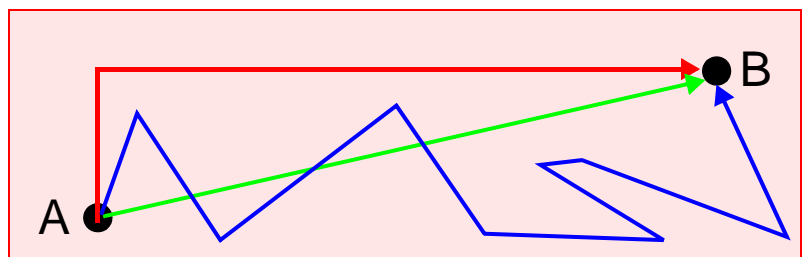
$$W_{12} = W(r_1 - r_2) = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -Q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -Q \cdot U_{12}$$

Skalar

Es hat sich als zweckmässig erwiesen, dem Integral einen eigenen Namen zu geben, nämlich **Spannung U_{12}** zwischen den Punkten r_1 und r_2 . Ohne das Wort „zwischen“ hat Spannung keinerlei Sinn, wie beim Strom I das Wort „durch“ einen Querschnitt A . Somit beträgt die Energie-Bilanz für die Verschiebung der Ladung Q um $\Delta r = |r_2 - r_1|$: $U_{12} = U(r_2) - U(r_1)$

Ist die Verschiebungs-Energie unabhängig vom Weg, so sprechen wir von einem Potential, U_{12} ist immer eine Potential-Differenz

Definition des
Potentials U



5.5 Zusammenhang zwischen E und U

Zunächst wird man das elektrische Potential U auf ein bestimmtes Bezugs-Niveau beziehen, hier die „Erde“, die man als bei $r_1 = \text{unendlich}$ entfernt ansetzt. Zusätzlich bildet man ein Weg-Integral entlang einer Strecke r zwischen zwei Punkten (wie oben) für ein **Zentralfeld**

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\vec{r}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad \text{daraus folgt } U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{Probe mit } E: r^{-2}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } U = -\text{grad } U(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \vec{e}_z$$

Daraus folgt auch, dass die Feldstärke die Dimension $[\text{Vm}^{-1}]$ haben muss.

Man kann zur Beschreibung von Feldern nun entweder den Skalar U (= nur ein Spannungswert je Raumpunkt) oder die Feldstärke E (= drei Vektoren je Raumpunkt) benutzen.

Weil die Feldlinien auf Flächen beginnen und enden, haben wir **wirbelfreie** Felder.

5.6 Modellvorstellung: Das Elektron

Mit Erhöhung der Messgenauigkeit wurde immer mehr bewusst, dass es parallel zu den Atomen auch so etwas wie „Elektrizitäts-Atome“ geben musste. Von „freien“ Elektronen aus dem Atomverband war noch nichts bekannt, daher waren grosse Schwierigkeiten bei der Modellvorstellung vorhanden.

Mittlerweile weiss man sehr viel über das Elektron: Es ist eines der Elementar-Teilchen, hat eine Masse von $m_e = (9.10953 \pm 5)10^{-31}[\text{kg}]$, einen Spin von $s = \pm 1/2$ und besitzt die Elementar-Ladung von $e = (1.602189 \pm 5)10^{-19} [\text{C}] = [\text{As}]$.

Das Elektron ist der Träger aller elektrischen Erscheinungen, es gibt zwar ein Elektron mit positiver Ladung, doch dieses Teilchen (Positron) ist ein Stück Antimaterie und zerstrahlt sofort (Annihilation) mit dem Elektron zu reiner Energie: $e^- + p^+ \rightarrow 2\gamma$ (je ca. 500 KeV)

5.6.1 Die Arbeit am Elektron

Energie oder auch **Arbeit** des elektrischen Stroms I

$$W = U \cdot I \cdot t \quad [\text{VAs}] \quad \text{oder auch } [\text{Wattsec}] \text{ oder } [\text{J}]$$

Leistung des elektrischen Stroms I

$$P = U \cdot I \quad [\text{VA}] = [\text{Watt}] \quad \text{zu Ehren von James Watt}$$

wenn alles konstant, dann $P = W/t$ (Arbeit pro Zeit-Einheit)

Das **freie Elektron** im Vakuumfeld $E = U/d$ (Potentialfeld U)

$$W = Q \cdot U = e \cdot U \quad [\text{eV}]$$

Das Elektron kann im elektrischen Feld E beschleunigt werden, fällt es durch die Potentialdifferenz von $U = 1 \text{ [V]}$, dann haben wir $W = 1 \text{ [eV]} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ [C.V]} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ [J]}$

Elementarteilchen haben eine Energie (aus der Masse) von bis zu über 1.6 GeV

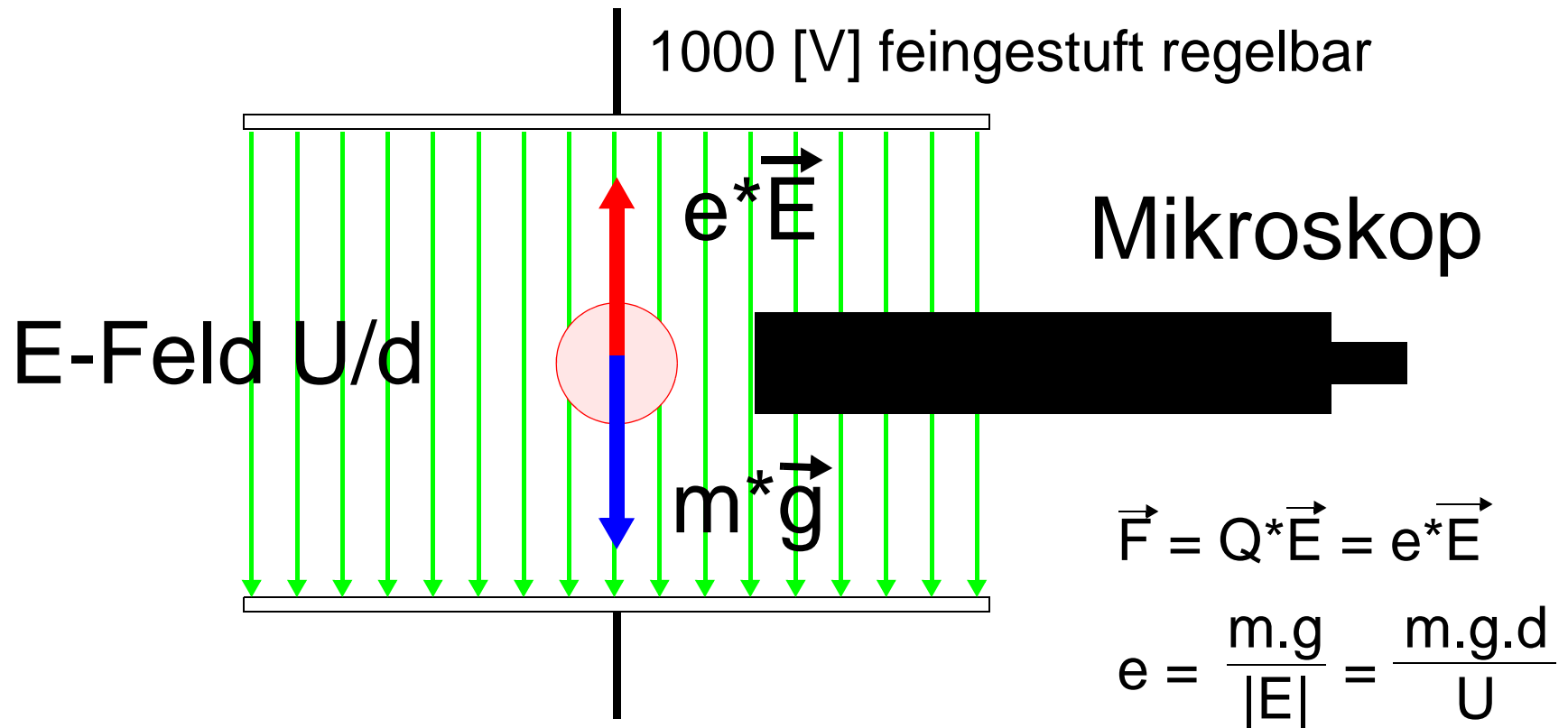
Elektronen im Metallgitter eines Leiters erhalten keine nennenswerte Beschleunigung, dafür aber weitgehende Umsetzung der Stöße in Wärme. (Ohm'scher Widerstand)

Bei einem ohm'schen Widerstand R gilt wegen $U = R \cdot I$

$$P = U \cdot I = R \cdot I \cdot I = R \cdot I^2 \quad \text{oder}$$

$$P = U \cdot I = U \cdot U/R = U^2/R$$

5.6.2 Bestimmung der „Elementar-Ladung“ e



Vereinfachtes Schema Millikan-Versuch

5.7 Induktions-Konstante μ_0

Bereits in 4. besprochen:

Zwei stromdurchflossene, parallele Leiter erzeugen

... je Meter eine Kraft $\mathbf{F} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ [m.kg.s}^{-2}] = 2 \cdot 10^{-7} \text{ [N]}$

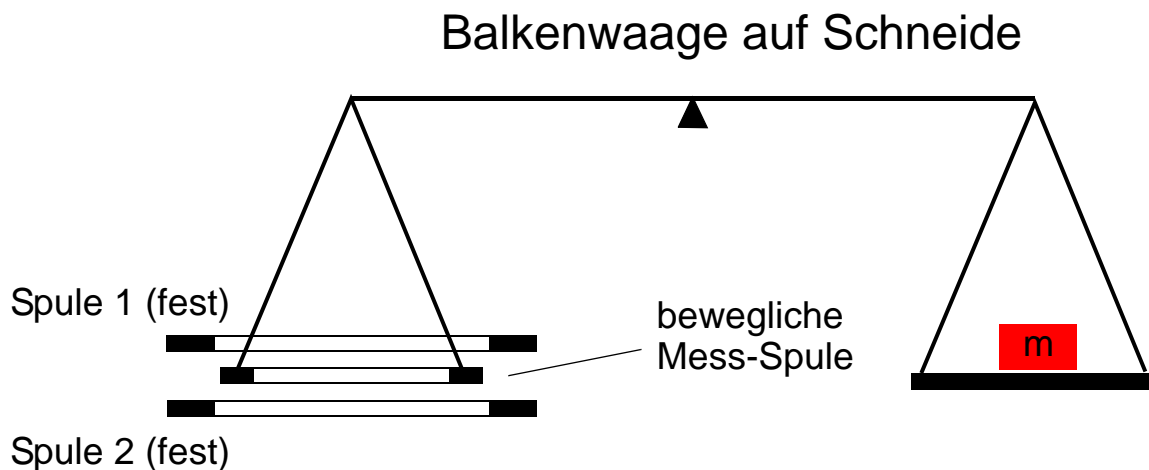
Die korrekte Formulierung lautet:

Ermittlung von μ_0 (Induktions-Konstante des Vakuums)

aus der Kraft-Messung für zwei Leiter im Abstand d ,
bezogen auf die Länge L

$F/L = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi \cdot d$ beide Ströme je 1 [A], $L = d = 1 \text{ [m]}$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [NA}^{-2}] = 1.2566 \cdot 10^{-6} \text{ [VsA}^{-1}\text{m}^{-1}]$$



Prototyp einer **Stromwaage**, Stromumkehr
zur genaueren Messung

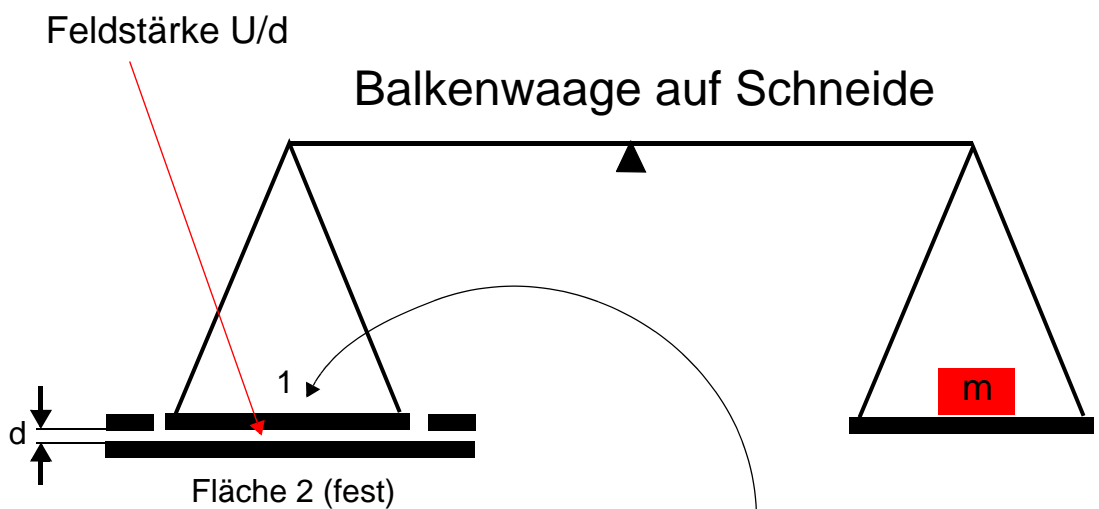
5.8 Influenz-Konstante ϵ_0

Ermittlung von ϵ_0 (**Influenz**-Konstante des Vakuums)

1. Aus zwei anderen Fundamental-Größen, die besser messbar sind (c = Lichtgeschwindigkeit, μ_0 von oben)

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.8542 \cdot 10^{-12} [\text{AsV}^{-1}\text{m}^{-1}]$$

2. Kirchhoff'sche Waage mit geladenen Platten: Messung von U (absolut) oder ϵ_0 bei angeschlossenem U



$$F = \frac{\epsilon_0 A \cdot U^2}{2d^2}$$

Fläche A , Spannung U ,
Abstand d und Kraft F
alle direkt messbar

5.9 Nochmals das Ohm

Durch die Fortschritte in der Quantenmechanik ergibt sich eine sehr interessante Anschlussmöglichkeit für den elektrischen Widerstand R .

Der durch *von Klitzing* entdeckte **Quanten-Hall-Effekt** ist in elementare „Päckchen“ von h/e^2 unterteilt, mit

$h = 6.626176 \cdot 10^{-34} \text{ [V.A.s}^2\text{]}$ Planck'sche Wirkungsquantum

$e = 1.602189 \cdot 10^{-19} \text{ [A.s] = [C]}$ Elementarladung des Elektrons

Setzt man beide Werte ein, so ergibt sich:

$$1 \text{ [Klitzing]} = 25\,813 \text{ } [\Omega].$$

Damit ist der Ohm'sche Widerstand R über h und e angeschlossen.

6. Der Kondensator als Ladungsspeicher

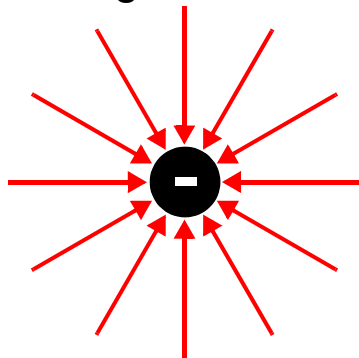
Lädt man eine Metallkugel an der Oberfläche mit der Spannung U auf, so erhält man $Q = C \cdot U$. (Dies gilt auch, wenn man die Ladung Q aufbringt, dann wird auf die Spannung U aufgeladen). Da sich der Betrag der Oberfläche dabei nicht ändert, nennt man die Proportionalitäts-Konstante C die **Kapazität** der Anordnung oder auch ihr Speichervermögen für Ladungen. Die Einheit von C muss somit sein:

$$C = Q/U \text{ [AsV}^{-1}\text{]} = \text{[C/V]} = \text{[F]}. \quad \text{Die Einheit heisst das Farad (nach M. Faraday).}$$

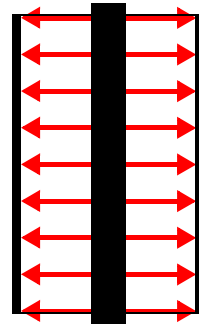
Achtung: *Die Wahl von $[C] = \text{Coulomb}$ und $C = \text{Kapazität}$ ist besonders unglücklich gewählt und kann nur über die Dimensionsklammern unterschieden werden*

Weiterhin hängt die Kapazität von der Geometrie der Anordnung ab:

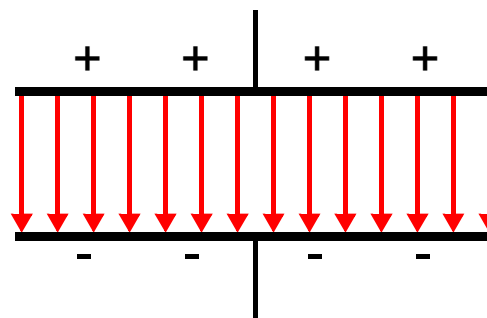
Man kann eine beliebige, isolierte Fläche gegen „Erde“ aufladen oder auch eine Anordnung aus zwei leitenden Flächen, die sich nicht berühren können. Jede dieser Anordnungen wird dann Kondensator genannt.



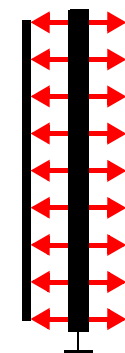
Kugel-



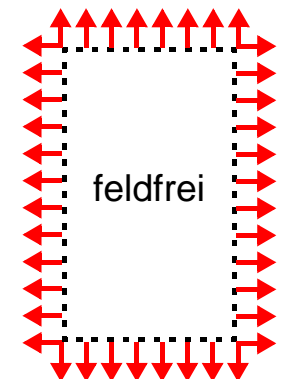
Zylinder-



Platten-Kondensator



Platine



Faraday-Käfig

6.1 Kapazitäts-Berechnung

- Kugel-Kondensator
 $C = 4\pi\epsilon_0 R$; Oberfläche ist eine Äquipotentialfläche
- Zwei Konzentrische Kugeln
 $C = 4\pi\epsilon_0 R_a R_i / (R_a - R_i)$
- Zylinder-Kondensator der Länge L
 $C = 2\pi\epsilon_0 L / \ln(R_a / R_i)$
- Platten-Kondensator
 $C = \epsilon_0 A / d$
- Wickel-Kondensator

Der Wickelkondensator besteht aus einer dünnen Papierschicht als Isolator und einer beidseitigen Lage Aluminiumfolie. Da der Abstand d beider „Platten“ sehr klein ist, wird eine grosse Kapazität erreicht im Vergleich zum Platten-Kondensator: $C = \epsilon_0 A / d$ $d_{\text{Platte}} : d_{\text{Wickel}} = 30 : 0.01 = 3000$

- Erdung auf einer Platine

Um eine Feldkopplung (Übersprechen) zwischen zwei parallelen Leiterbahnen zu verhindern, wird ein Leiterbahn zwischengeschaltet und geerdet (eigentlich nur bei HF sinnvoll)

- Der Faraday-Käfig

Das Innere von leitenden Hohlkörpern ist immer feldfrei, weil sich die freien Elektronen infolge Abstossung auf der Aussen-seite sammeln. Andere Sicht: Man versuche eine Feldlinienkonstruktion im Inneren zu finden, die nur aus identischen Ladungsträgern besteht (Monopol!).

6.2 Gespeicherte Energie im E-Feld

Differentielle Arbeit dW (Aufbringen der Ladung in Schritten dq gegen q)

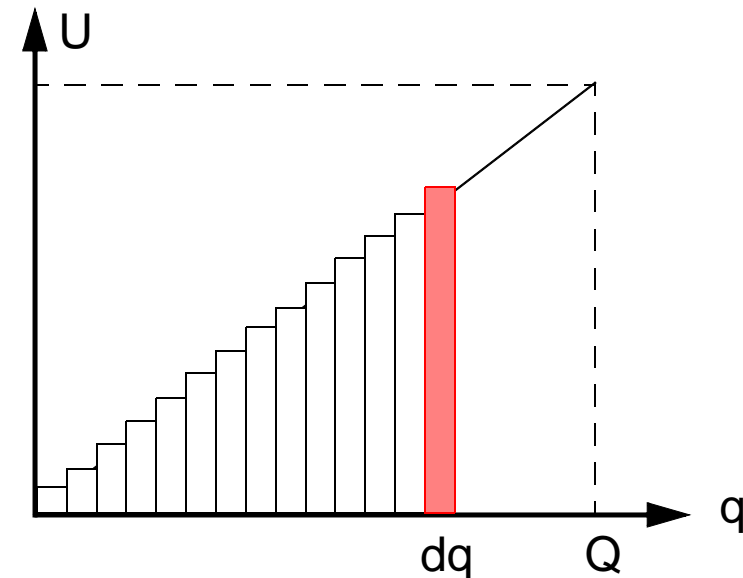
$$dW = u \cdot dq = \frac{q \cdot dq}{C} \quad (\text{s.a. 4.1.4})$$

Gesamtarbeit bis Obergrenze Q

$$W = \int_{q=0}^Q \frac{q \cdot dq}{C} = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$$

Oder wegen $Q = C \cdot U$

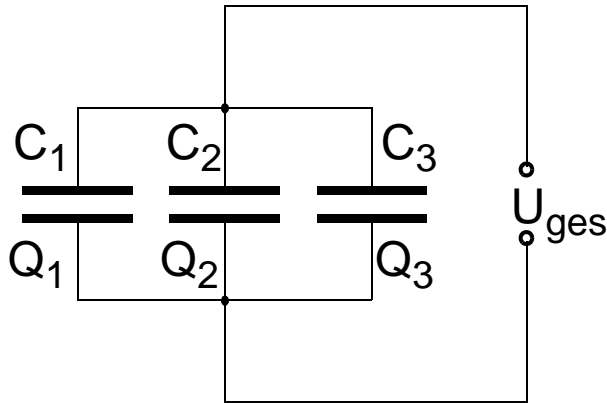
$$W = \frac{1}{2} C U^2 \text{ [AsV}^{-1}\text{V}^2\text{]} = \text{[VAs]} = \text{[J]}$$



Aufbau bis zur Ladung Q

6.3 Kondensator-Schaltungen

Spannung U identisch an allen C 's

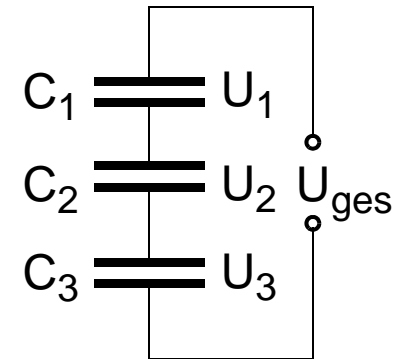


wegen $Q_{\text{ges}} = U_{\text{ges}} \cdot C_1 + U_{\text{ges}} \cdot C_2 + U_{\text{ges}} \cdot C_3 =$

$$\cancel{U_{\text{ges}}} (C_1 + C_2 + C_3) = C_{\text{ges}} \cdot \cancel{U_{\text{ges}}}$$

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

Ladung Q identisch auf C_1, C_2, C_3

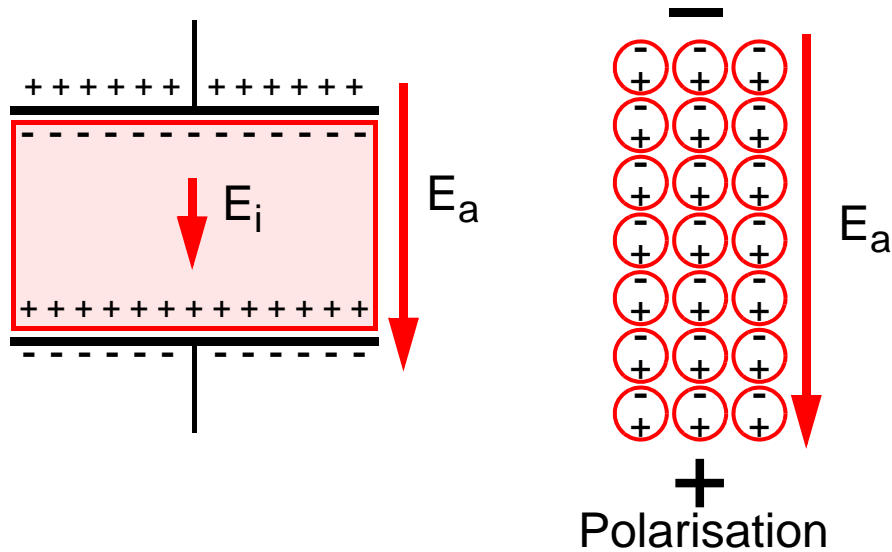


$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

$$U_{\text{ges}} = \frac{\cancel{Q}}{C_{\text{ges}}} = \cancel{Q} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

$$1/C_{\text{ges}} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \dots$$

6.4 Materie im elektrischen Feld E



Bringt man isolierende Materie in das Feld eines Kondensators, so vergrößert sich die Kapazität C um einen dimensionslosen Faktor ϵ_r , der relative Dielektrizitäts-Konstante genannt wird. $\epsilon_r = C_{\text{rel}}/C_{\text{vak}}$ oder für Platten-Kondensator: $C = \epsilon_0 \epsilon_r A/d$

$Q = C \cdot U$, somit $Q = C \cdot U / \epsilon_r$, die Feldstärke E_i sinkt somit um den Faktor ϵ_r , Q bleibt const.

Die relative Dielektrizitäts-Konstante (DK) ist im Gegensatz zu ϵ_0 dimensionslos, keine Konstante, sondern von vielen Faktoren (ω , T , p , ...) abhängig

Material	Relatives ϵ
Vakuum	1.00000000
Luft (0°C, 1 atm)	1.000576
Wasserstoff	1.000264
Glas	5 - 10
Schwefel	3.6 - 4.3
Quarz	3.7
Ethyl-Alkohol (20°C)	28.5
Nitrobenzol (15°C)	37
BaTiO ₃	$10^3 - 10^4$

6.5 Äquivalenz-Beziehung

Wir müssen nun die mechanischen und die elektrischen Einheiten durch eine einzige Definition verbinden und daran alle anderen Größen anschliessen. Damit ist jede mechanische Einheit in elektrischen Einheiten und jede elektrische Grösse in mechanischen Einheiten ausdrückbar

Energie „Joule“ (J)

$$1 [\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}] = 1 [\text{Nm}] = 1 [\text{J}] = 1 [\text{VAs}]$$

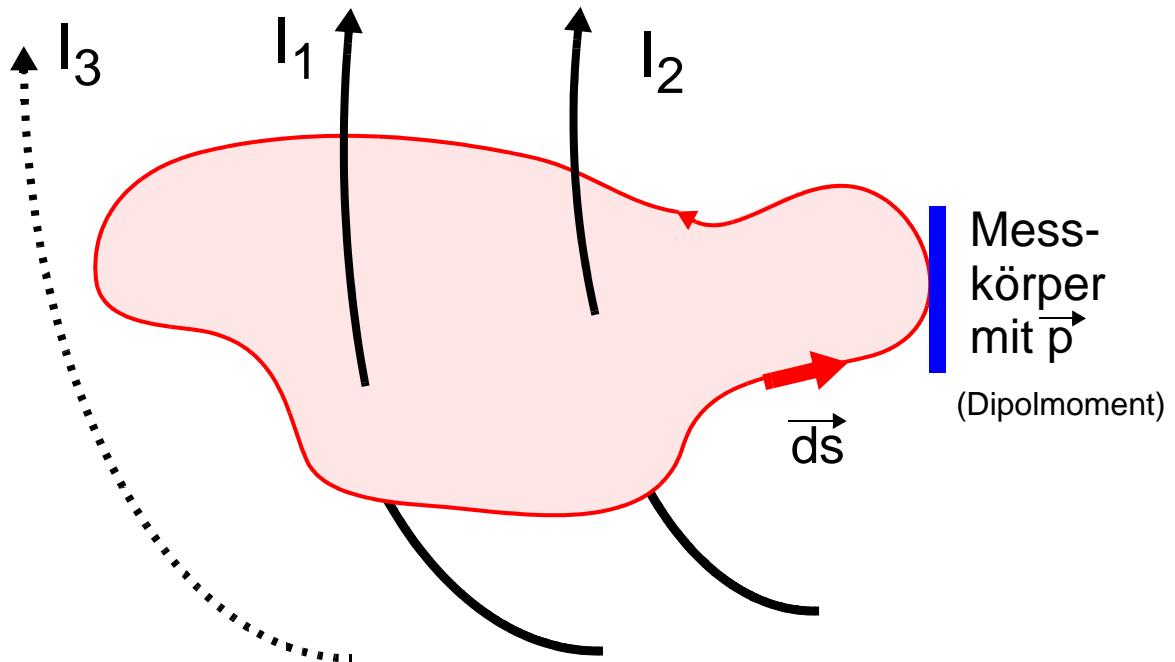
Beispiel: PS (Pferde“stärke“) = **1 PS = 0.7355 [KW] Leistungsmaß**

6.6 Zusammenfassung der Einheiten

Name	Einheit	Dimension
Ladung Q	„Coulomb“ (C)	$1 [\text{C}] = 1 [\text{As}]$ wichtigste elektrische Einheit
Spannung U	„Volt“ (V)	$1 [\text{V}] = 1 [\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}] = 1 [\text{W A}^{-1}]$
Widerstand R	„Ohm“ (Ω)	$1 [\Omega] = 1 [\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-2}] = 1 [\text{V A}^{-1}]$
Leitwert	„Siemens“ (S)	$1 [\text{S}] = 1 [\text{m}^{-2} \text{kg}^{-1} \text{s}^3 \text{A}^2] = 1 [\text{A V}^{-1}]$
Kapazität C	„Farad“ (F)	$1 [\text{F}] = 1 [\text{m}^{-2} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2] = 1 [\text{C V}^{-1}]$
Induktivität L	„Henry“ (H)	$1 [\text{H}] = 1 [\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-2}] = 1 [\text{Wb A}^{-1}]$
magn. Fluss Φ	„Weber“ (Wb)	$1 [\text{Wb}] = 1 [\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}] = 1 [\text{Vs}]$
Induktion B	„Tesla“ (T)	$1 [\text{T}] = 1 [\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}] = 1 [\text{Wb m}^{-2}]$
Kraft F	„Newton“ (N)	$1 [\text{N}] = 1 [\text{m kg s}^{-2}] = 1 [\text{VAs m}^{-1}]$
Energie W	„Joule“ (J)	$1 [\text{J}] = 1 [\text{m}^2 \text{kg s}^{-2}] = 1 [\text{Nm}] = 1 [\text{VAs}]$
Leistung P	„Watt“ (W)	$1 [\text{W}] = 1 [\text{m}^2 \text{kg s}^{-3}] = 1 [\text{VA}]$

Mit diesen Einheiten können wir in der Vorlesung jede Grösse ausdrücken

7. Laplace'sches Gesetz



Man misst mit einer Polstärke \vec{p} (z.B. kleiner Dauermagnet) die Kraft des Magnetfeldes \vec{H} auf \vec{p} entlang einer geschlossenen Kurve der Länge s um die Stöme I_1 und I_2 (I_3 nicht!) Aufzubringende Gesamt-**Arbeit** für einen geschlossenen Umlauf \vec{s}

$$p \oint \vec{H} * \vec{ds} = p * (I_1 + I_2) = p * I_{\text{ges}}$$

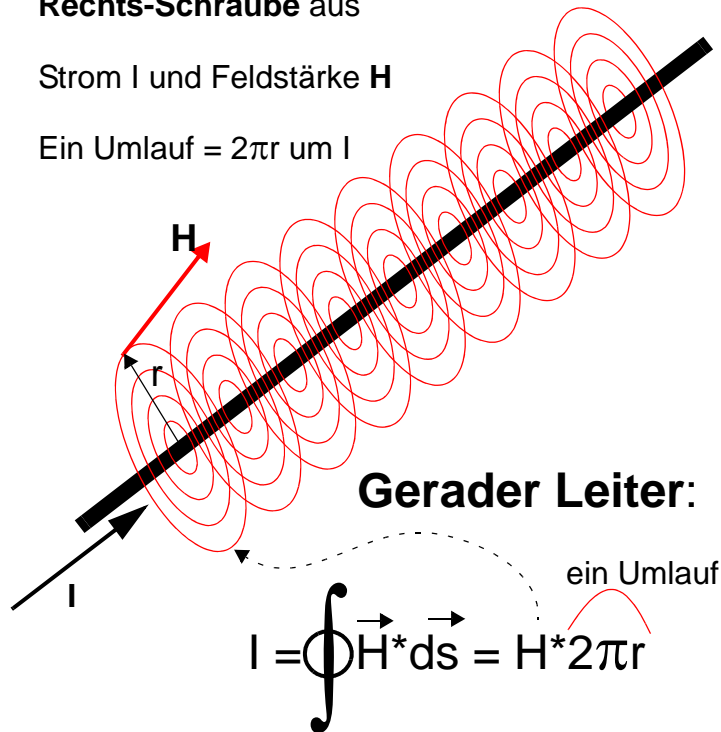
$$I = \oint \vec{H} * \vec{ds}$$

korrekter: $H(s) * ds$

Dieses empirische Gesetz muss noch in eine differentielle Form gebracht werden (Maxwell: $\vec{j} = \text{rot } \vec{H}$) und beschreibt dann \vec{H} als Funktion des Stromdichtefeldes \vec{j}

7.1 Magnetfelder von Strömen

Rechts-Schraube aus
Strom I und Feldstärke H
Ein Umlauf = $2\pi r$ um I

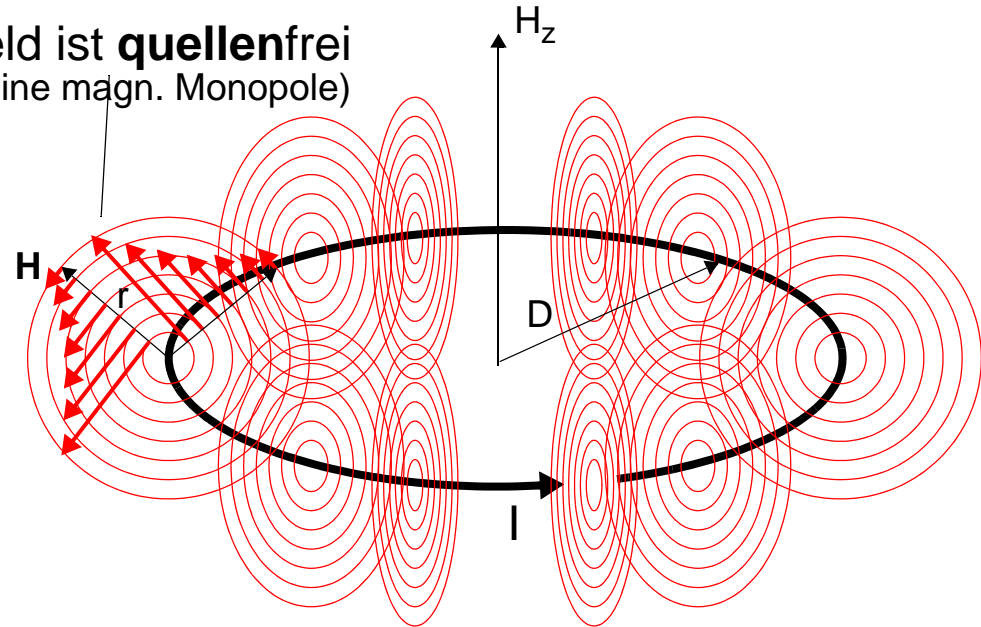


Daraus:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} [\text{Am}^{-1}]$$

$$\sim 1/r$$

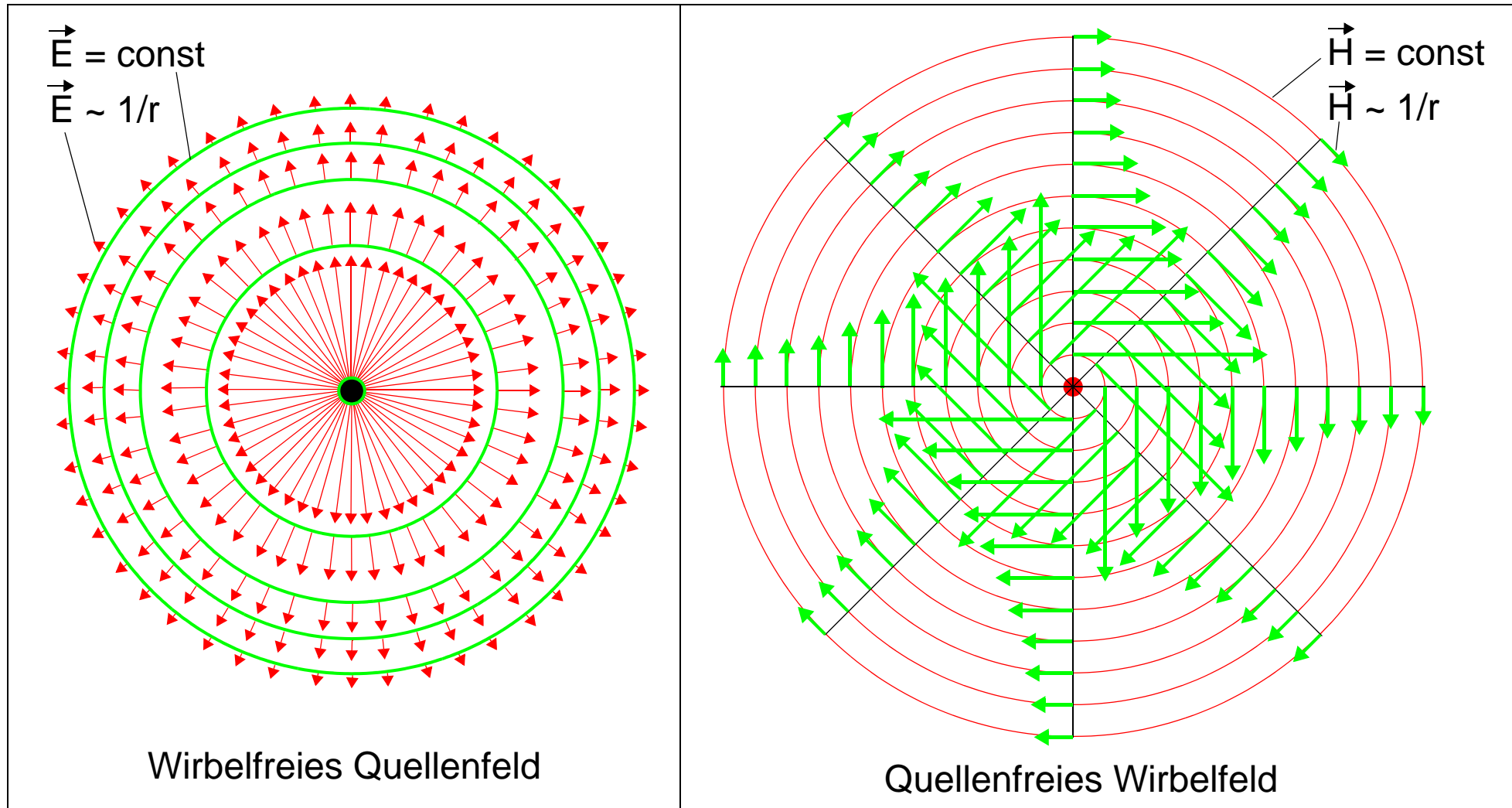
Feld ist **quellenfrei**
(keine magn. Monopole)



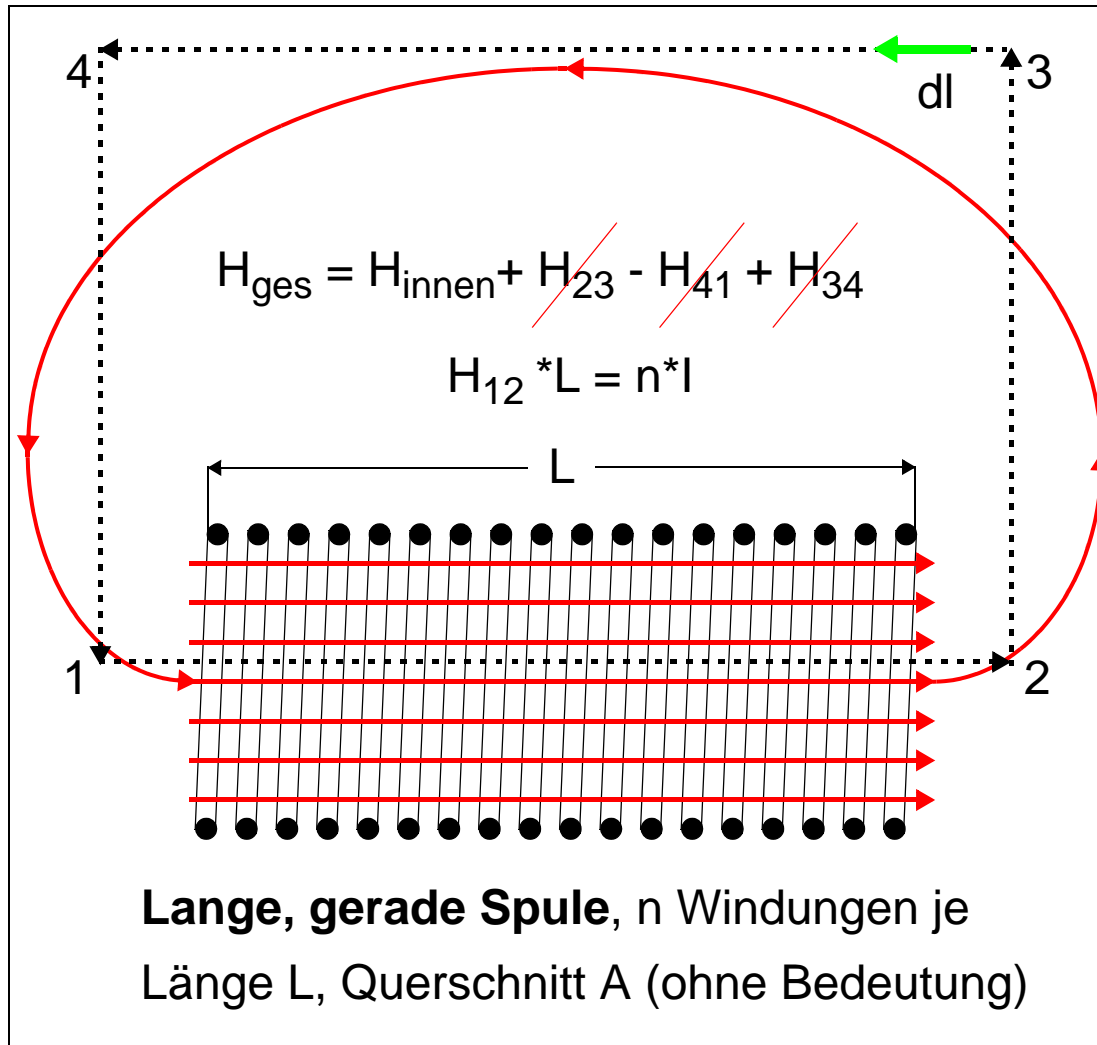
Kreisstrom I (H nur zentral in z -Richtung einfach berechenbar, ansonsten Elliptische Integrale)

$$\vec{H}_z = \frac{ID^2}{2z^3} [\text{Am}^{-1}]$$

7.1.1 Vergleichende Betrachtung E und H



7.2 Magnetfeld H einer langen Spule



Man denkt sich die Spule der Länge L und dem Querschnitt A zusammengesetzt aus lauter einzelnen Stromschleifen. Dann wird aufsummiert über einen Integrationsweg 1→2→3→4→1. Da $H_{23} = -H_{41}$ und im H_{34} Unendlichen sicherlich Null ist, verbleibt nur der Anteil H_{12} im Spulen-Inneren.

$$n * I = \oint \vec{H} * d\vec{L} \rightarrow$$

$$H_{\text{innen}} = I * \frac{n}{L}$$

konstant im Spulen-Inneren angesetzt

7.3 Anmerkung zur Integration

$$I = \oint \vec{H}^* \cdot d\vec{L} = \int_{x=1}^{x=2} \vec{H}^* \cdot d\vec{L} + \int_{y=2}^{y=1} \vec{H}^* \cdot d\vec{L} + \int_{x=4}^{x=3} \vec{H}^* \cdot d\vec{L} + \int_{y=4}^{y=2} \vec{H}^* \cdot d\vec{L}$$

verschwindet im Unendl.

umgekehrt gleich wg. +y oder -y

Unter dem Ringintegral stehen zwei Vektoren. solange diese parallel, bzw. antiparallel verlaufen, ergibt sich ein von NULL verschiedenes Skalar-Produkt. Stehen $d\vec{L}$ und \vec{H} orthogonal zu einander, so ist das Integral auch gleich NULL.

7.4 Materie im Magnetfeld

Bringt man Materie in ein inhomogenes Magnetfeld, so werden drei Fälle unterschieden:

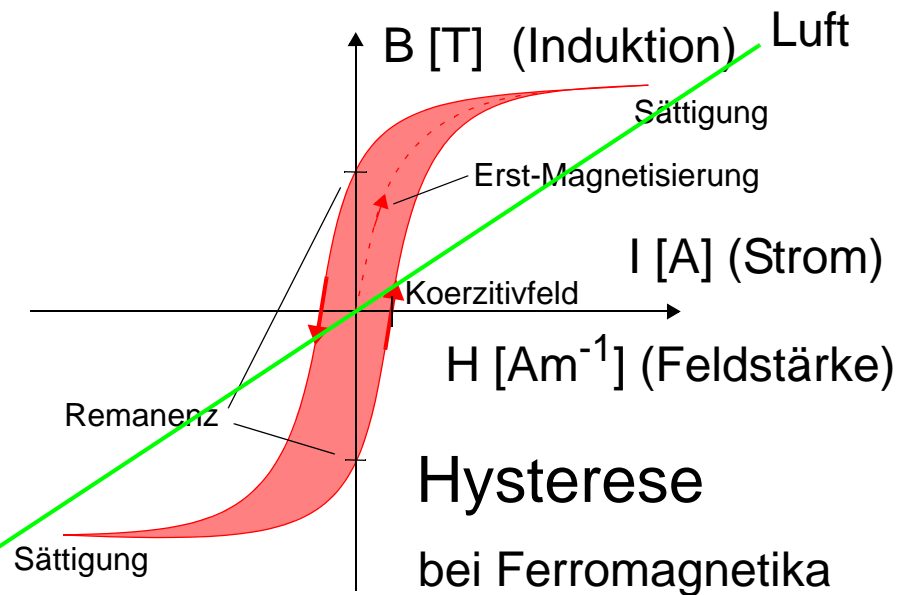
1. Der Probekörper wird aus dem Feld verdrängt → **Diamagnetismus**
2. Der Probekörper wird schwach in das Feld hineingezogen → **Paramagnetismus**
3. Der Probekörper wird stark in das Feld hineingezogen → **Ferromagnetismus**

$$B = \mu_0 \mu_{\text{rel}} H \text{ [VsA}^{-1}\text{m}^{-1}\text{Am}^{-1}] = \text{[Vsm}^{-2}\text{]}$$

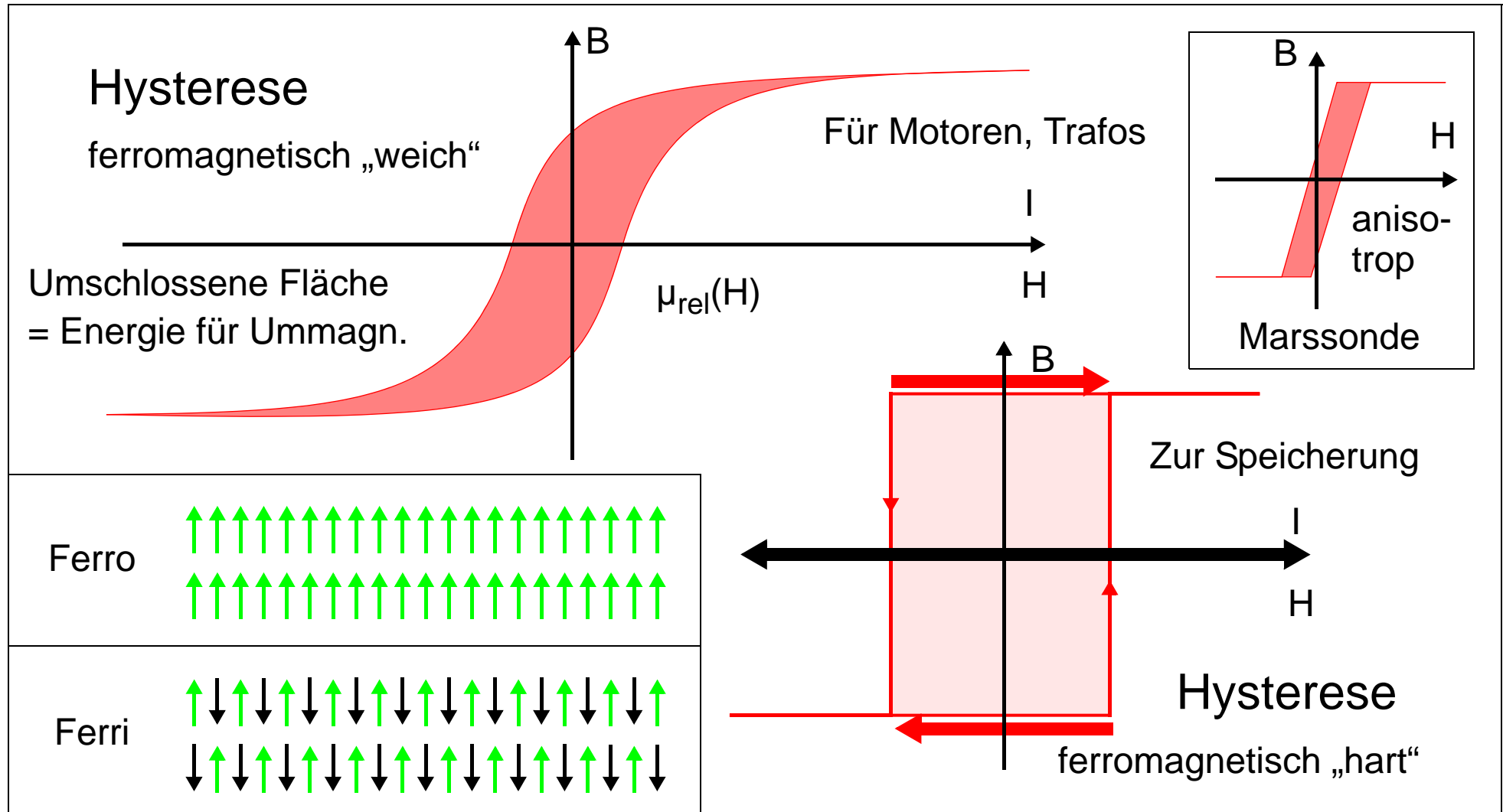
Induktion oder auch magnetische Flussdichte

Material	relative Permeabilität μ_{rel}	Bez.
Vakuum	1.0000000000000000	neutral
Wismut	0.99999986	dia
Stickstoff	0.9999999997	dia
Kupfer	0.99999999988	dia
Platin	1.0000193	para
Eisen	19.000 (bis $T_{\text{Curie}} = 744 \text{ }^\circ\text{C}$)	ferro
Kobalt	15.000 (bis $T_{\text{Curie}} = 1131 \text{ }^\circ\text{C}$)	ferro
Nickel	7.000 (bis $T_{\text{Curie}} = 372 \text{ }^\circ\text{C}$)	ferro
Spezielle Legierungen	80.000 (T_{Curie} variabel)	ferro

Man kann die relative Permeabilität (Durchlässigkeit) auch als Verstärkung des Feldes einer Luftpule deuten: $\mu_{\text{rel}} = B/B_0$



7.4.1 Hart- oder weichmagnetisch



7.5 Das Elektron in Feldern

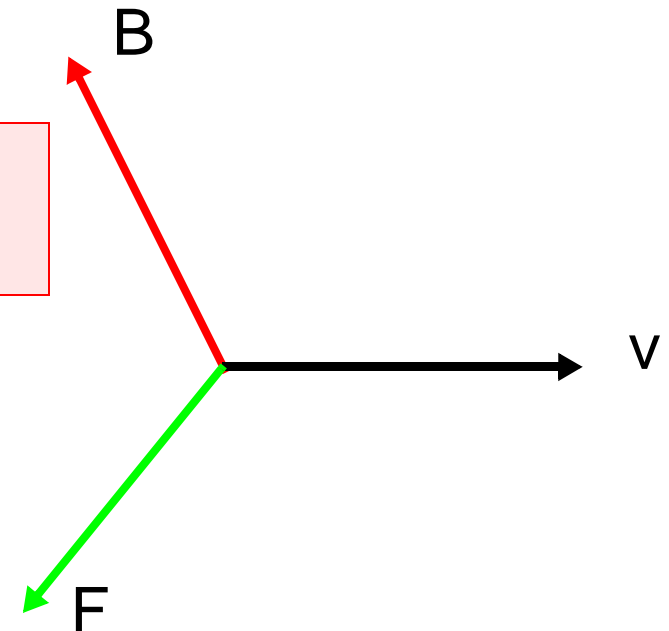
Ruhendes Elektron	Bewegtes Elektron
<p><u>Elektrisches Feld \mathbf{E}</u></p> <p>Das Elektron erzeugt in seiner Umgebung selbst ein Feld, dieses tritt in Wechselwirkung mit dem „äusseren“ Feld \mathbf{E}</p> $\mathbf{F} = e \cdot \mathbf{E}$ <p>(das ruhende Elektron wird beschleunigt)</p>	<p><u>Elektrisches Feld \mathbf{E}</u></p> <p>Hier treten ebenfalls Coulomb-Kräfte auf.</p> <p>Beispiel: Ablenkung zwischen Kondensatorplatten im Oszilloskop und beim Fernsehschirm</p>
<p><u>Magnetisches Feld \mathbf{H}</u></p> <p>Das ruhende Elektron bleibt in Ruhe und baut nur ein \mathbf{E}-Feld um sich herum auf, keine Wechselwirkung zwischen \mathbf{E}- und \mathbf{H}-Feld</p>	<p><u>Magnetisches Feld \mathbf{H}</u></p> <p>Das bewegte Elektron mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} tritt in Wechselwirkung mit dem Feld \mathbf{H} über</p> $\mathbf{F} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B} = e \mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{H}$ <p>(kein \mathbf{F}, wenn \mathbf{v} und \mathbf{H} parallel sind)</p> <p>Nordlicht: Sonnenelektronen im magnetischen Erdfeld</p>

7.5.1 Kräfte im Magnetfeld

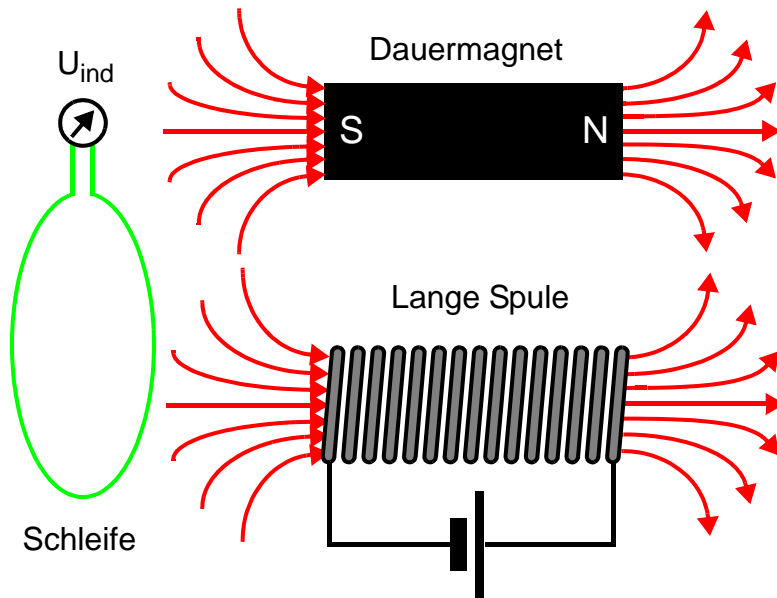
Lorentz-Kraft zwischen Strom I und Magnetfeld B ,
wobei e die Elementarladung ist und v die Geschwindigkeit,
somit ist auch die Richtung von $e \cdot v$ vorgegeben orthogonal zu B

$$\vec{F} = e \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad [\text{Asms}^{-1} \text{Vsm}^{-2}] = [\text{VA sm}^{-1}]$$

Rechtssystem für Vektorprodukt



7.6 Das Induktionsgesetz (experimentell)



1. Schiebt man einen Stabmagneten durch eine Leiterschleife, so ergibt sich am Instrument ein Spannungs-Stoss U_{ind}
2. Schiebt man den Stabmagnet mit umgekehrter Polung durch, so ergibt sich $-U_{\text{ind}}$
3. Verdoppelt man die Schleifenanzahl, so ergibt sich $2 \cdot U_{\text{ind}}$
4. Nimmt man zwei Dauermagnete, so ergibt sich auch $2 \cdot U_{\text{ind}}$
5. Zieht man den Dauermagnet zurück, so ergibt sich ebenfalls ein umgekehrter Ausschlag

6. Ersetzt man den Permanent-Magnet durch eine stromdurchflossene Spule mit dem konstanten Strom I , dann erhält man die Versuchsergebnisse 1 - 3
7. Erhöht man den Strom I um den Faktor 2, so erhält man ebenfalls doppelten Ausschlag
8. Schiebt man die stromlose Spule in die Stromschleife und schaltet dann erst I ein, so erhält man ebenfalls einen Stromstoss U_{ind}

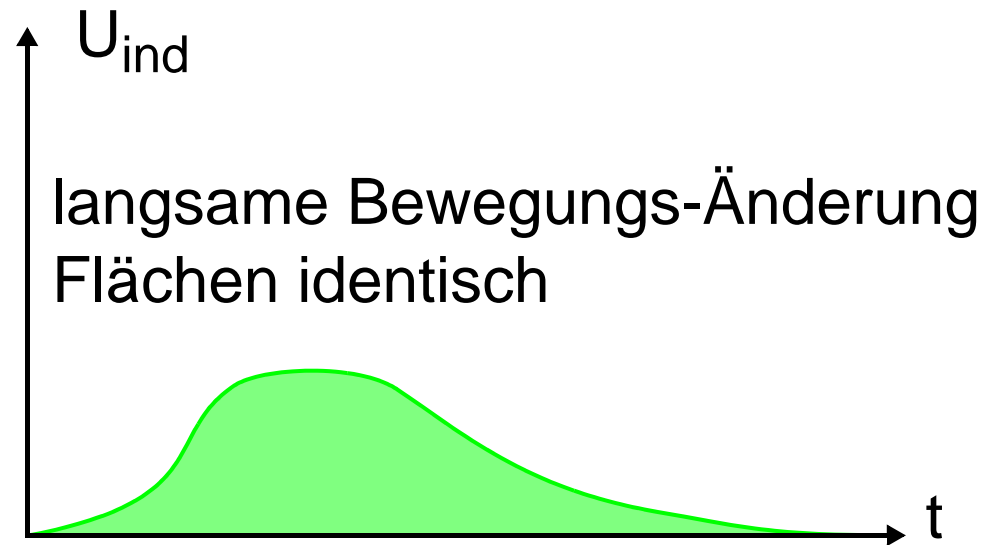
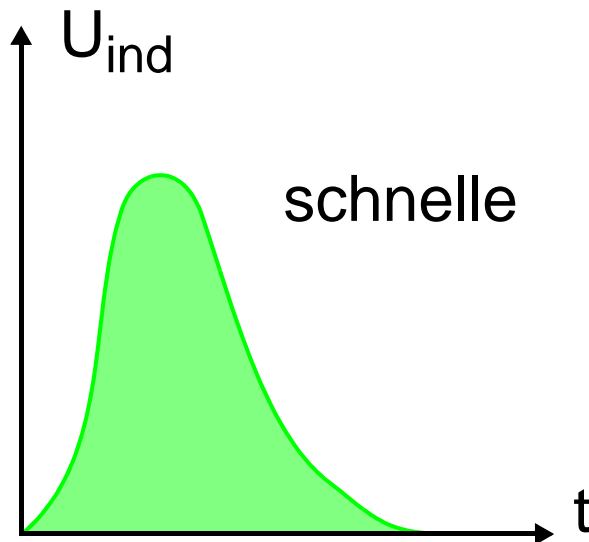
9. Bringt man die Stromschleife in ein vorhandenes Magnetfeld, so erhält man ebenfalls einen Ausschlag. Bewegt man die Schlinge aus dem Magnetfeld, so ergibt sich der entgegengesetzte Ausschlag
10. Dreht man die Schlinge im Magnetfeld, so erhält man einen von der Stellung abhängigen Ausschlag. Steht die Schlingenfläche parallel zu den Feldlinien, so ergibt sich kein Ausschlag
11. Verändert man die Fläche der Schleife im Magnetfeld, so erhält man ebenfalls eine induzierte Spannung
12. Bringt man nach 8. ins Innere ein Ferromagnetikum, so erhält man beim Einschalten von I ein Vielfaches von U_{ind}

7.7 Das Induktionsgesetz (mathematisch)

Fluss Φ leitet sich her aus $B \cdot A$ (auch differentiell oder als Integral)

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(B \cdot A)}{dt} \quad [\text{Vs m}^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}] = [\text{V}]$$

Minuszeichen kommt aus Rechts-System



7.8 Die Selbst-Induktion

Jeder geschlossene Stromkreis (z.B. 5.1 rechts) erzeugt ein Magnetfeld und dieses führt zu einem Fluss Φ , der wie die Felder \mathbf{B} und \mathbf{H} dem augenblicklichen Strom I proportional ist mit $\Phi = L \cdot I$. Damit erhalten wir nach dem Induktions-Gesetz:

$$U_{\text{ind}} = -d\Phi/dt = -L \cdot dI/dt$$

mit $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, L heisst Induktivität

Das Minus-Zeichen bedeutet, dass die induzierte Spannung einer Stromänderung entgegengesetzt sein muss, da sonst eine Verstärkung ins Unendliche erfolgen würde, auch als **Lenz'schen Regel** bekannt.

Zylindrische Spule mit dem Querschnitt A , somit durch jede Windung $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, durch n Windungen also $\Phi = n \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Bekannt ist: $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_{\text{rel}} \mathbf{H} = \mu_0 \mu_{\text{rel}} \cdot I \cdot n / \ell$, somit erhalten wir für den Gesamtfluss $\Phi = n \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = n \mu_0 \mu_{\text{rel}} \cdot I \cdot n \cdot A / \ell = \mu_0 \mu_{\text{rel}} \cdot n^2 (A / \ell) \cdot I$

Induktions-Gesetz: $U_{\text{ind}} = -d\Phi/dt = -\mu_0 \mu_{\text{rel}} \cdot n^2 \cdot \frac{A}{\ell} \frac{dI}{dt} \left[\frac{\text{V s m}^2 \text{ A}}{\text{A m m s}} \right] = [\text{V}]$

Somit wird für die „Induktivität“ L durch Vergleich mit oben:

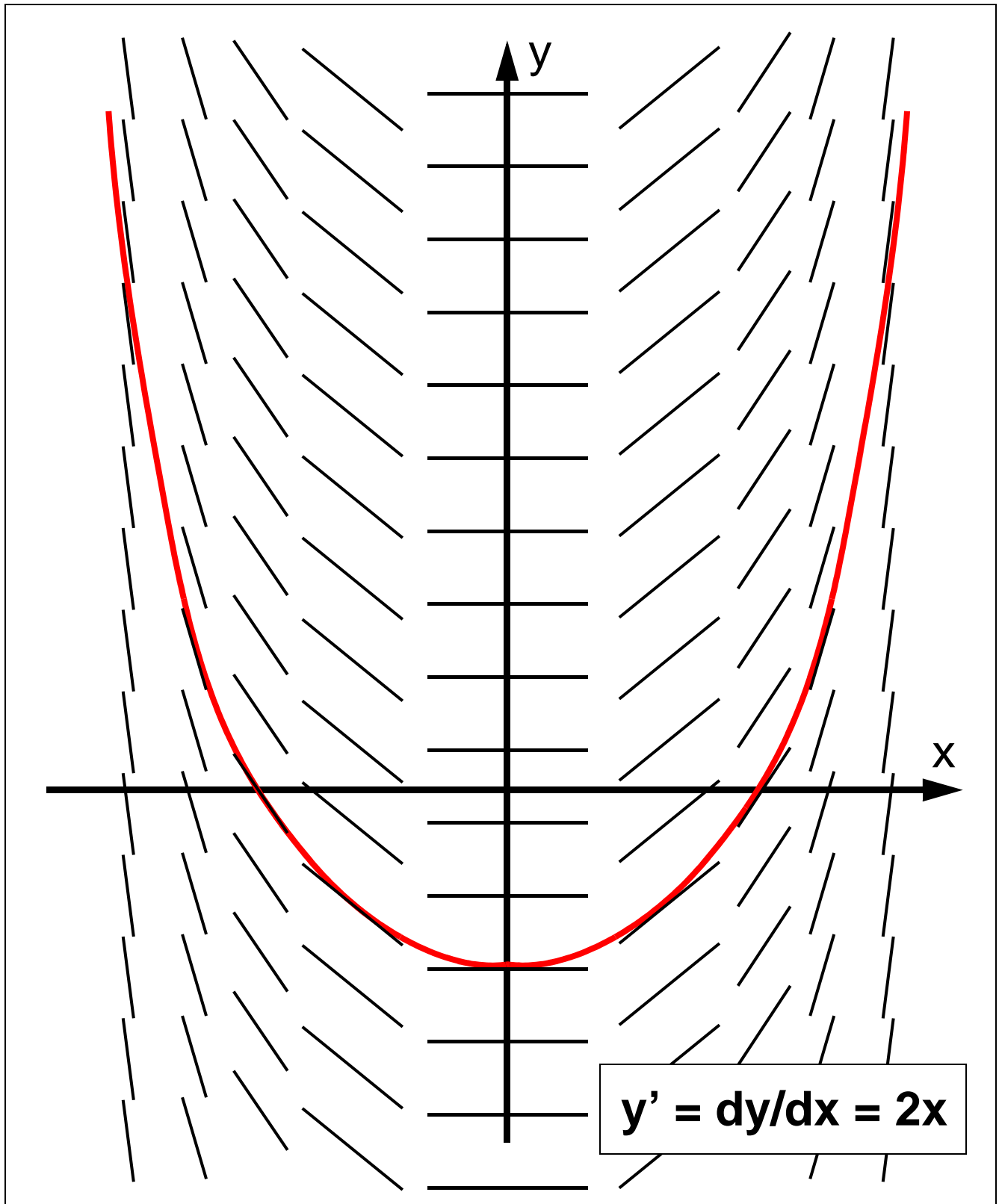
$$L = \mu_0 \mu_{\text{rel}} \cdot n^2 \cdot A / \ell \left[\frac{\text{V s m}^2}{\text{A m m}} \right] = [\text{Vs/A}] = [\text{Henry}]$$

lange, schlanke Spule

8. Umgang mit DGL

- **Definition:** Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung (DGL) versteht man die Forderung, eine differenzierbare und gegebenenfalls auch wiederholt differenzierbare Funktion einer reellen oder komplexen Veränderlichen so zu bestimmen, dass für alle Stellen eines bestimmten Intervalls, bzw. eines bestimmten Gebietes zwischen der unabhängigen Veränderlichen, der gesuchten Funktion und einer endlichen Anzahl ihrer auf einander folgenden Ableitungen eine vorgeschriebene Gleichung besteht.
- Ist x die **unabhängige** und y die **abhängige** Veränderliche (oder also die gesuchte Funktion), so hat eine DGL k -ter Ordnung die Form $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$
- Beispiel: $y' = dy/dx = f(x)$ ist von **1**. Ordnung
- Gewöhnliche DGL, partielle DGL: Mehrere unabhängige Veränderliche, Ableitung jeweils nur nach einer Veränderlichen x, y, z
- $\partial(F(x,y,z)/\partial x$ $\partial(F(x,y,z)/\partial y$ $\partial(F(x,y,z)/\partial z$
- Wellengl.: $\partial^2 \mathbf{E} / \partial x^2 + \partial^2 \mathbf{E} / \partial y^2 + \partial^2 \mathbf{E} / \partial z^2 = c^{-2} \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$

8.1 Geometrische Deutung



8.2 Mathematische Lösung einfacher DGL

$$y' = dy/dx = 2x$$

ist das **Richtungsfeld**

$$dy = 2x \cdot dx$$

nennt man Trennung der Variablen

$$\int dy = \int 2x \cdot dx$$

wird unbestimmt integriert

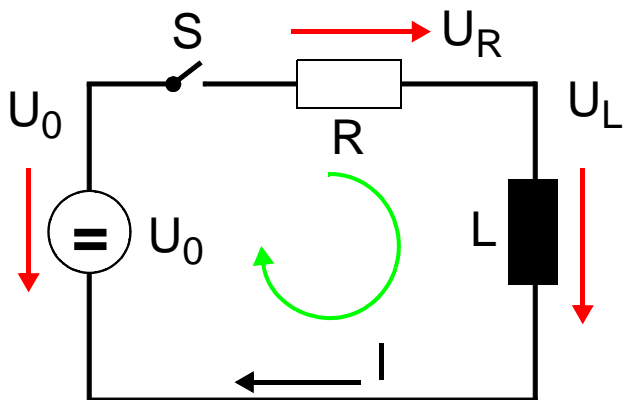
$$y = 2x^2/2 + \text{Const}$$

Allgemeine Lösung

Zusatzbedingung: Die Kurve soll durch den Punkt 2/2 gehen: $y = 2$, $x^2 = 4$, eingesetzt $2 = 4 + \text{Const}$, somit $\text{Const} = -2$. Damit ist die spezielle Lösung

$$y = x^2 - 2$$

8.3 Ausgleichsvorgänge



Wir besprechen zuerst den Fall, dass eine Induktivität L über einen ohmschen Widerstand an eine Spannung U_0 gelegt wird. Dazu führen wir das Überlagerungs-Prinzip ein, das besagt, dass man bei linearen passiven Schaltungen dem stationären Endzustand (keine Zeitabhängigkeit) einen zeitabhängigen, evtl. flüchtigen Ausgleichsvorgang überlagern darf (Superposition).

Zur Gewinnung der entsprechenden Gleichungen geht man in folgenden Schritten vor:

- Aufstellen einer Differentialgleichung (DGL) für den obigen Stromkreis
- Lösen der DGL für den stationären Zustand (Endzustand mit grossem t)
- Lösen der homogenen DGL für den flüchtigen Vorgang
- Aufstellen der Anfangsbedingung (hier für $t = 0$)
- Superposition beider Lösungen zur Endgleichung (hier $I(t)$)

Aufstellen der DGL

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel ist die Summe der Spannungen in jeder Masche gleich NULL. Wir haben einen Widerstand R , hier gilt das Ohm'sche Gesetz und eine Induktivität L , für die das Induktionsgesetz gilt, somit:

$$U_R = R \cdot I \quad \text{und} \quad U_L = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (\text{wirkt entgegen})$$

Dies ergibt die gesuchte Differential-Gleichung für die obige Schaltung:

$$U_0 - L \cdot \frac{dI}{dt} = R \cdot I$$

DGL

Ermittlung des stationären Endzustands

Da die Induktivität L einer Zunahme des Stroms I nur so lange mit einer Gegenspannung „antworten“ kann, bis dieser zum Endstrom angestiegen ist, wird für $t \rightarrow \infty$ keine Stromänderung mehr eintreten, d.h. $dI/dt = 0$ in der DGL

$$I(t \rightarrow \infty) = I_e = U_0/R$$

stationäre Endbedingung

8.3.1 Lösung einer DGL

Ermittlung des abklingenden Zwischenzustandes (ohne treibendes U_0)

$$0 = R \cdot I_f + L \cdot \frac{dI_f}{dt}$$

Homogene DGL

Diese wegen $U_0 = 0$ mit „homogen“ bezeichnete DGL lässt sich im vorliegenden Fall durch die Trennung (Separation) der Variablen unbestimmt integrieren

$$\int \frac{dI_f}{I_f} = - \left(\frac{R}{L} \right) \int dt$$

ergibt

$$\ln(I_f) = - \left(\frac{R}{L} \right) \cdot t + \text{Const}$$

Als Dimension erhält man für L/R [$\text{VsA}^{-1}\text{AV}^{-1}$] = [s] und nennt deshalb $\tau = L/R$ die „Zeitkonstante“ des obigen Stromkreises. Man exponenziert nun die Lösung mit dem Term $\ln(I_f)$ und erhält daraus

$$I_f(t) = \exp(\text{Const} - t/\tau) = A \cdot \exp(-t/\tau) \quad \text{Allgemeine flüchtige Lösung}$$

Ermittlung der Anfangs-Bedingung für die Konstante A

Wird der Schalter S zu Beginn des Versuchs geschlossen, so kann der Strom I nicht sprunghaft auf einen Wert springen, da sich das Magnetfeld in der Spule ebenfalls nicht sprunghaft aufbauen kann. Wir erhalten somit für $t = 0$:

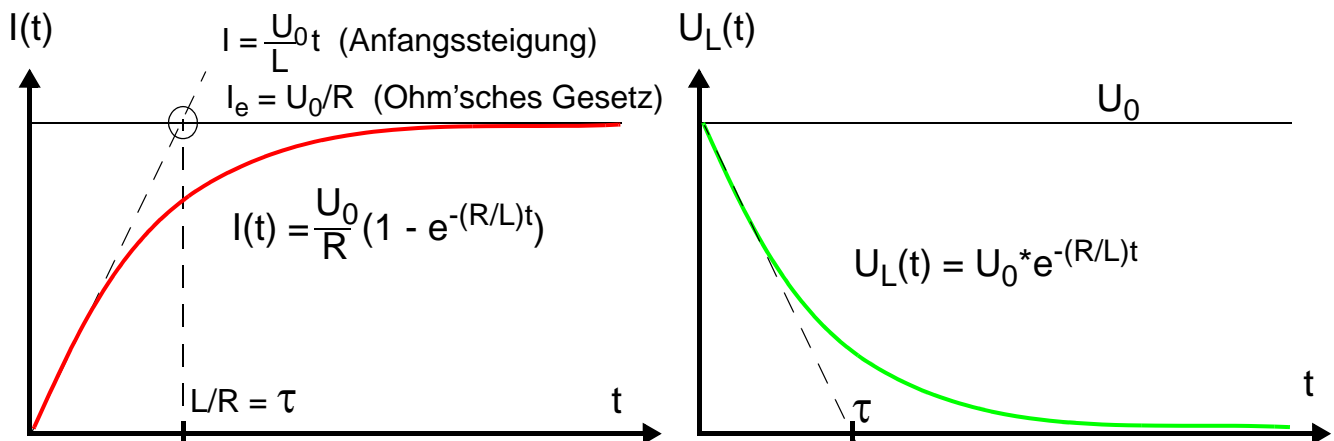
$$I(0) = I_e + I_f(0) = 0, \quad \text{daraus folgt für A: } 0 = U_0/R + A, \quad \text{oder } A = -(U_0/R)$$

Superposition der beiden Lösungen

$$I(t) = I_e + I_f = \left(\frac{U_0}{R} \right) - \left(\frac{U_0}{R} \right) e^{(-t/\tau)} = \left(\frac{U_0}{R} \right) \left[1 - e^{(-t/\tau)} \right] \quad \text{Gesamtlösung}$$

Über die oben angegebene Gleichung für die Induktion erhält man den zeitlichen Verlauf des Spannungsabfalls $U_L(t)$ an der Induktivität L

$$U_L(t) = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -L(U_0/R)(-R/L)[\exp(-t/\tau)] = U_0 \cdot \exp(-t/\tau)$$



8.3.2 Einschaltvorgang

Herleitung der Zeitkonstanten τ

Zunächst ermitteln wir der Anfangs-Steigung unserer gefundenen Gleichung

$$I(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\left(\frac{U_0}{R}\right)\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-(R/L)t} = U_0/L \quad \text{da } e^0 = 1 \text{ für } t = 0$$

Schnitt der Geraden mit der Anfangs-Steigung $dI(t=0)/dt$ mit der Geraden für den Endstrom $I_e = U_0/R$ (entspricht der stationären Lösung)

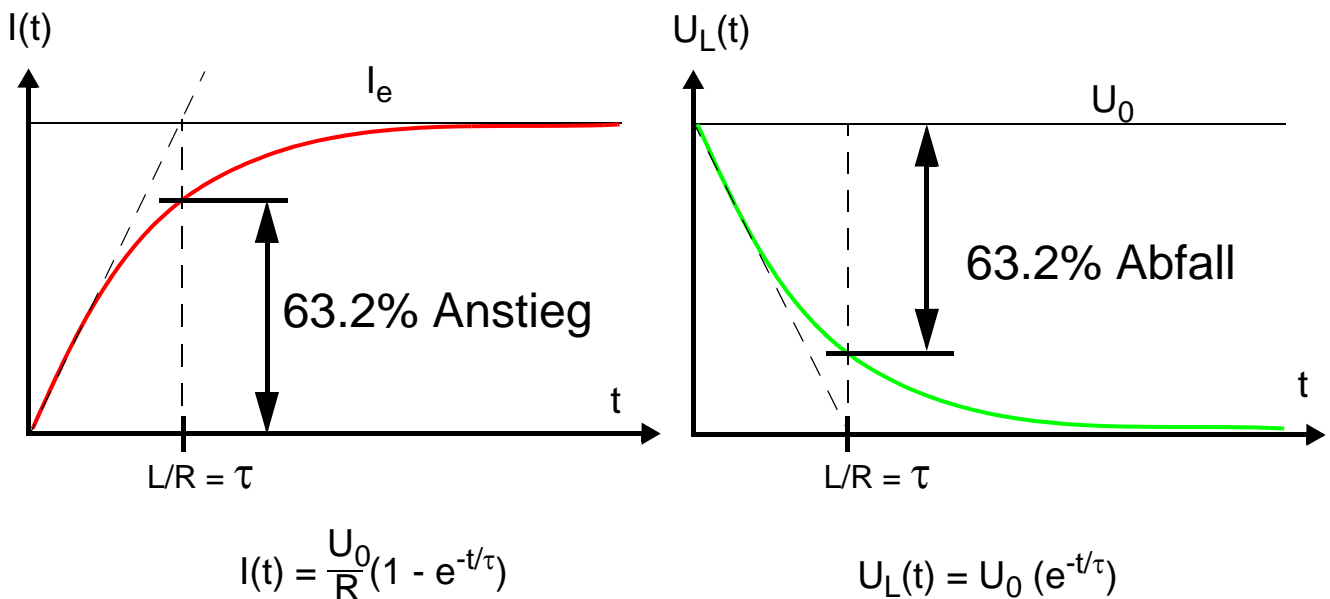
$$(U_0/L) \cdot t = U_0/R \quad \text{daraus folgt: } t = L/R = \tau$$

für den Exponenten gilt $t/\tau = (R/L) \cdot t$ [s.VA⁻¹V⁻¹s⁻¹A]
dimensionslos, da transzendent

Wir können die Zeitkonstante auch **auf andere Weise** deuten: Dazu setzt man $t = \tau$ in der folgenden Gleichung (Gesamtlösung) für $I(\tau)$

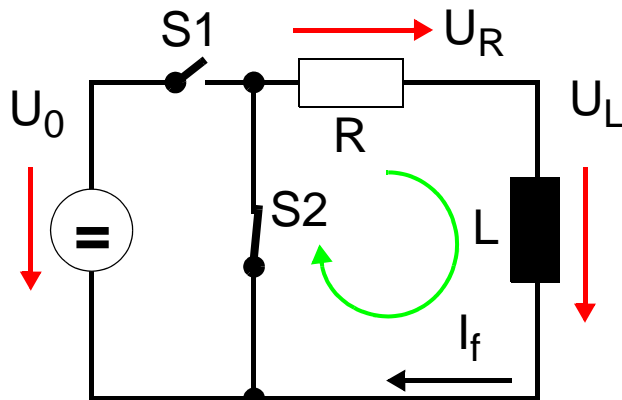
$$I(\tau) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = I_{\max}(1 - e^{-1}) = I_{\max}(1 - 0.368) = I_{\max} \cdot 0.632$$

Das zeigt, dass nach Ablauf der „Zeitkonstanten“ τ eine Änderung um ca. 63% erfolgt ist: Entweder hat der Strom 63% seines Endwerts erreicht oder die Spannung ist um 63% gefallen.



8.3.3 Abschaltvorgang

Nun wird für dieselbe Schaltung die Spannung U_0 über Schalter S_1 abgeschaltet und über einen zweiten Schalter S_2 gleichzeitig die Spule kurzgeschlossen, was geschieht dabei? Nach dem Abschalten gibt es keine treibende Spannung U_0 mehr, die Energie sitzt aber magnetisch gespeichert in der Spule. Sobald der Strom abzusinken beginnt, wird in der Spule nach dem Induktionsgesetz eine Gegenspannung U_{ind} erzeugt. L selbst hat hier keinen Widerstand R !!



Zugeordnete DGL:

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \frac{dI}{dt} = R \cdot I$$

Auch hier haben wir die Überlagerung eines stationären und eines flüchtigen Anteils für den Spulenstrom:

$$I(t) = I_e + I_f(t)$$

Für $t = 0$ wird die Spannung U_0 abgeschaltet, es gibt keinen stationären Strom I_e mehr und für $t \rightarrow \infty$ muss der flüchtige Spulenstrom I_f vollkommen erlöschen, sodass wir nur den flüchtigen Anteil $I_f(t)$ betrachten müssen. Da sich an den Randbedingungen in Bezug auf die Bauteile nichts geändert hat, können wir die obige Zeitkonstante $\tau = L/R$ auch im Folgenden benutzen und erhalten nach dem Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \left(\frac{dI_f}{dt} \right) = I_f(t) R$$

DGL flüchtiger Anteil

Man integriert auch hier beide Seiten wieder unbestimmt:

$$\int \frac{dI_f}{I_f} = - \left(\frac{R}{L} \right) \int dt$$

und erhält

$$\ln(I_f) = - \left(\frac{R}{L} \right) * t + \text{const}$$

τ

$$I_f(t) = \exp(\text{const} - t/\tau) = A \cdot \exp(-t/\tau)$$

Da der Strom zu Beginn des Abschaltens I_0 war und für $t \rightarrow \infty$ zu Null werden muss, kann $A = I_0 = U_0/R$ gesetzt werden und wir haben die DGL gelöst.

$$I_f(t) = (U_0/R) \cdot \exp(-t/\tau)$$

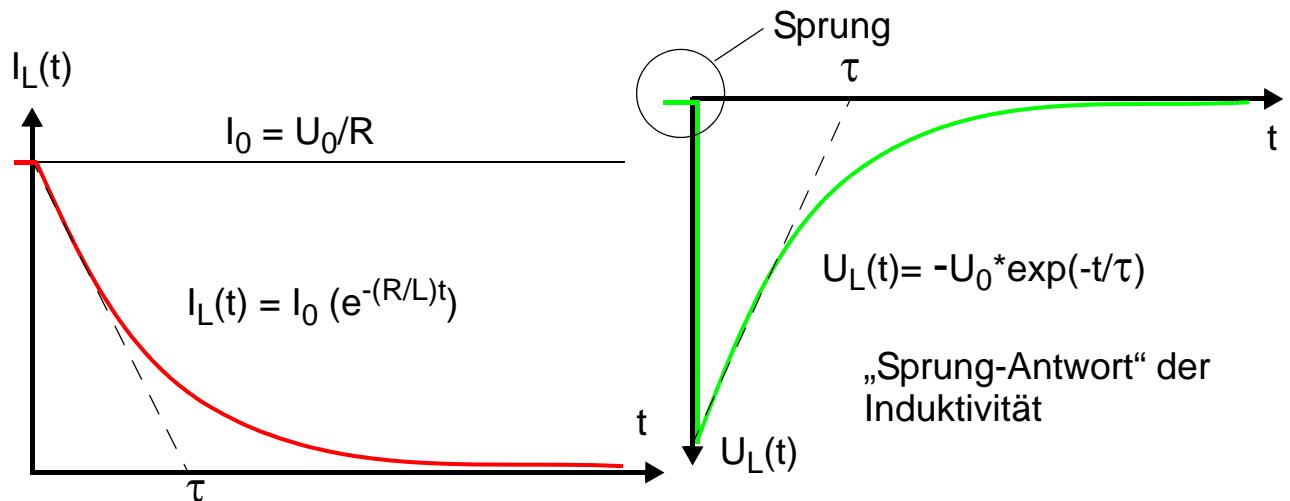
Stromverlauf

8.3.4 Abschaltvorgang

Ermittlung von $U(t)$ beim Abschalten

Nach dem Induktionsgesetz erhalten wir für $U_L(t) = U_{\text{ind}} = L(di/dt)$

$$U_L(t) = L I_0 (-1/\tau) \exp(-t/\tau) = L(U_0/R)(-R/L) \exp(-t/\tau) = -U_0 \exp(-t/\tau)$$



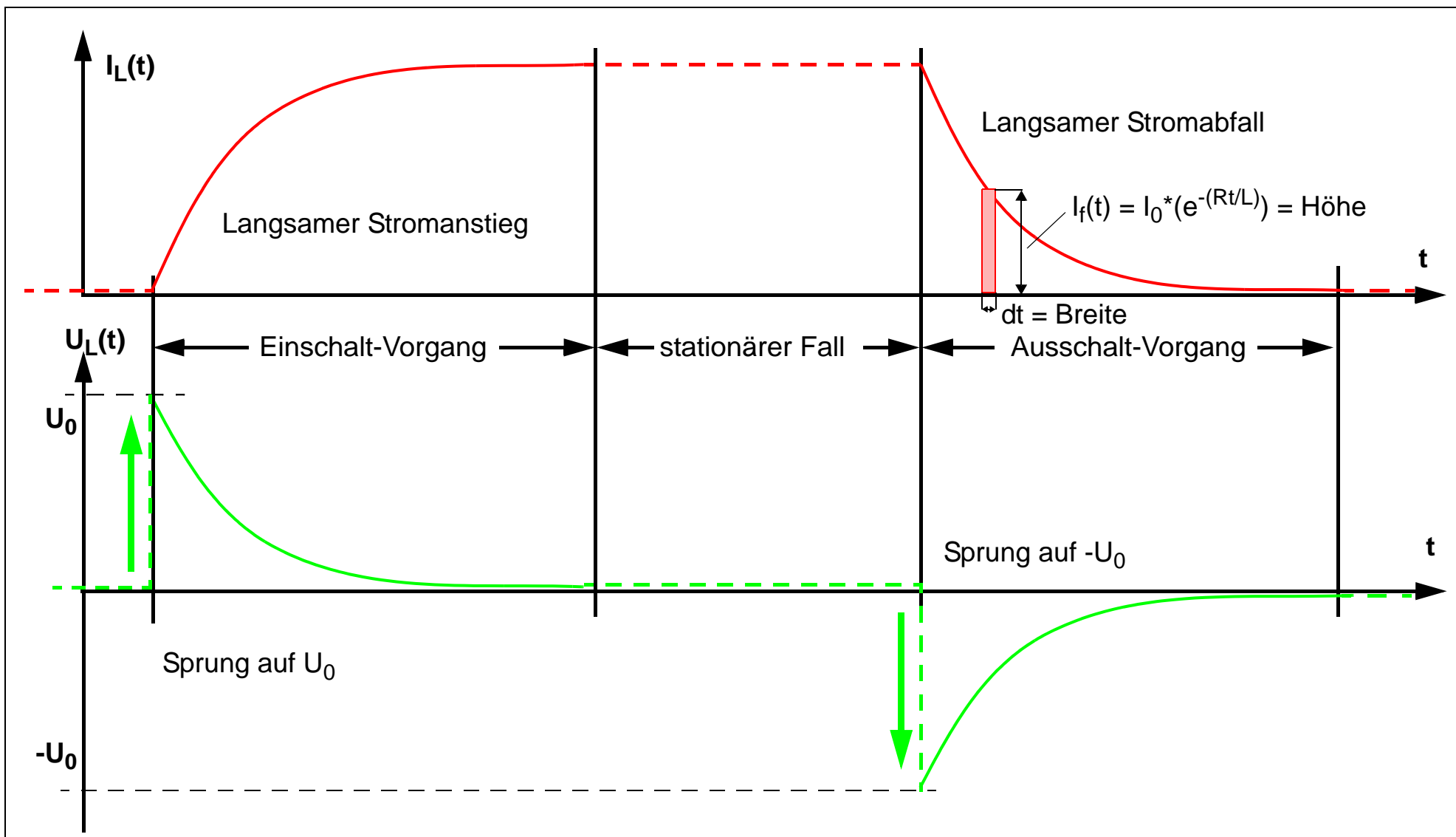
Die plötzliche, starke Sprung-Antwort von L kann als Öffnungsfunkte den Schalter S_2 zerstören, in krassen Fällen auch die Induktivität zum Platzen bringen, weil grosse magnetische Kräfte frei werden. Beim Einschalten sind Strom und Spannung in der Tendenz entgegengesetzt gerichtet, hier aber beide zu Beginn jeweils maximal

Betrachtungen zur Zeitkonstanten τ

Hier gelten andere Bedingungen, als wir beim Einschaltvorgang hergeleitet haben:

Wie obige Skizzen zeigen, ist beim Abschalten einer Induktivität nach der Zeit $t = \tau$ der Abschaltstrom aus dem Energievorrat der Induktivität um 63% gesunken und die Spannung aus dem Induktions-Stoss des Abschaltens ebenfalls um 63%. Beide streben dem Endwert NULL zu.

8.3.5 Gesamtbetrachtung für Spule



8.4 Energie des Magnetfelds

Beim Abschalten der Versorgungsspannung U_0 fließt die gespeicherte (magnetische) Energie W_L aus der Induktivität L in den ohm'schen Widerstand R und wird dort in Joule'sche Wärme umgesetzt

$$W_L = \int_0^{\infty} I_f^2 R dt = \int_0^{\infty} I_0^2 e^{-2Rt/L} R dt = R I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2Rt/L} dt$$

$$\text{Mathematisch: } \int e^{Ax} dx = (1/A) e^{Ax}$$

Woher kommt die 2? Aus dem Quadrieren von I_f

mit $I_f(t) = I_0 \cdot \exp(-Rt/L)$

Nun wird bestimmt integriert:

$$W_L = \cancel{R} I_0^2 / \cancel{2R} \left(e^{-\infty} - e^{-0} \right) = \frac{1}{2} I_0^2 L \quad [A^2 V s / A] = [J]$$

Zum Vergleich:

Kondensator

$$W_C = \frac{1}{2} C U^2 \quad [A s V^{-1} V^2] = [J]$$

Widerstand

$$W_R = I^2 R \cdot t \quad [J]$$

8.4.1 Magnetische Feld-Energie

Betrachtung für das Einschalten: Hier taucht die vom Strom I gegen die induzierte Spannung U_{ind} verrichtete Arbeit unter dem Namen Feld-Energie für die Spule wieder auf

$$W_L = \int_0^\infty I U_{\text{ind}} dt = \int_0^\infty I L (dI/dt) dt = L \int_0^\infty I dI = \frac{1}{2} L I^2 \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} L I_0^2 - 0 \quad \text{wie oben}$$

stationärer End-Strom
Beginn mit $I=0$

Setzt man nun die in 7.8 erhaltene Gleichung für die Induktivität L einer langen geraden Spule in das Ergebnis von W_L ein, so ergibt sich

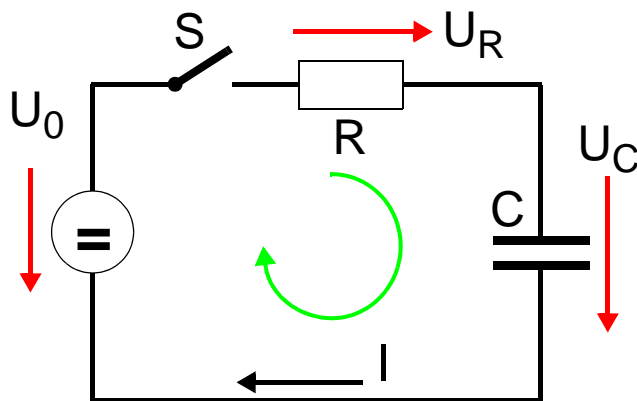
$$W_L = \frac{1}{2} L I_0^2 = W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{\text{rel}} n^2 A I_0^2 / \ell = \frac{1}{2} \underbrace{(\mu_0 \mu_{\text{rel}} n I_0 / \ell)}_B \underbrace{(n I_0 / \ell)}_H \underbrace{\ell A}_{\text{Feldvolumen } V}$$

$L = \mu_0 \mu_{\text{rel}} n^2 A / \ell$ (aus 5.5)

Dividiert man W_{magn} durch das Feldvolumen V , so erhält man dessen **Energie-Dichte**

$$w_{\text{magn}} = W_{\text{magn}} / V = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad [\text{Jm}^{-3}] \quad \text{Anwendung: Hysterese-Kurve}$$

8.5 Aufladen Kondensator



Ausgangsgleichungen

1. Ohm'sches Gesetz für R

$$U_R = R \cdot I$$

2. Kondensator-Gleichung

$$I_C = C \cdot dU_C/dt$$

Aufstellen der DGL

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel ist die Summe der Spannungen in jeder Masche gleich NULL. Wir haben einen Widerstand R, hier gilt das Ohm'sche Gesetz und eine Kapazität C, für die die Kondensatorgleichung gilt, somit:

$$U_R = R \cdot I \quad \text{und} \quad I_C = C \cdot dU_C/dt \quad (C \text{ wird aufgeladen})$$

Dies ergibt die gesuchte Differential-Gleichung für die obige Schaltung (man kennt nur den Stromverlauf $I_C(t)$ am Kondensator und wendet dieses auf R an):

$$U_0 = U_R + U_C = R \cdot I_C + U_C = RC \cdot dU_C/dt + U_C \quad \text{DGL}$$

Dabei ist bei linearen Zweipolen der zeitliche Verlauf der Kondensator-Spannung U_C aus zwei Anteilen aufgebaut, einem stationären (eingeschwungener Zustand) und einem flüchtigen Anteil aufgebaut $U_C(t) = U_e + U_f(t)$

Ermittlung des stationären Endzustands

Aus der Erfahrung (und dem Experiment) weiss man, dass der Kondensator nach Anlegen der Spannung U_0 aufgeladen wird, dass also nach einiger Zeit keine Spannungsänderung mehr erfolgt

$$t \rightarrow \infty: \quad dU_C/dt = 0 \quad \text{somit} \quad U_C(t \rightarrow \infty) = U_e = U_0 \quad \text{stationäre Endbedingung}$$

Ermittlung des abklingenden Zwischenzustandes (ohne treibendes U_0)

$$0 = R \cdot C \cdot (dU_f/dt) + U_f \quad \text{Homogene DGL}$$

Auch diese DGL lässt sich durch Trennung der Veränderlichen integrieren

8.5.1 Lösen der DGL

$$\int \frac{dU_f}{dt} = \frac{-1}{R^*C} \int dt, \quad \ln U_f = \frac{-1}{R^*C} t + \text{Const}, \quad U_f(t) = \exp(\text{Const} - \frac{t}{R^*C})$$

oder

$$U_f(t) = A \cdot \exp\left(\frac{-t}{R^*C}\right)$$

flüchtige Lösung

Bestimmung der Anfangsbedingung aus $U_C(0) = U_e + U_f(0) = 0$

$$U_e = U_0 \quad U_f(t) = A \cdot \exp(0) = A, \quad \text{zusammengefasst ergibt} \quad A = -U_0$$

Überlagerung beider Lösungen

$$U_C(t) = U_e + U_f(t) = U_0 - U_0 \cdot \exp\left(\frac{-t}{R^*C}\right) = U_0 \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{R^*C}\right)\right) \quad \text{Gesamtlösung}$$

Bestimmung der Strom-Abhängigkeit $I_C(t)$ mit $I_C = C \cdot dU_C/dt$

$$I_C(t) = C \frac{d}{dt} U_0 \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{R^*C}\right)\right) = \frac{-C \cdot U_0}{R^*C} \left(-\exp\left(\frac{-t}{R^*C}\right)\right) = \frac{U_0}{R} \exp\left(\frac{-t}{R^*C}\right)$$

Bestimmung der Anfangssteigung von $U_C(t)$

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{-U_0}{R^*C} (0 - e^{-0}) = \frac{U_0}{R^*C}, \quad \text{Schnitt mit } U_e = U_0 \text{ (stat. Lsg.) ergibt}$$

$$t = \tau = \frac{1}{R^*C}$$

Zeitkonstante für RC-Glied

Abklingvorgang (verkürzte Darstellung)

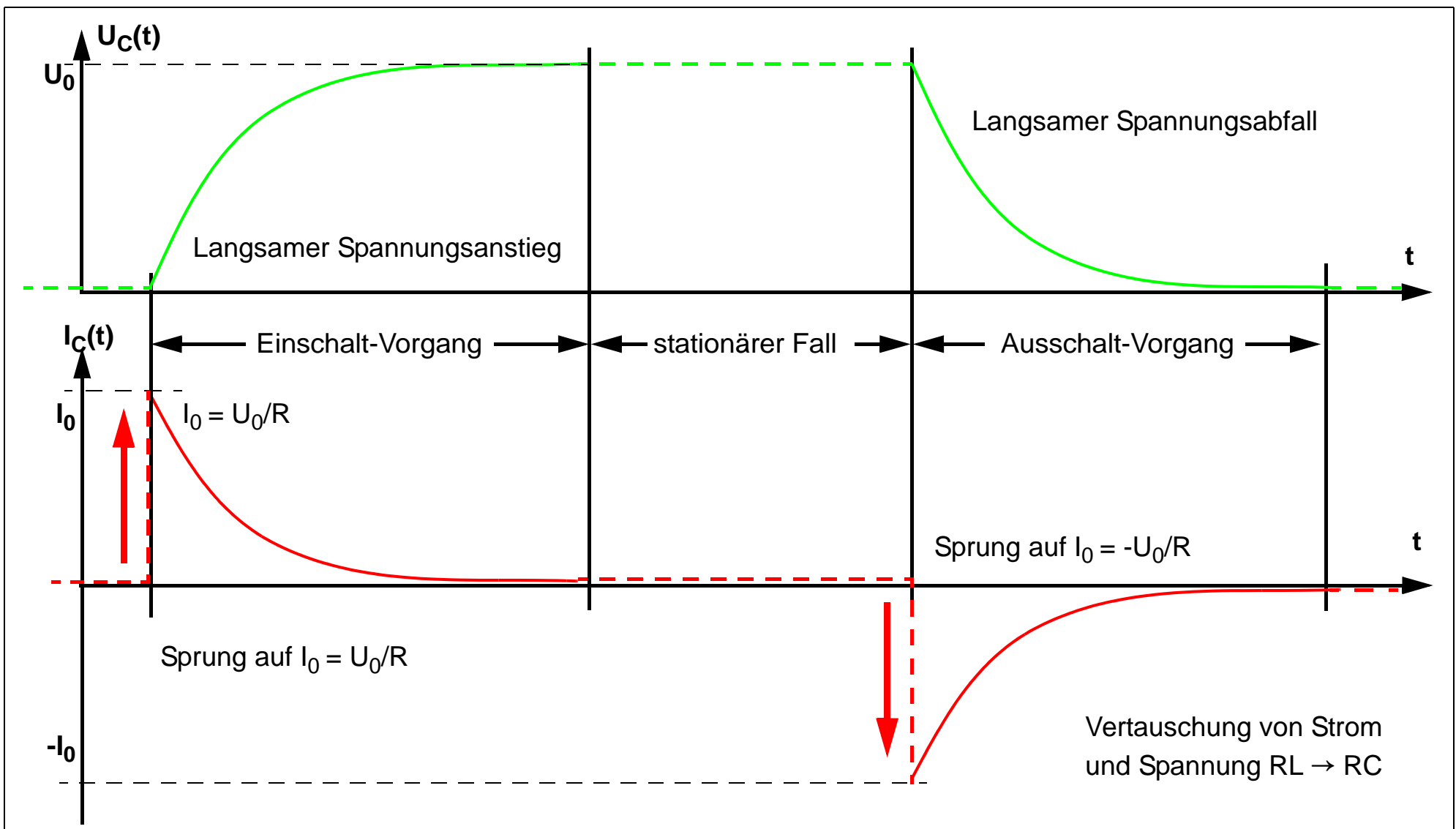
$$U_C(t) = U_0 \cdot \exp\left(\frac{-t}{R^*C}\right)$$

$$I_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot \exp\left(\frac{-t}{R^*C}\right)$$

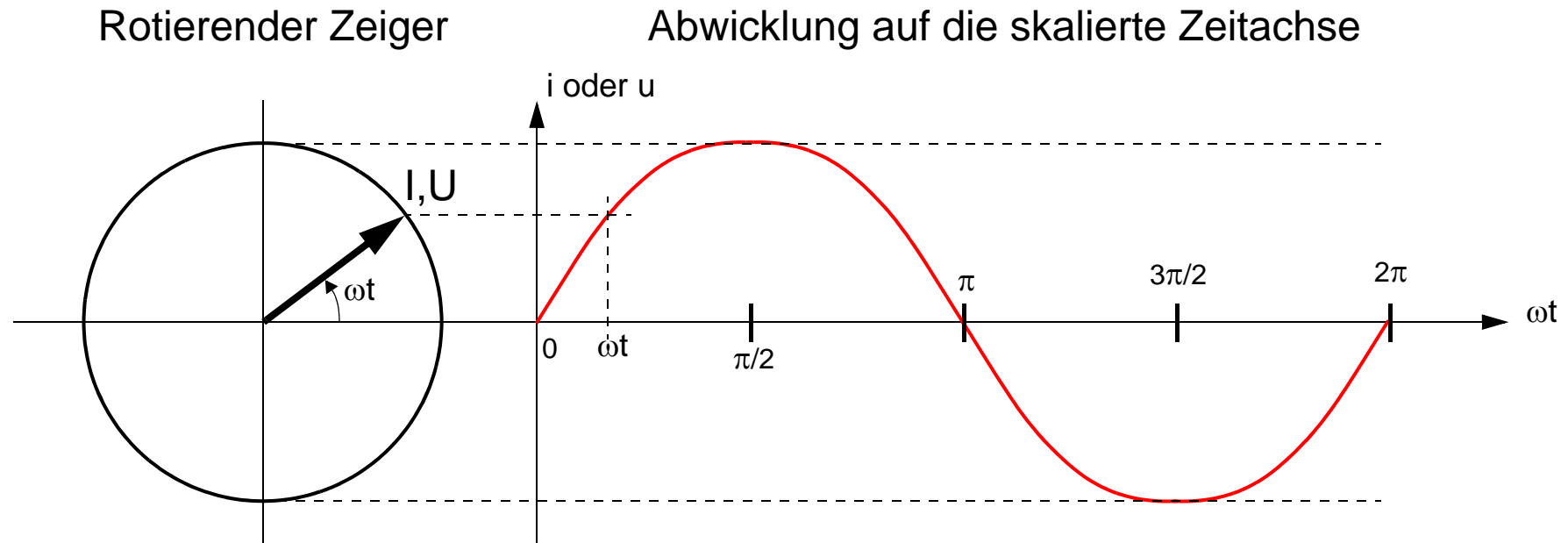
Dimensionsprobe für Zeitkonstante

$$\tau = R^*C [\Omega \text{AsV}^{-1}] = [\text{VA}^{-1} \text{AsV}^{-1}] = [\text{s}]$$

8.5.2 Gesamtlösung Kondensator



9. Wechselströme und ihre Darstellung



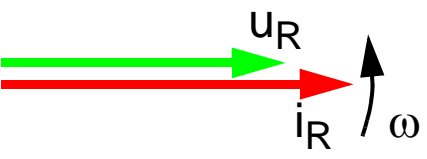
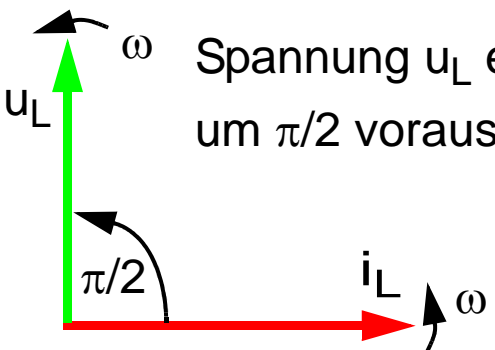
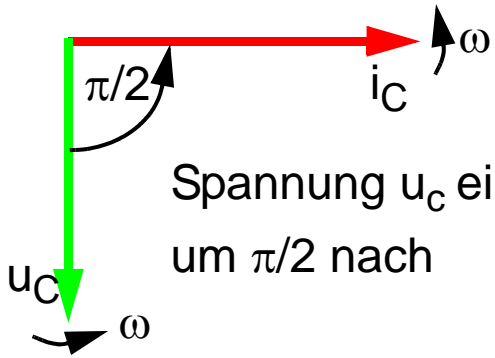
$i(t) = I \cdot \sin \omega t$, dabei ist i der momentane Strom, I sein Maximalwert

Entsprechend gilt für den Spannungsverlauf $u(t)$:

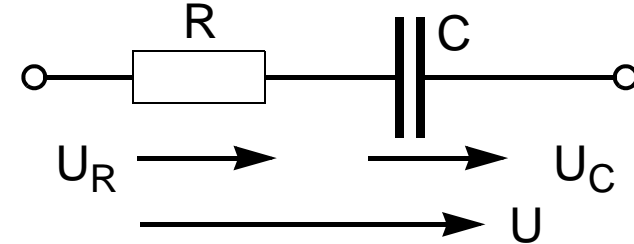
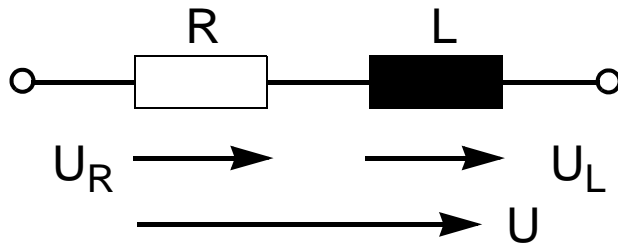
$u(t) = U \cdot \sin \omega t$, dabei ist u die momentane Spannung, U ihr Maximalwert,

$\omega = 2\pi \cdot f$ [s⁻¹] ist die Kreisfrequenz, d.h. wie oft läuft der Pfeil mit der Frequenz ω um

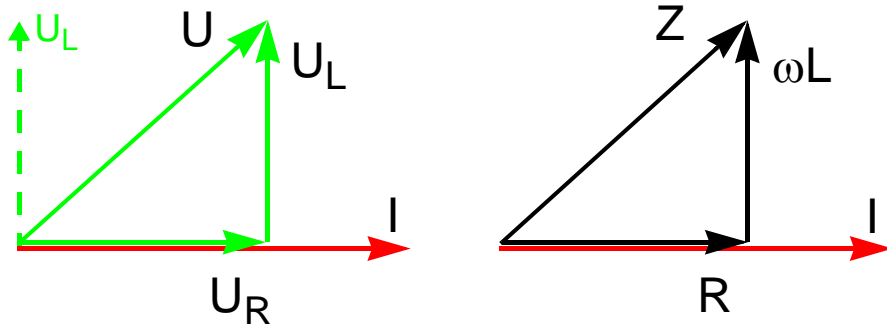
9.1 Wechselstromwiderstand von R, L, C

Widerstand R	Induktivität L	Kapazität C
$U = R \cdot I$ <p>Wechselstrom $i(t)$</p> $i(t) = I \cdot \sin \omega t$ $u(t) = U \cdot \sin \omega t$ <p>Beide Zeiger in Phase</p> 	$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI_L}{dt}$ <p>Wechselstrom $i(t)$</p> $i_L(t) = I \cdot \sin \omega t \quad \text{daraus } u_L(t)$ $u_L(t) = -\omega L \cdot I \cdot \cos \omega t = -U \cdot \cos \omega t$ <p>Hier ist $u_L(t) = R_L \cdot I$, somit</p> $R_L = \omega L \quad [s^{-1}VsA^{-1}] = [\Omega]$  <p>Spannung u_L eilt um $\pi/2$ voraus</p>	$I_c = C \frac{dU_c}{dt}$ <p>Wechselspannung $u(t)$</p> $u_c(t) = U \cdot \sin \omega t \quad \text{daraus } i_c(t)$ $i_c(t) = \omega C \cdot U \cdot \cos \omega t = I \cdot \cos \omega t$ <p>Nun ist $i_c(t) = u_c(t)/R_c$, somit</p> $R_c = 1/\omega C \quad [VA^{-1}s^{-1}s] = [\Omega]$  <p>Spannung u_c eilt um $\pi/2$ nach</p>

9.2 Anwendungen der Zeiger



Bezug ist immer die I-Achse, da der Strom in Phase bleibt. Widerstände werden immer auf die U-Achse bezogen, (sie sind komplex zu betrachten)

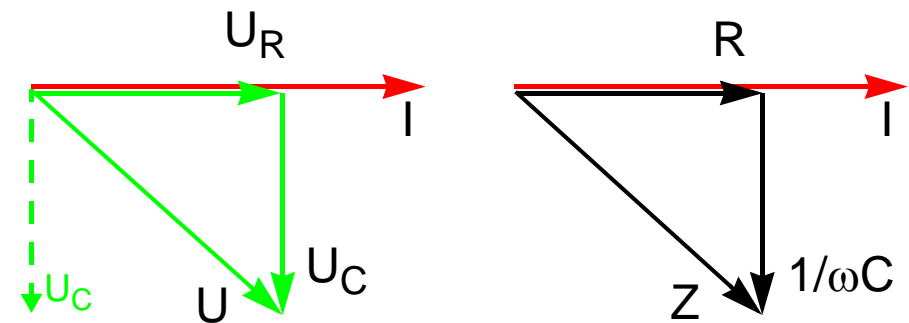


Wirkwiderstand $X_R = R$

Blindwiderstand $X_L = \omega L$

Scheinwiderstand $Z = \sqrt{(R^2 + (\omega L)^2)}$

Scheinspannung $U = \sqrt{(U_R^2 + U_L^2)} = I \cdot Z$



Wirkwiderstand $X_R = R$

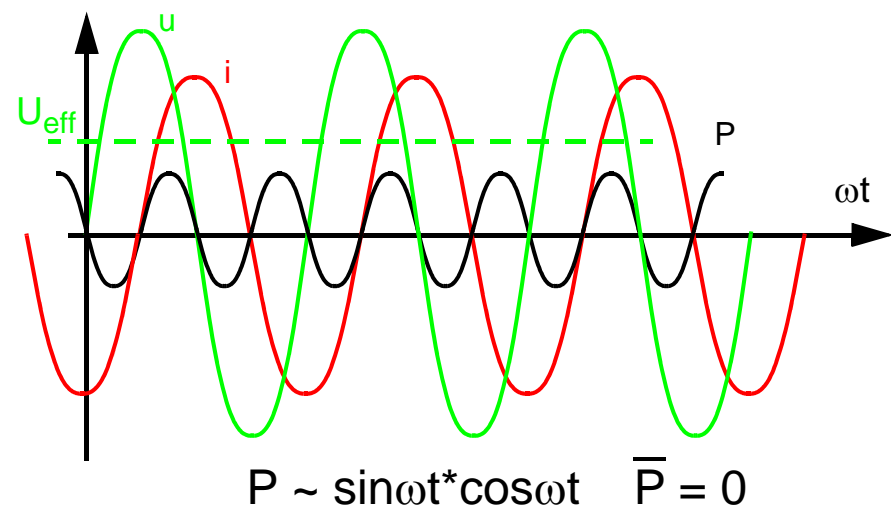
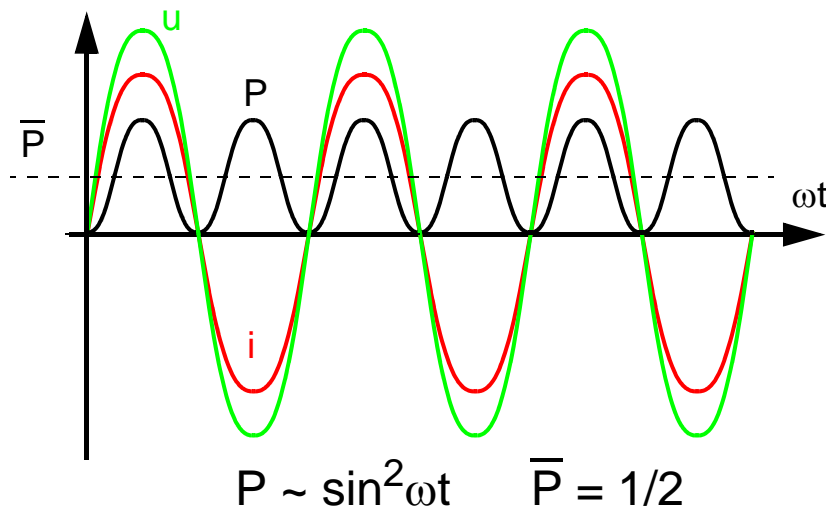
Blindwiderstand $X_C = 1/\omega C$

Scheinwiderstand $Z = \sqrt{(R^2 + (1/\omega C)^2)}$

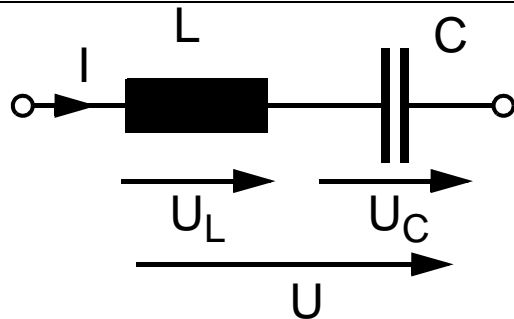
Scheinspannung $U = \sqrt{(U_R^2 + U_C^2)} = I \cdot Z$

9.3 Mittelwerte, Leistung

Aus $P = U \cdot I = U^2/R$ an einem ohm'schen Widerstand R ergibt sich für $u(t) = U \cdot \sin \omega t$
 $P = (U^2/R) \sin^2 \omega t$, da $\sin^2 \omega t$ oberhalb der t -Achse liegt und symmetrisch zu $1/2$ ist, hat
 diese Funktion einen Mittelwert von $\sin^2 \omega t = 1/2$. Die gemittelte Leistung \bar{P} an R ist
 $\bar{P} = 1/2(U^2/R)$. Legt man eine Gleichspannung zugrunde, die dieselbe Leistung erbringt,
 so ergibt sich durch Gleichsetzen $P = U_{\text{eff}}^2/R = 1/2(U^2/R)$, somit $U_{\text{eff}} = U/\sqrt{2}$ (diejenige
 Spannung, die die identische Leistung wie eine Gleichspannung ergibt)



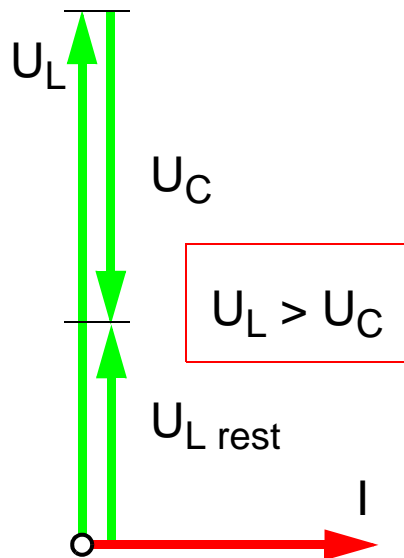
9.4 Der ideale Reihen-Schwingkreis



Wir legen einen Aufbau aus zwei idealen Blind-Widerständen
 X_L und X_C zugrunde (kein ohm'scher Widerstand vorhanden)

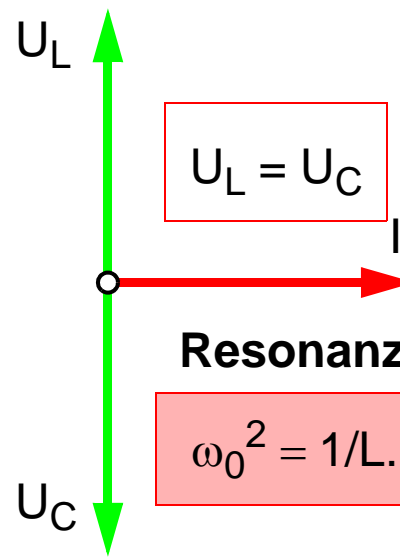
$$X_{L \text{ rest}} = X_L - X_C$$

$$X_{L \text{ rest}} = \omega L - (1/\omega C)$$



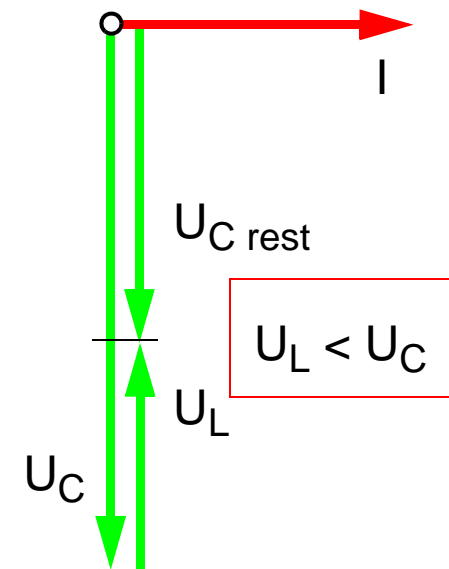
$$X_C = X_L$$

$$Z_0 = (1/\omega C) = \omega L$$

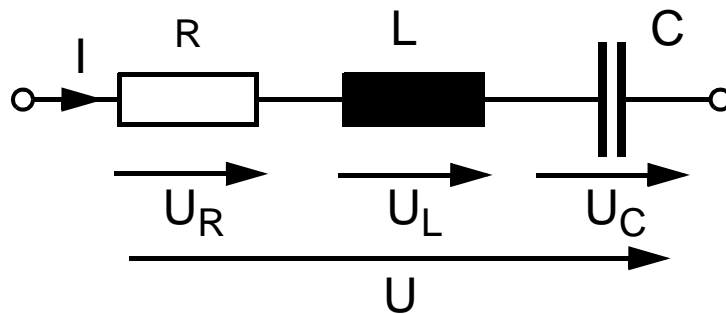


$$X_{C \text{ rest}} = X_C - X_L$$

$$X_{C \text{ rest}} = (1/\omega C) - \omega L$$



9.5 Realer Schwingkreis

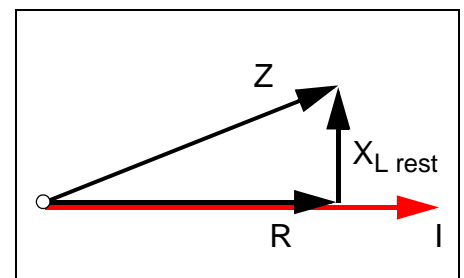
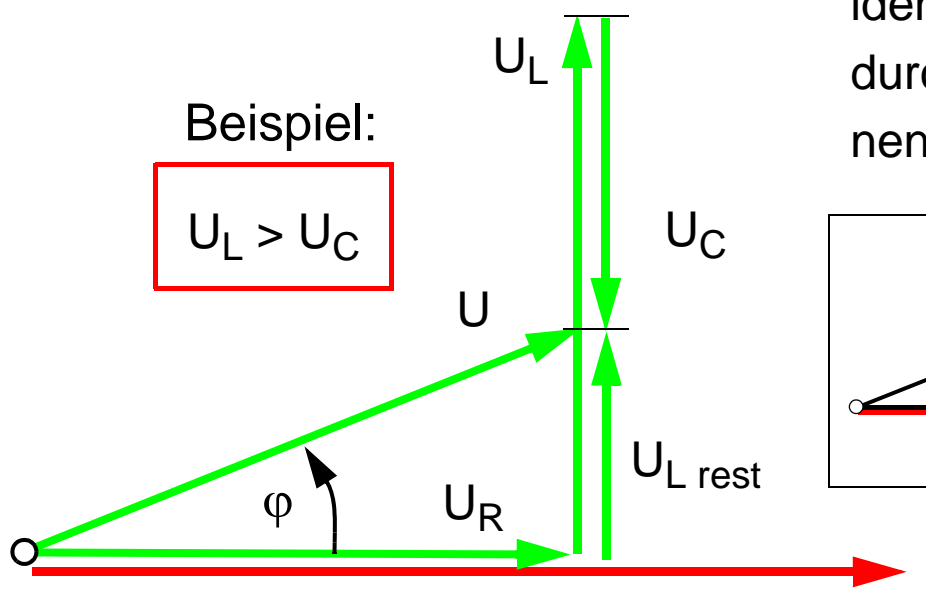


Diese Anordnung hat einen zusätzlichen ohm'schen Widerstand R.

Bestimmend ist der identische Strom I durch alle Komponenten R, L, C

Beispiel:

$$U_L > U_C$$



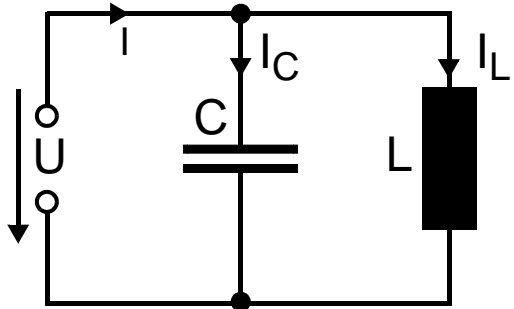
$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L - (1/\omega C)}{R}$$

Phasen-
winkel

$$Z = \sqrt{[\omega L - (1/\omega C)]^2 + R^2}$$

Schein-
Wider-
stand

9.6 Der ideale Parallel-Schwingkreis

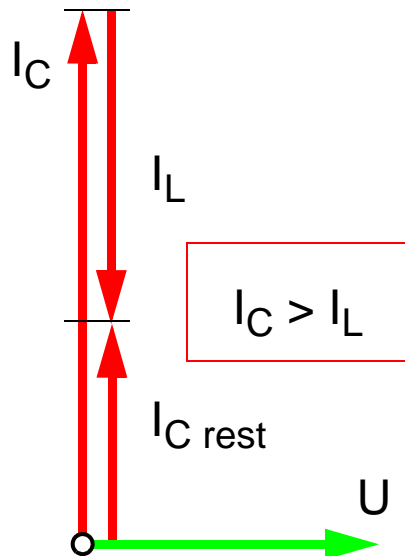


Wir legen hier einen Aufbau aus zwei idealen Blind-**Leitwerten**
 Y_L und Y_C zugrunde (kein ohm'scher Widerstand vorhanden)

Man beachte die Orientierung von U zu I

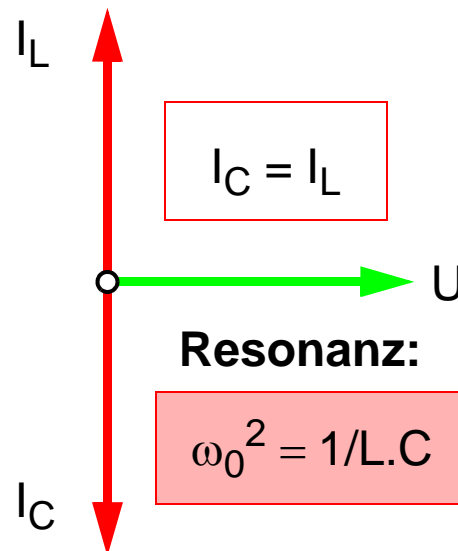
$$Y_{C \text{ rest}} = Y_C - Y_L$$

$$Y_{C \text{ rest}} = \omega C - (1/\omega L)$$



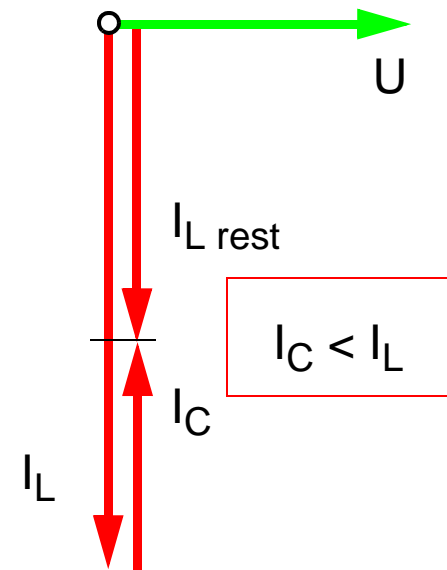
$$Y_C = Y_L$$

$$Y_0 = \omega C = 1/\omega L$$

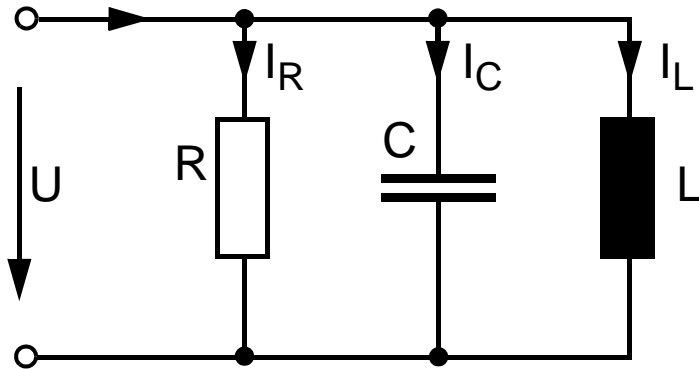


$$Y_{L \text{ rest}} = Y_L - Y_C$$

$$Y_{L \text{ rest}} = (1/\omega L) - \omega C$$



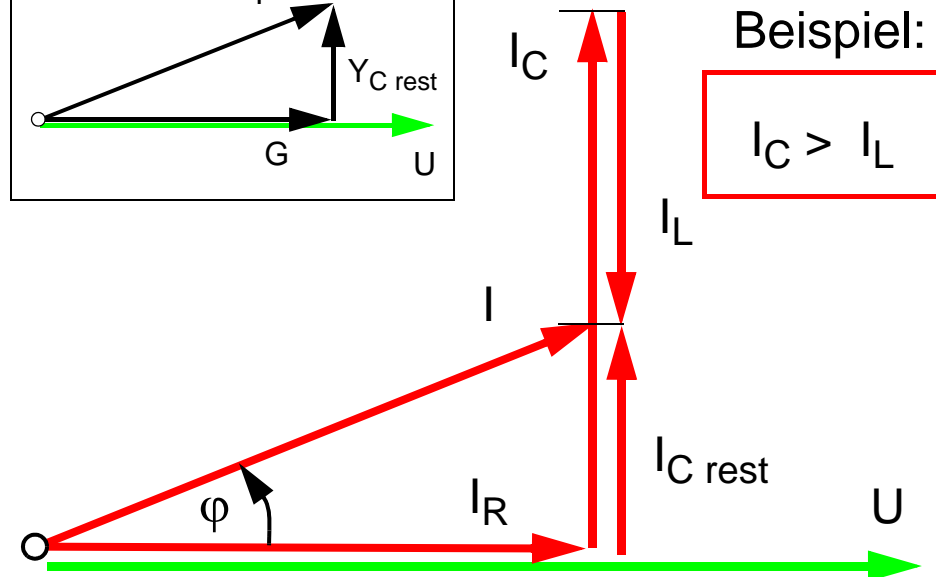
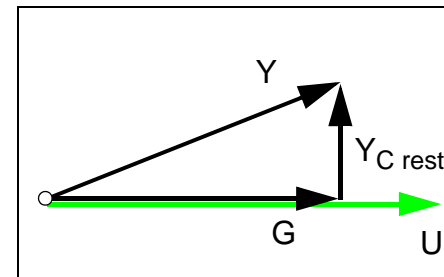
9.7 Der reale Parallel-Schwingkreis



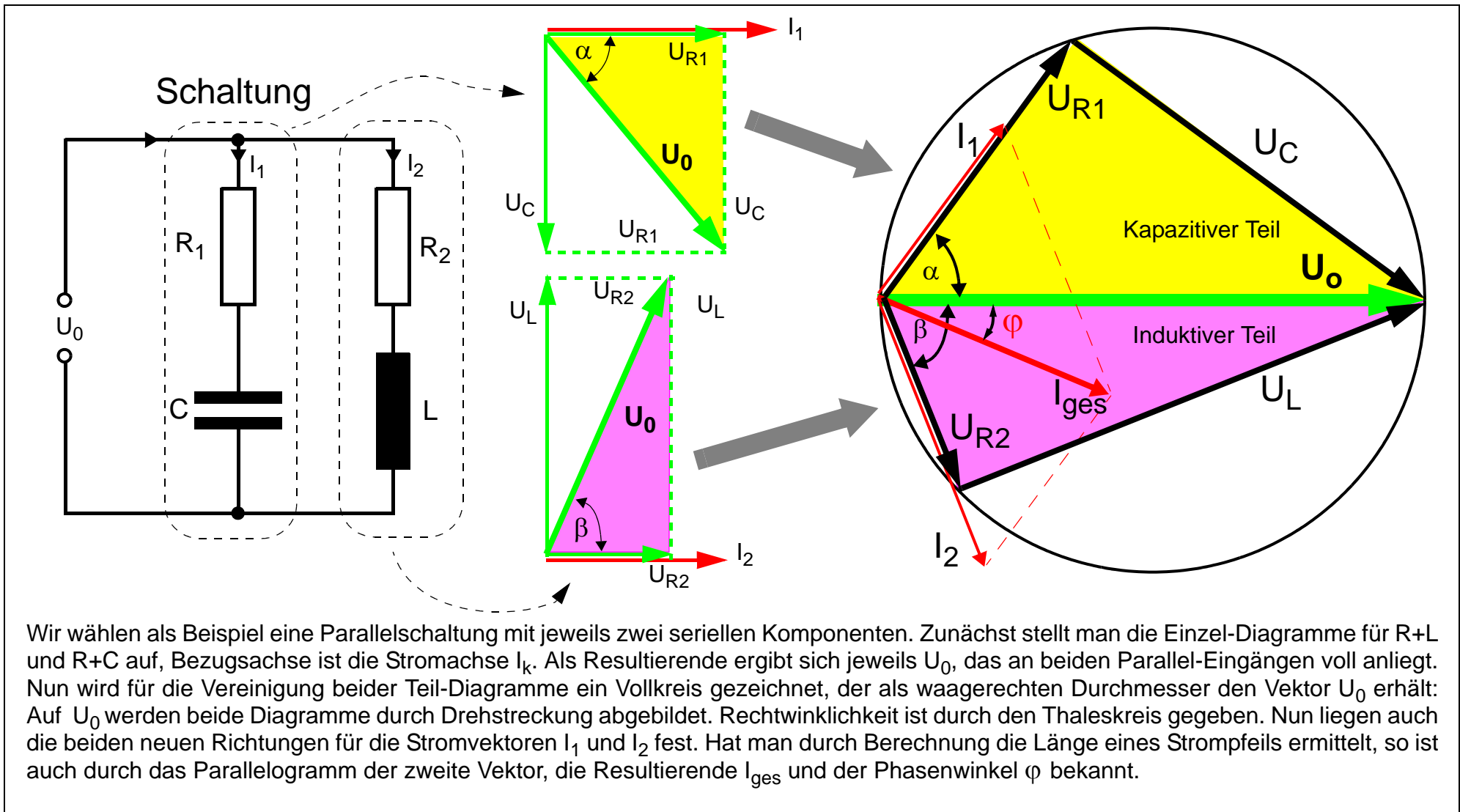
Bei diesem Beispiel ist die Rolle von Strom und Spannung vertauscht, da die **Ströme** durch die Komponenten bestimmt werden und an allen Bauteilen die identische Spannung U abfällt. Wir arbeiten mit Leitwerten Y und $G = 1/R$

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega C - (1/\omega L)}{G}$$

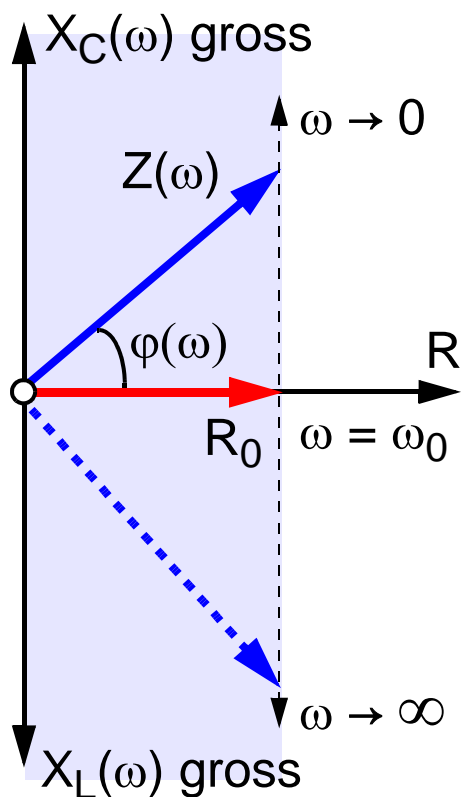
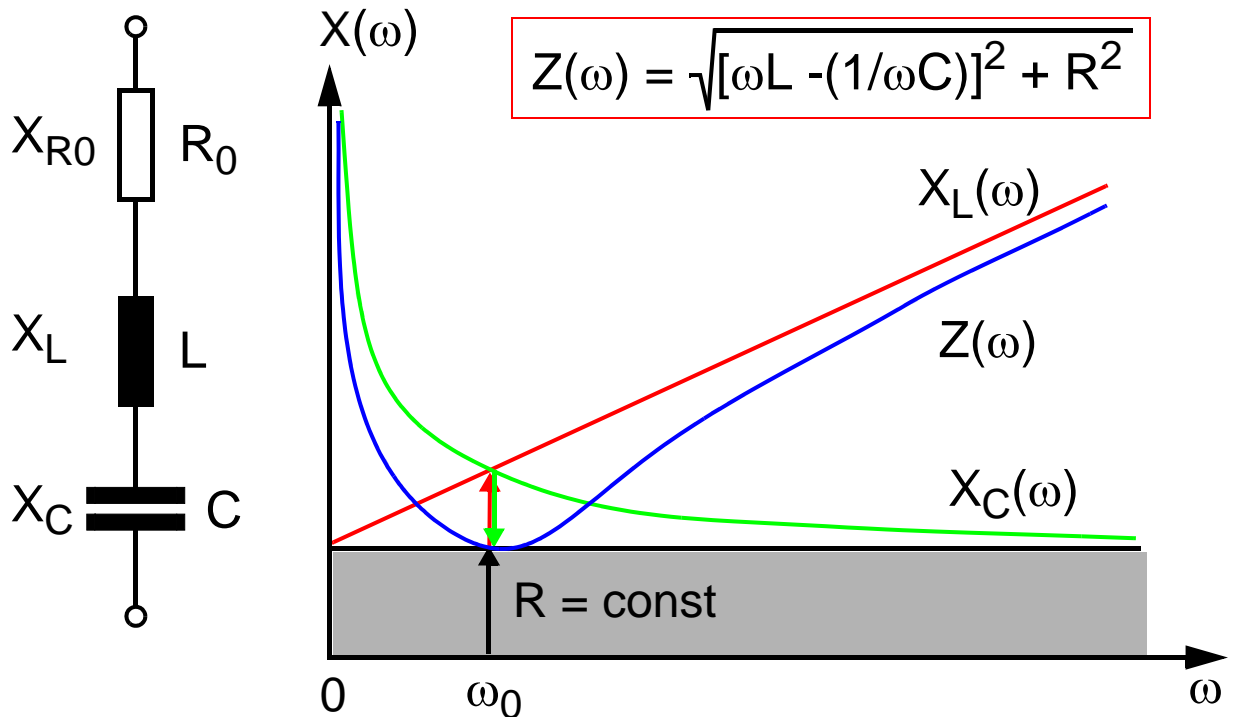
$$Y = \sqrt{Y_{C \text{ rest}}^2 + G^2} = \sqrt{[\omega C - (1/\omega L)]^2 + G^2}$$



9.8 Zusammengesetzte Netzwerke



9.9 Ortskurven für $Z(\omega)$



$Z(\omega)$ überstreicht den mit R_0 gebildeten Streifen vollständig.
Bei Resonanz ist $\vec{X}_L - \vec{X}_C = 0$ und es bleibt nur das frequenz-unabhängige R_0 übrig.

10. Grundlagen der Halbleiter-Physik

Heutige Rechner sind in ihrem Digitalteil aus höchstintegrierten Bauteilen aus Silizium aufgebaut. Wir werden daher folgende Vorgehensweise zum Verständnis des Aufbaus und der Wirkungsweise wählen:

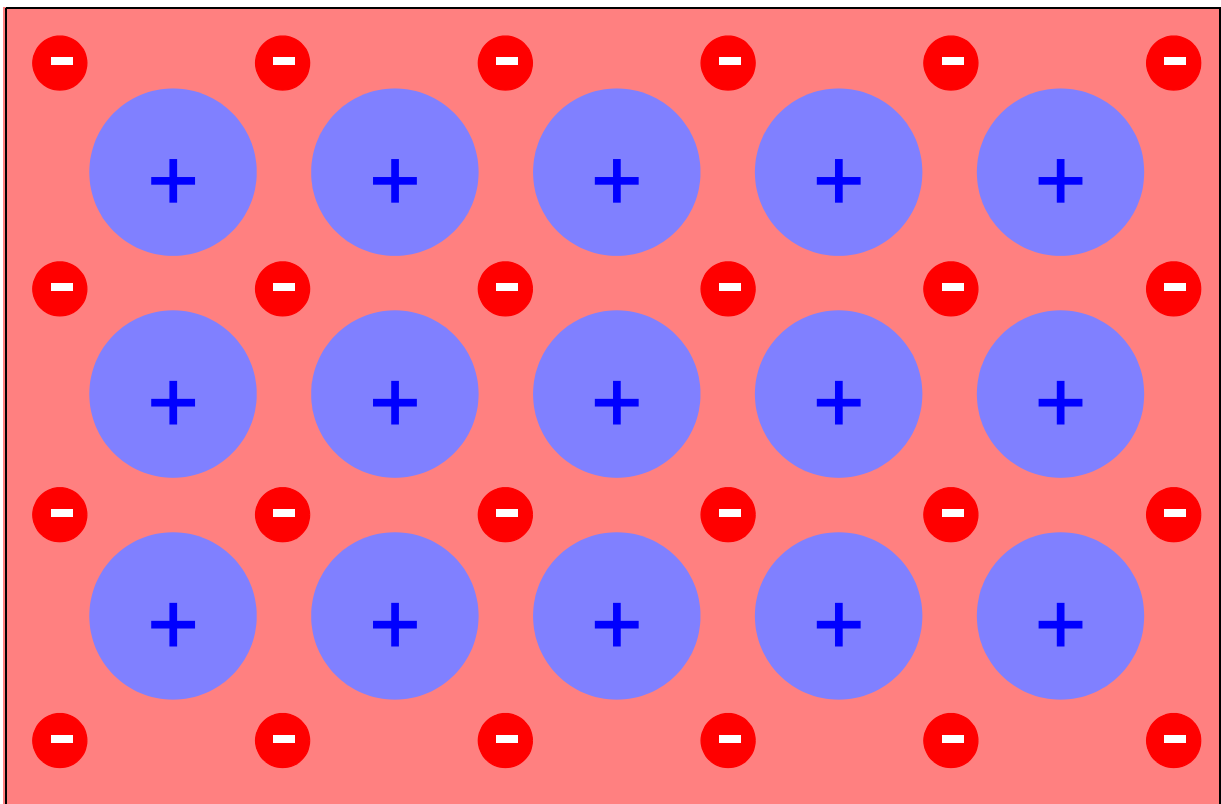
- Modell der metallischen Leitung (zur Vorbereitung beim Halbleiter)
- Etwas Halbleitergeschichte
- Das freie Elektron im Vakuum, Potentialtopf-Modell, Entartung der Elektronen
- Das Bändermodell und die Fermi-Energie der Elektronen. Was ist ein Halbleiter?
- Periodensystem der Elemente, Schalen-Modell, Gitter-Modell
- Dotierung von Halbleitern, Band-Abstände wegen Änderung der Fermi-Energie
- Reinheitsgrad und Reinigung des Ausgangs-Materials
- Störstellen-Halbleitung, Temperatur-Abhängigkeiten
- Grundlegende Betrachtungen zur Diode: Bandverbiegung, Sperrschicht
- Der Transistor und seine Varianten
- Höchst-Integration, Einkristalle, Maskieren, Lithografie, Ätzen, Metallisieren
- Bipolar, MOS, NMOS, PMOS, CMOS

10.1 Halbleiter-Geschichte

Wann	Wer	Was
1842	Winkler	Ge (Germanium!) in Freiberg/Sachsen entdeckt
1874	F.Braun	Gleichrichterwirkung von PbS-Kontakten
1879	Hall	Hall-Effekt
1885	C.Fritts	Gleichrichterwirkung von FeS-Kontakten
1899	F.Braun	Kristalldetektor als HF-Gleichrichter
1906	Pickard	Erster Si-Detektor
1915	Benedicks	Erster Ge-Detektor
1925/30	Dresser und Grondahl	Se und Cu ₂ O als Flächengleichrichter
1938	Schottky, Spenke	Halbleiterkontakte
1947	Bardeen, Brattain, Shockley	Erfindung des Spitzentransistors
1950	Shockley	Theorie des p-n-Übergangs, Flächentransistor
1952	Shockley	Sperrschicht-FET
1958	Esaki	Tunneldiode
1958	Kilby	Erste integrierte Ge-Schaltung
1959	Noyce	erste integrierte Si-Planarschaltung
1961		GaAs-LED
1962		Erste TTL-Schaltkreisfamilie
1963/65	Heilmann	MOS-FET
1967		Start der NMOS-Technologie
1974		Erster Mikroprozessor
1985	Feynman	Theorie des Quantencomputers
1988	Baibich	Giant Magnetoresistance (MRAM)

10.1 Metall-Elektronen

- Elektronen sind zunächst fest an den Atomrumpf gebunden (Ladungs-Gleichgewicht)
- Beim Zusammenschluss zum Festkörper (gilt auch für Schmelzen) bildet sich ein neuer Zustand aus, bei dem bei vielen leitenden Stoffen (also nicht nur bei den Elementen) ein Koordinations-Phänomen aus Atomrümpfen und einem Elektronen-See gebildet wird (eine Art „Leim“ aus „freien“ Elektronen (Aussen-Elektronen)).



Ortsraum: Elektronen-“See“ mit Atomrümpfen

- Diese Elektronen sind frei beweglich im Feld der Atomrümpfe (Reaktion auf **E**-Feld = Elektronenfluss)
- Das Gesamtgebilde ist schwingungsfähig bei Temperatur-Erhöhung (Phononen). Thermische Energie $W = kT$ mit der Boltzmann-Konstanten $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ [VAs/K]

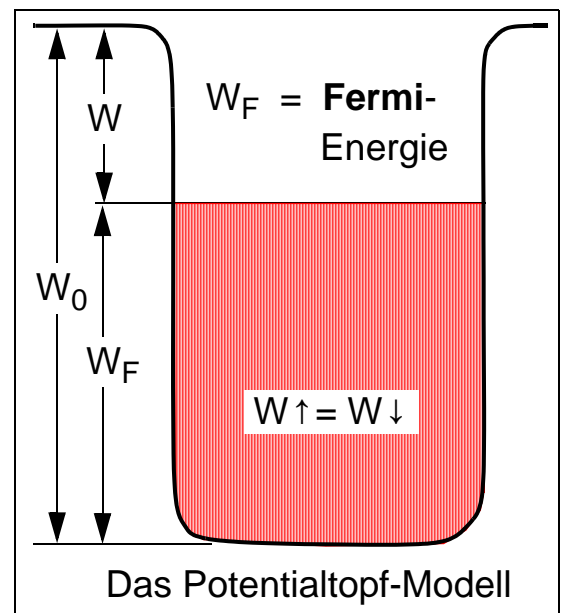
10.2 Der Energie-Raum

Gleichsetzung von $W = e \cdot \Delta U = k \cdot \Delta T$

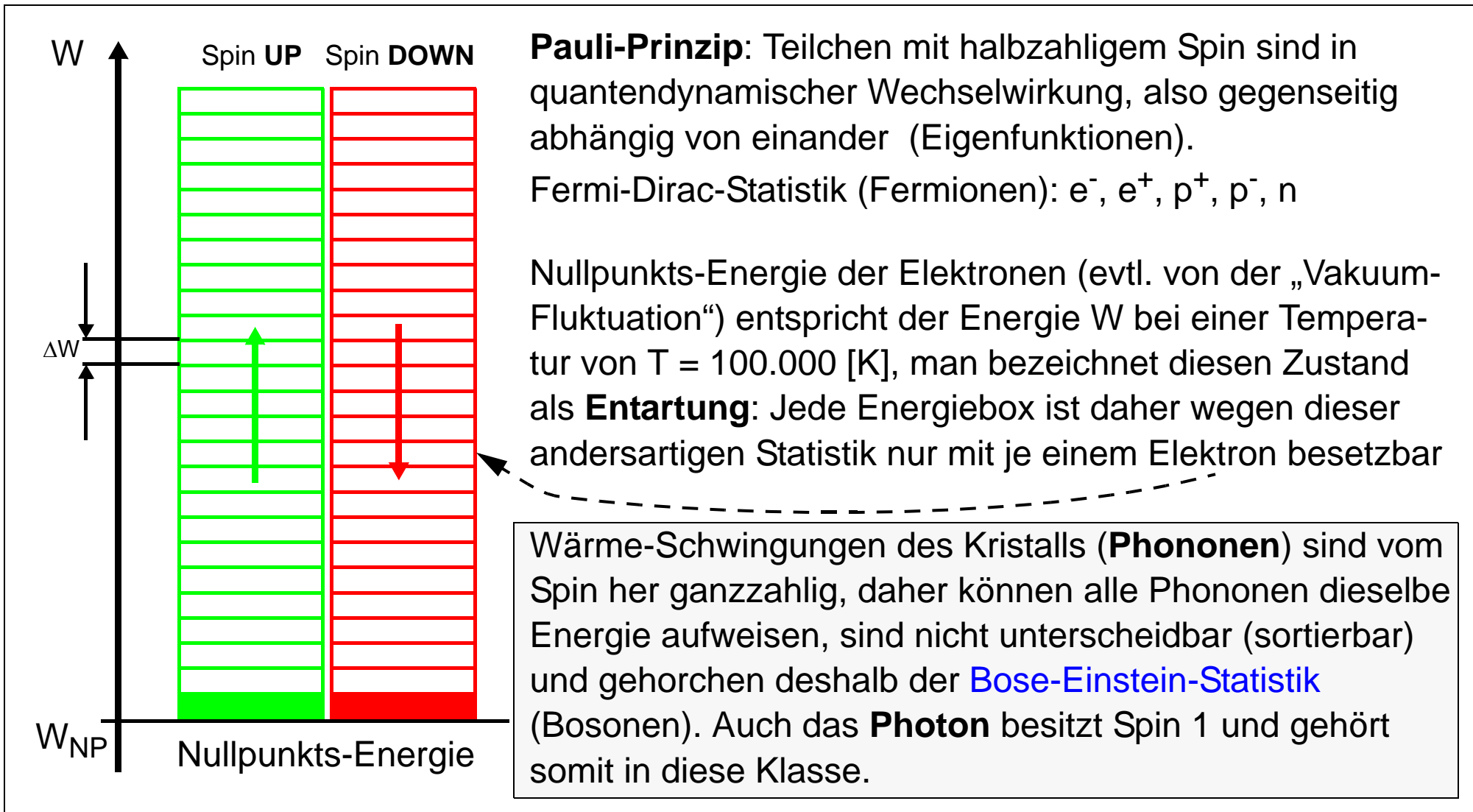
- $1 \text{ [eV]} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \text{ [AsV]} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ [J]}$
- $k \cdot \Delta T = 1.38066 \cdot 10^{-23} \cdot 1 \text{ [VAsK/K]} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ [J]}$
- Daraus folgt: $1 \text{ [eV]} = 11.604 \text{ [K]}$ oder $1 \text{ [meV]} = 11,6 \text{ [K]}$
- Damit können Energie-Differenzen in [eV] sehr einfach in Temperatur-Differenzen ΔT [K] umgewandelt werden

Der Potentialtopf (Teilchen-Modell)

- Das sogenannte „freie“ Elektron oder Elektronengas ist eine Idealvorstellung, die allerdings sehr gut für viele Effekte einsetzbar ist. Speziell beim Festkörper.
- Die Elektronen haben eine identische Ruhemasse m_e , eine kinetische Energie W in [eV] (oder kT) und einen Eigendreh-Impuls (Spin) mit der Orientierung „nach oben“ $= +1/2 (\uparrow)$ oder „nach unten“ $= -1/2 (\downarrow)$. Damit können bei identischer Energie W zwei Elektronen unterschieden werden (Pauli-Prinzip). Dazu sperrt man sie in eine gemeinsame „Zelle“ identischer Energie W ein
- Im „freien Spiel der Kräfte“, d.h. wenn die Elektronen sich selbst überlassen werden, besetzen sie von unten nach oben im Energieraum (Potentialtopf) jede Zelle bis zu einer Obergrenze, die man Fermi-Grenze W_F oder **Fermi-Kante** nennt. W_0 ist die Austrittsarbeit der beiden Elektronen $\uparrow \downarrow$ am untersten Level der Energie, W die Energie zum Austritt aus dem Festkörper (Verlassen des Kristallverbunds des Festkörpers).

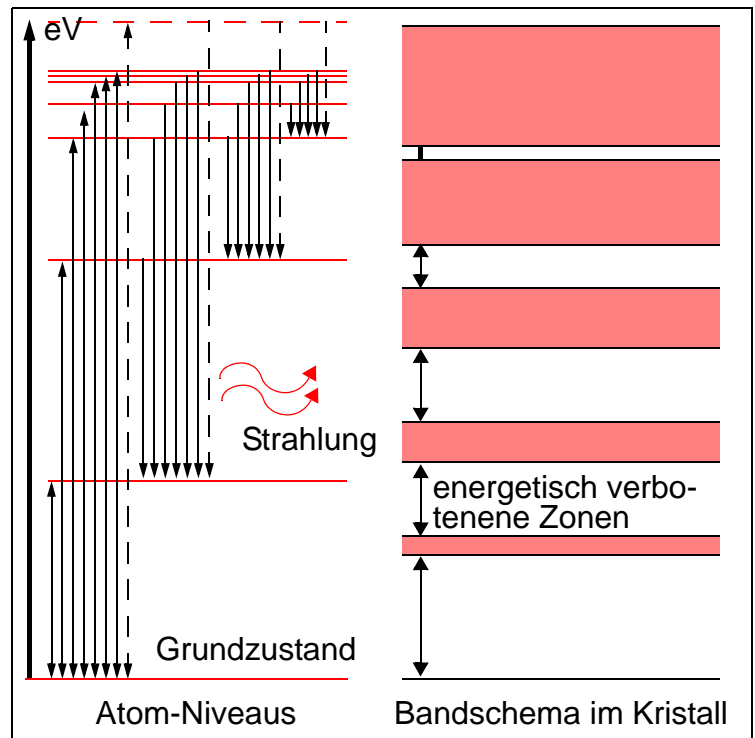


10.2.1 Entartung der Elektronen

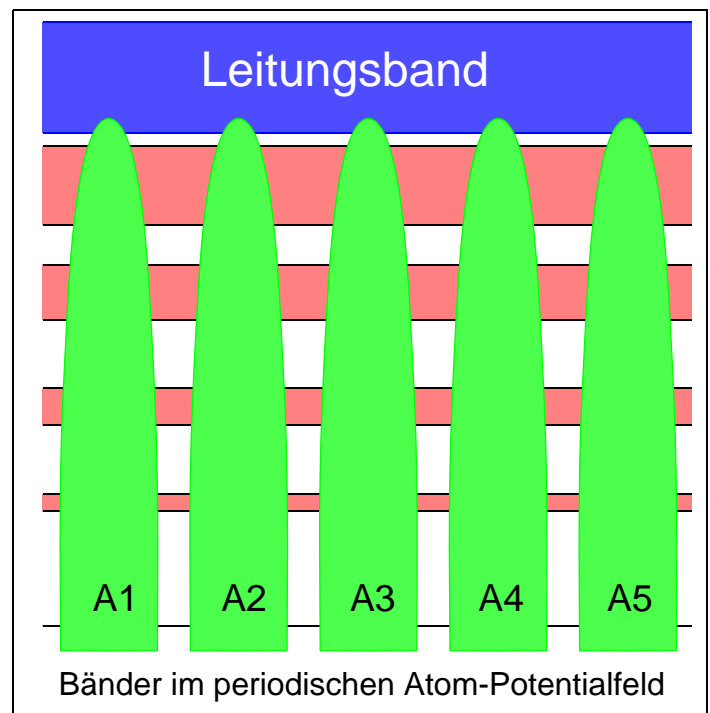


10.2.2 Das Bändermodell

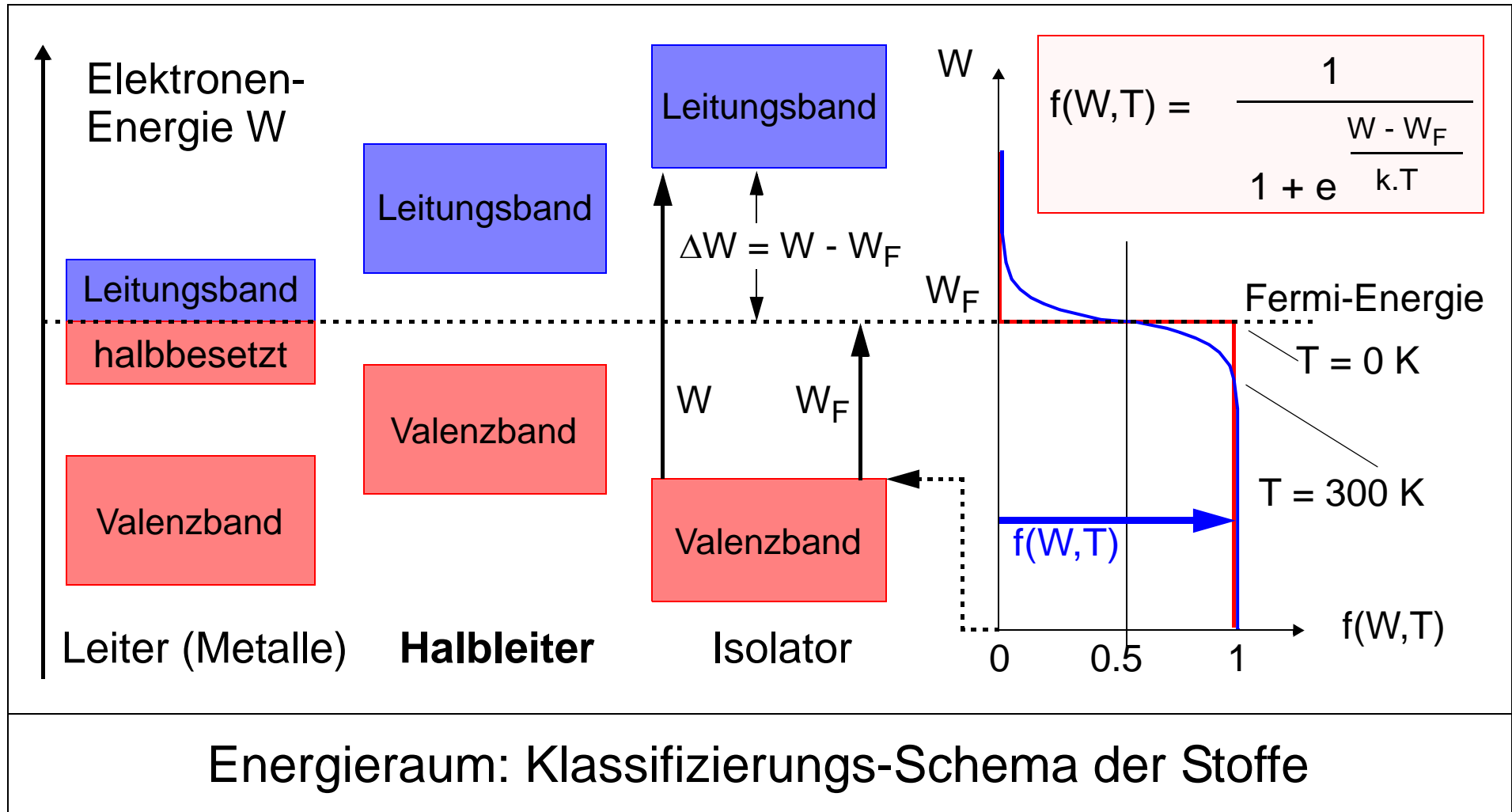
Beim Einbau in einen Festkörper wird das Modell des Potentialtopfs massiv modifiziert (Wellen-Charakter) vom Energieschema des Einzel-Atoms mit seinen diskreten Zuständen zu einem Zerfall in mehrere, energetisch getrennte Bänder. Diese Bänder liegen dann im periodischen Potentialfeld des Festkörpers, wodurch die Beweglichkeit der Elektronen soweit eingeschränkt wird, dass nur das oberste Band aus dem Potential-Gebirge herausragt.



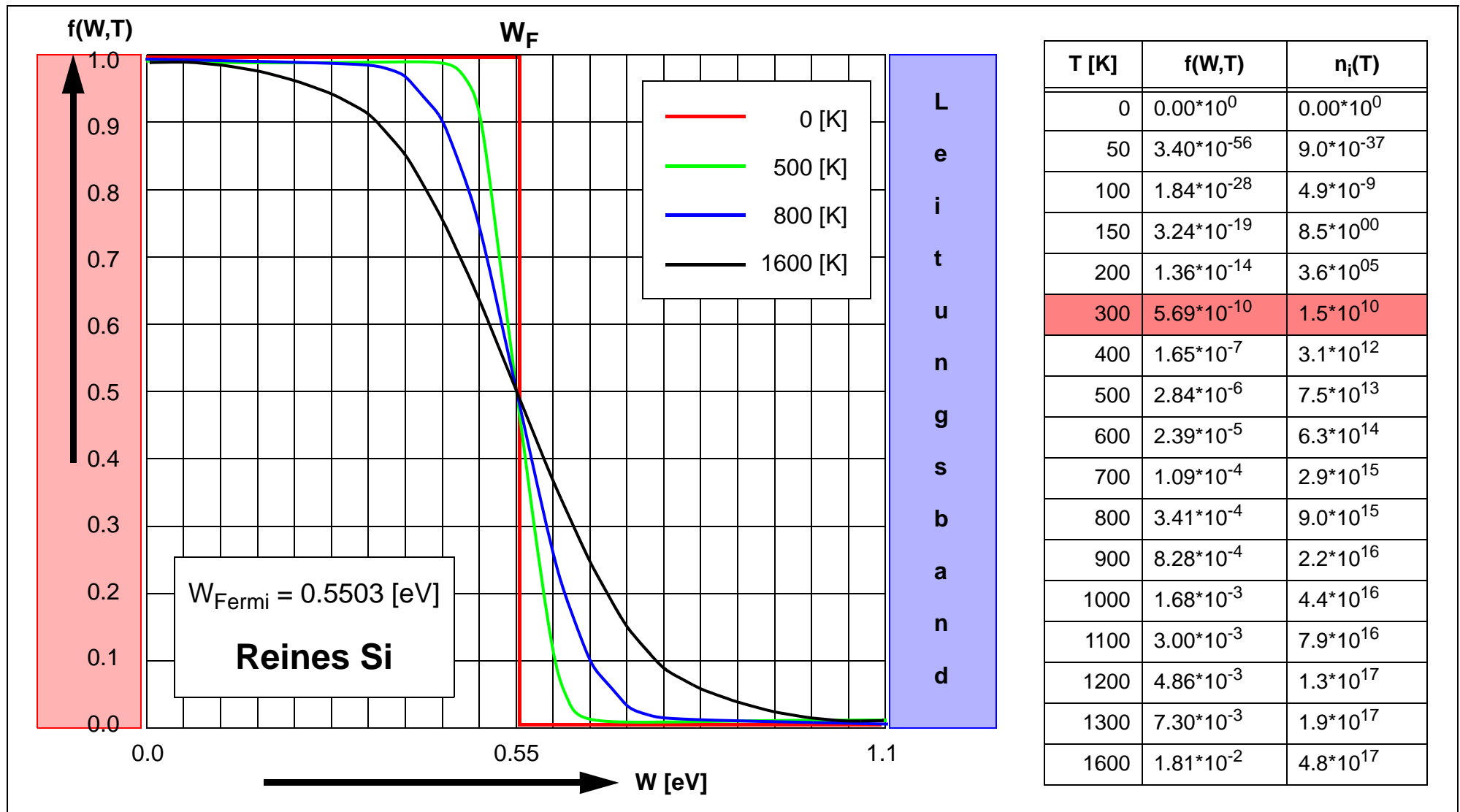
Dies bedeutet, dass nur in diesem Band eine durchgängige Elektronen-Bewegung stattfinden kann, daher wird es das **Leitungsband** genannt. Für eine gute Leitung sollte das Leitungsband höchstens zur Hälfte mit Elektronen aufgefüllt sein (energetische „Anlaufstrecke“ ohne nennenswerte Zusammenstöße).



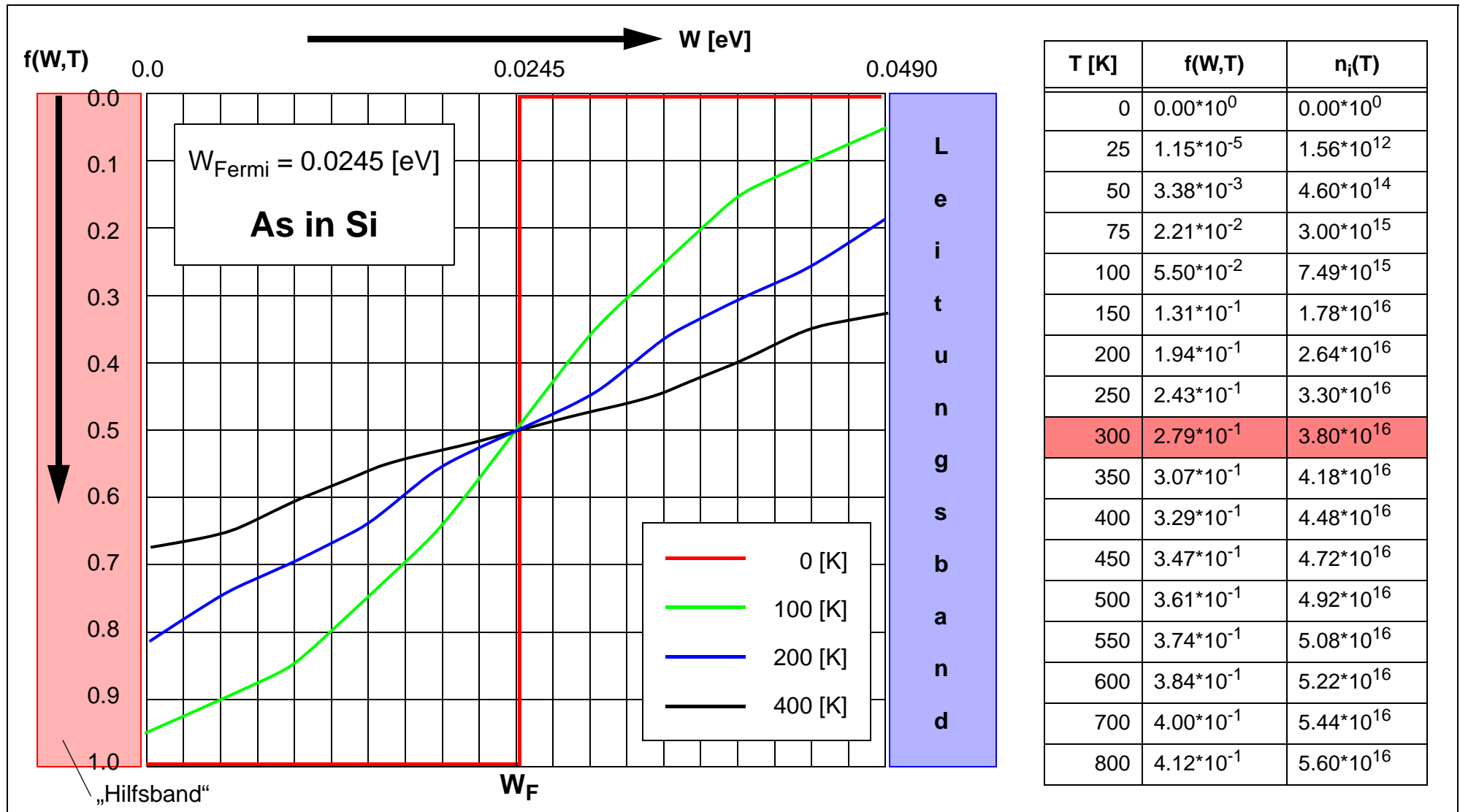
10.3 Erweiterte Grundlagen (alle Stoffe)



10.4 Fermi-Verteilung von Silizium



10.5 Fermi-Verteilung von As in Si

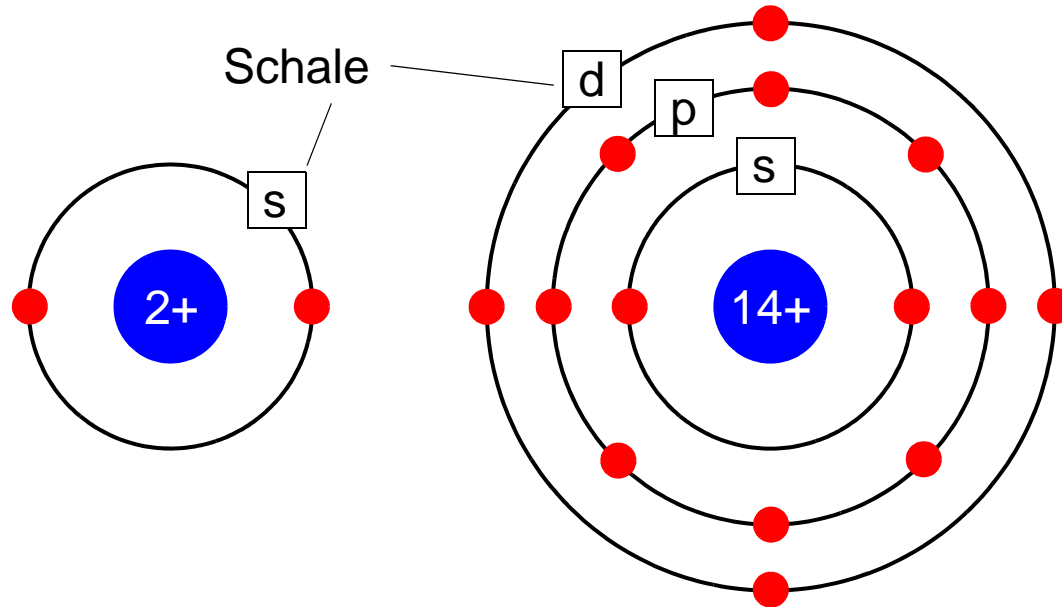


10.6 Das Periodensystem der Elemente

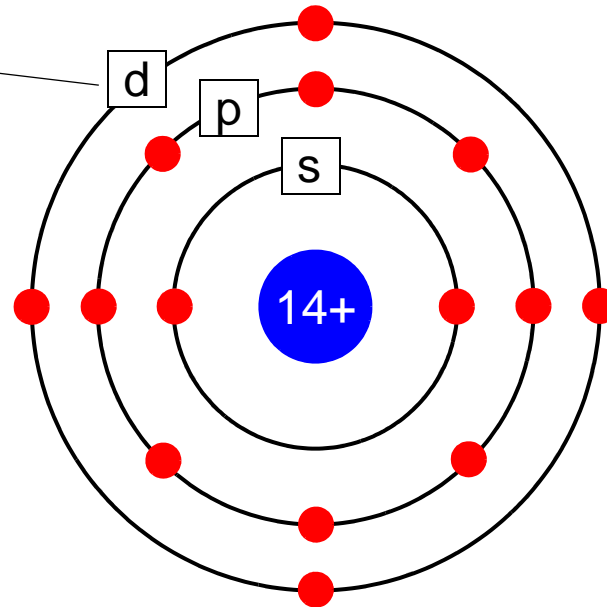
Anzahl der Schalen	Gruppe mit					
	3 Valenz-Elektronen		4 Valenz-Elektronen		5 Valenz-Elektronen	
	IIIa	IIIb	IVa	IVb	Va	Vb
2		5 B		6 C		7 N
3		13 Al		14 Si		15 P
4	21 Sc		22 Ti		23 V	
4		31 Ga		32 Ge		33 As
5	39 Y		40 Zr		41 Nb	
5		49 In		50 Sn		51 Sb

Das Periodensystem (Mendelejeff/L.Mayer 1869) ordnet alle chemischen Elemente nach steigenden Ordnungszahlen (i.A. auch nach steigendem Atomgewicht = Masse von $6.0221367 \cdot 10^{23}$ Teilchen (Avogadro'sche Zahl, N_A) derselben Atomsorte). Dabei ergibt sich der Atomaufbau aus der Position des Elements in der Tabelle (und der betr. Gruppe): Die Ordnungszahl gibt die Zahl von Protonen im Kern und der Elektronen in der Hülle an, wobei die Elektronen im Bohr'schen Atommodell auf geordneten Bahnen umlaufen (genügt für unsere Betrachtungen). Bei der Kondensation zum Festkörper bestimmen die äussersten Elektronen die Bindungsverhältnisse (= Valenzen) über die „Wertigkeit“. In einer aus der Chemie stammenden Vorstellung arbeitet man mit „Valenz-Ärmchen“, die sich gegenseitig festhalten. Die Valenz-Elektronen besitzen i.A. eine äussere, eigene Schale. Innere Schalen sind meist aufgefüllt.

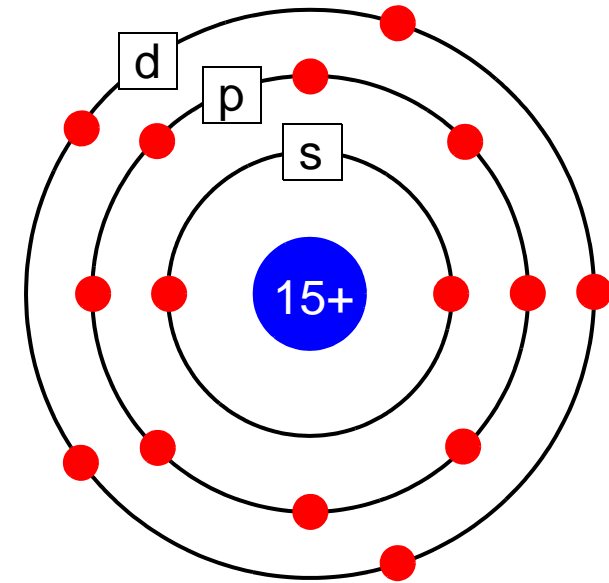
10.7 Schalen-Modell des Atoms



Helium (2 He)
2 Elektronen
Edelgas



Silizium (14 Si)
2 + 8 + 4 Elektronen
vierwertig

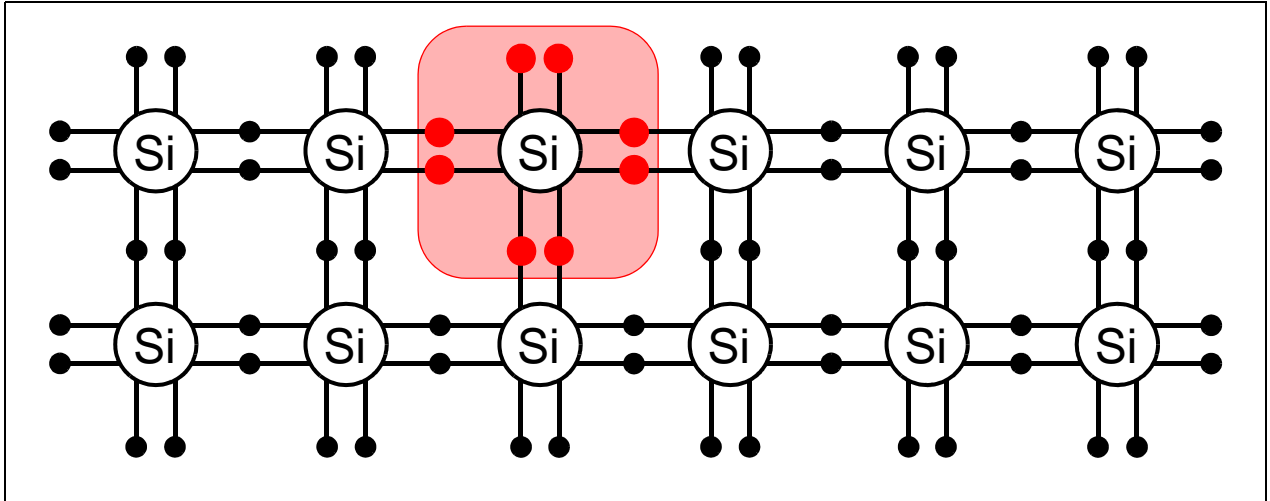


Phosphor (15 P)
2 + 8 + 5 Elektronen
fünfwertig

Anordnung in den Elektronen-Schalen ist immer $s = 2$, $p = 8$ ($2 + 6$), $d = 18$ ($2 + 6 + 10$),
 $f = 2 + 6 + 10 + 18$ (? Transurane)

10.8 Gittermodell (Teilchen)

Die Zugehörigkeit zur Gruppe im Periodensystem ergibt die Zahl der „Valenz-Elektronen“, die den Kristalltyp im Festkörper mitbestimmen



Im obigen Beispiel schliessen sich die Si-Atome (hier flächig) zu einem Verbund zusammen, bei dem jedes Si-Atom je vier Elektronen mit seinen vier Nachbarn austauscht. Dadurch wird die **Edelgas**-Konfiguration mit einer abgesättigten Schale von je acht Elektronen gebildet. Die Valenz-Elektronen sind relativ fest gebunden, sodass bei Raumtemperatur keine Leitung stattfinden kann.

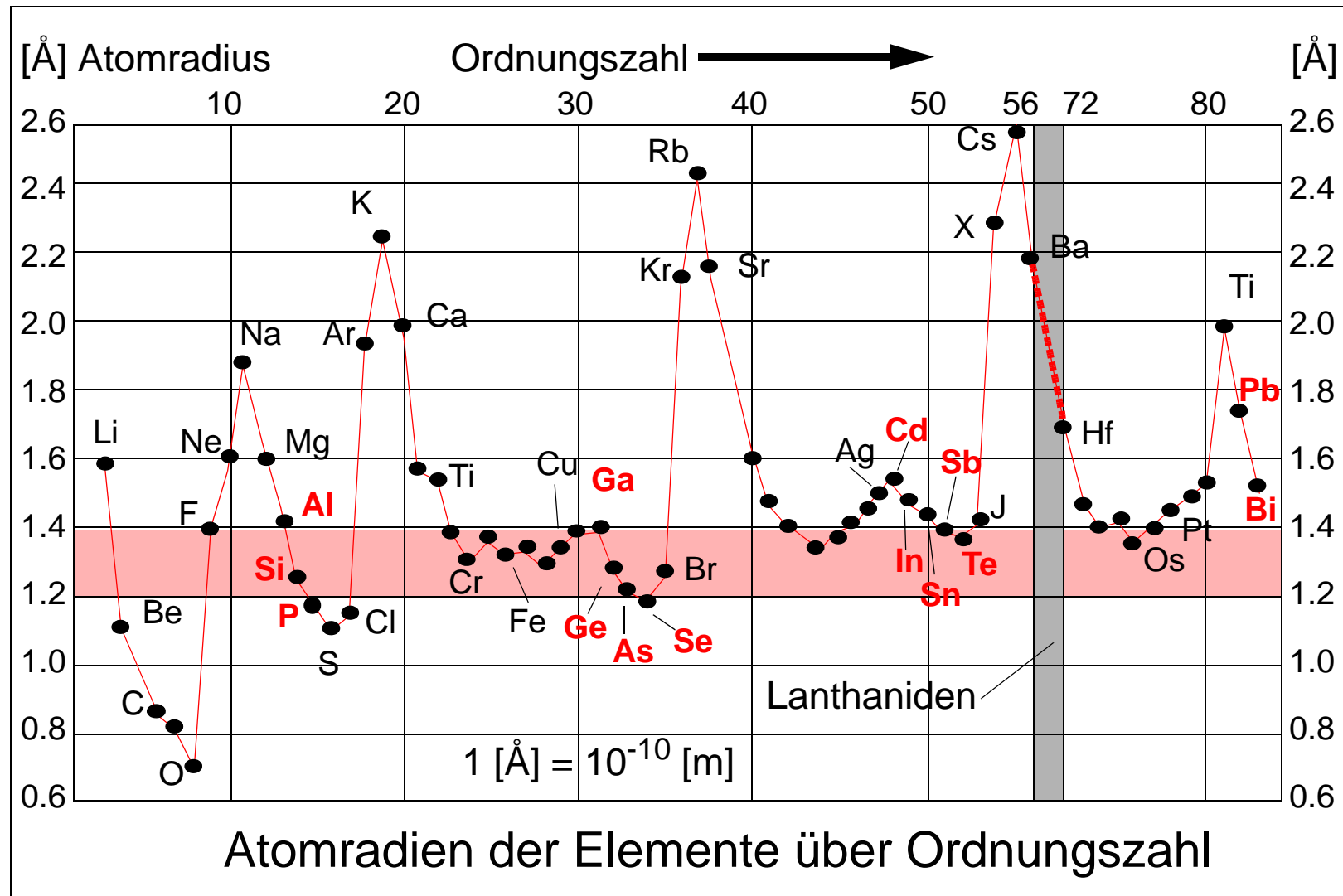
Abhilfe: Man schafft „Störstellen“ im Kristall. Diese können sein.

- Punktförmige Störstellen: Fremd-Atome, Eingestrahktes Licht (Photonen), Kristall-Temperatur (Gitterschwingungen = Phononen)
- Linienförmige Störstellen: Beim Vergießen des Kristalls, muss vermieden werden
- Flächenförmige Störstellen: Oberflächen mit ungesättigten Valenzen, Abhilfe durch „Versiegeln“ der Oberfläche
- Räumliche Störstellen: Stapelfehler beim Kristallwachstum, kontrollierte Herstellung

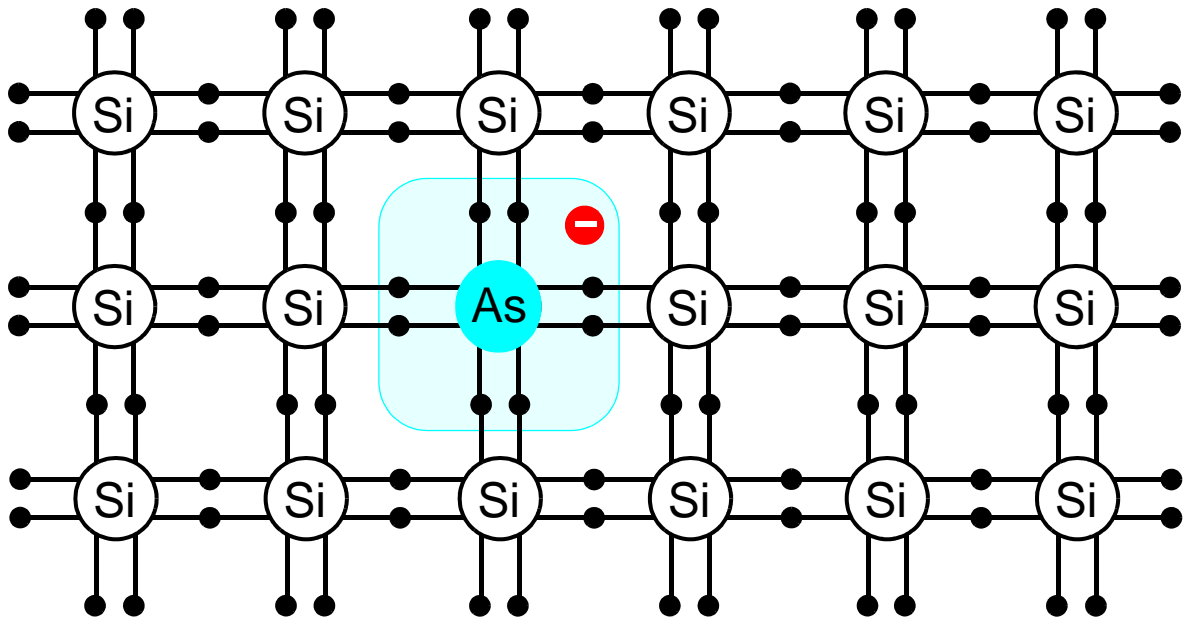
Die Abmessungen der Störatome dürfen nicht nennenswert vom Atomradius des Wirtsgitters abweichen, da sich sonst mechanische Gitterspannungen ergeben. Diese können den regelmässigen Kristall soweit stören, dass das geordnete Kristallwachstum (Einkristall) nicht mehr fortgesetzt wird. Die Auswahl ist nachfolgend aufgezeigt.

Manche Verbindungen werden nicht gebildet wegen chemischer Unverträglichkeit. Das rote Band für die Toleranz-Grenze in Si oder Ge ist somit nur eine gedankliche Stütze, entschieden wird von der Natur.

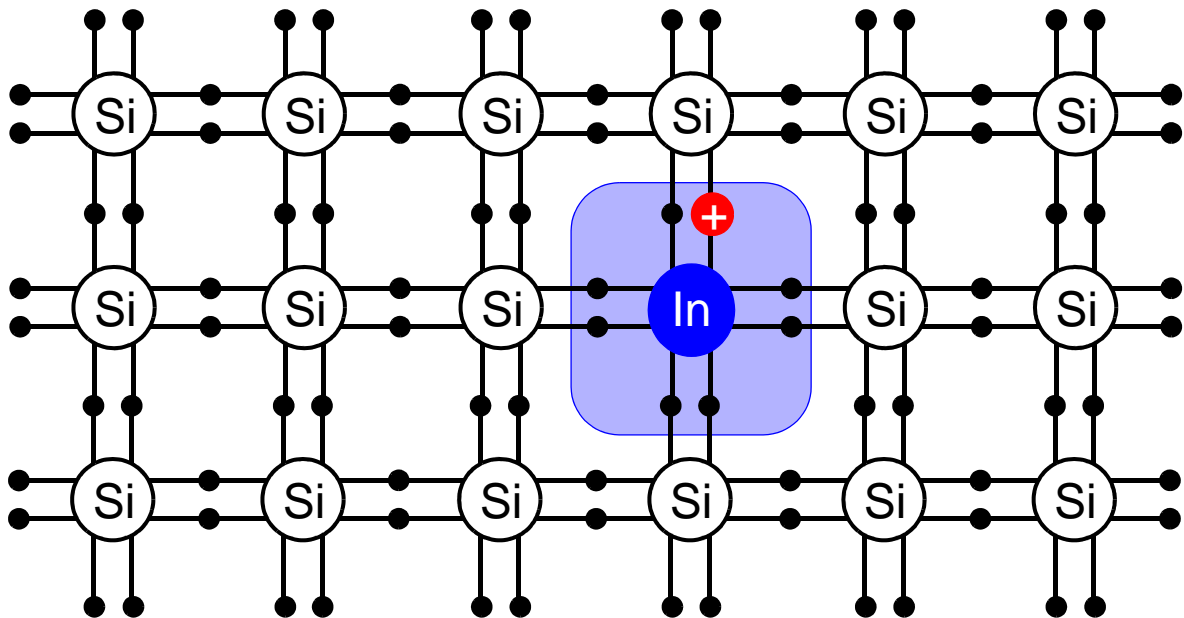
10.9 Auswahl-Kriterien f. Dotierungs-Partner



10.10 Dotierungen



Dotierung mit 5-wertigem Fremdatom (As) = Donator (Geber), ein überschüssiges Elektron. **Elektronenleitung = n-Leitg.**



Dotierung mit 3-wertigem Fremdatom (In) = Akzeptor (Nehmer), ein Elektron fehlt. **Löcherleitung = p-Leitung**

10.11 Kenngrößen versch. Materialien

Bandabstände undotierter Materialien bei Raumtemperatur

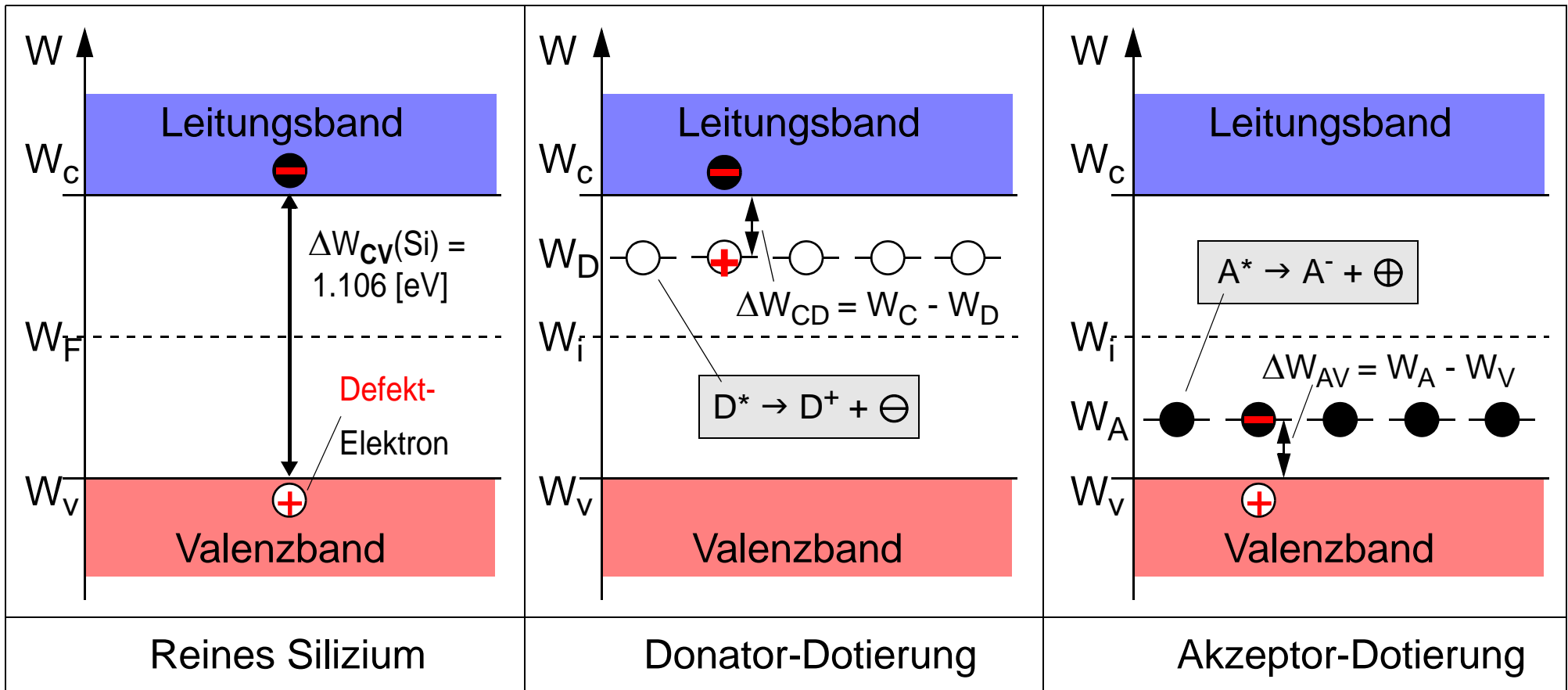
Halbleiter	Diamant	Si	Ge	GaAs	PbS	CdS	SiC	InSb
Typ	Element	Element	Element	III-V	IV-VI	II-VI	IV-IV	III-V
ΔW_{CV} [eV]	5.33	1.106	0.67	1.43	0.35	2.42	3.0	0.23
T_{CV} [K]	61 849	12 834	7 775	16 594	4 062	28 082	34 812	2 669

Alle Angaben in [eV] mit Umrechnung nach Kelvin. Man beachte den Diamant (C-Konfig.)

Aktivierungs-Energien in Si und Ge (für die Dotierung)

	ΔW_{CD} [eV] für Donatoren			ΔW_{AV} [eV] für Akzeptoren			
Element	P	As	Sb	B	Al	Ga	In
Si	0.045	0.049	0.039	0.045	0.057	0.065	0.16
Ge	0.0120	0.0127	0.0096	0.0104	0.0102	0.0108	0.0112

10.12 Dotierung von Halbleitern



C = Conductivity Band

V = Valency Band

Fermi-Energie W_F ist identisch mit W_i (intrinsic = wahr), $W_D, W_A \neq W_i$, abh. v. Element

Akzeptor = Elektronen-Mangel (lat. accipere, Nehmer)

Donator = Elektronen-Überschuss (lat. donare, Geber)

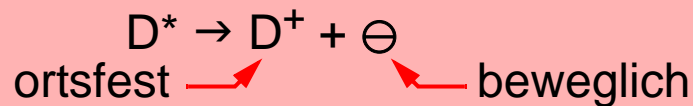
10.13 Leitungs-Arten

- **Eigenleitung** (z.B. Si oder Ge)

Elektronen aus dem Valenzband werden bei genügender Energie ΔW_{CV} (also ausreichender Temperatur T) aus dem Valenzband in das Leitungsband gehoben. Wegen der bei T konstanten Zahl der Ladungsträger muss bei diesem Vorgang eine positive Ladung (Defekt-Elektron, Loch) im Valenzband verbleiben. Beide Ladungen tragen zur Leitung bei, wobei die **Defekt-Elektronen (Platzwechsel) nicht so beweglich** sind wie die Elektronen. Gesamter Vorgang startet erst ab ca. 135 °C.

- **n-Leitung** (Elektronen-Leitung, z.B. As in Si)

Das Donator-Atom mit der Energie W_D (eigene Fermi-Energie) sitzt knapp unterhalb des Leitungsbandes. Gegen das Leitungsband (Unterkante hat die Energie W_C) ergibt sich somit eine Energie-Differenz von $\Delta W_{CD} = W_C - W_D$. Die Leitungs-Gleichung lautet:

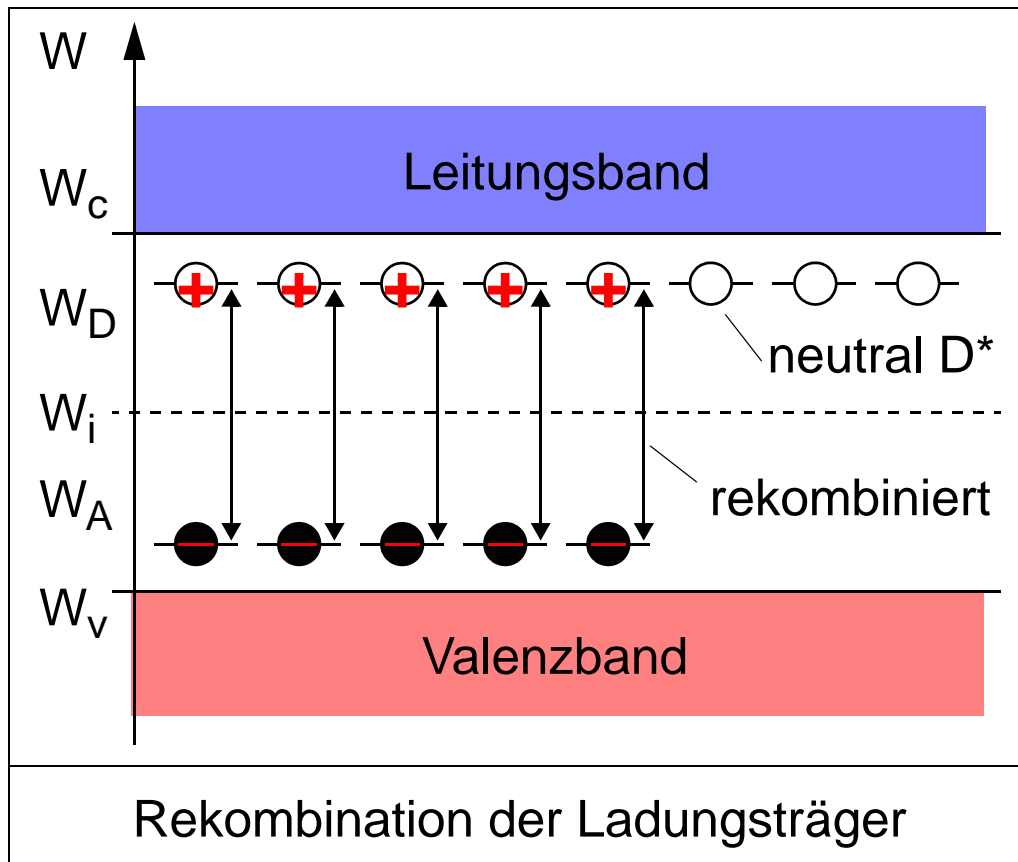


Es entsteht auch hier durch das Anheben des „überzähligen“ Donator-Elektrons in das Leitungsband eine verbleibende ortsfeste positive Ladung am Donator-Atom-Rumpf. Die Energie-Differenz ΔW_{CD} beträgt nur einige meV.

- **p-Leitung** (Löcherleitung, z.B. In in Ge)

Das Akzeptor-Atom sitzt knapp oberhalb des Valenzbandes und kann von dort wegen der geringen Energie-Differenz $\Delta W_{AV} = W_A - W_V$ leicht ein Elektron einfangen. Wegen der Aufspaltung $A^* \rightarrow A^- + \oplus$ entsteht im Valenzband ein positives **Loch** und ein ortsfester negativer Akzeptor-Rumpf.

10.14 Rekombination



Sind in einem dotierten Halbleiter sowohl Donator- als auch Akzeptor-Atome vorhanden, so wird sich eine identische Anzahl von neutralen D^* - und A^* -Fehlstellen spontan unter Energie-Gewinn nach der Gleichung $D^* + A^* \rightarrow D^+ + A^-$ zu einem „nach aussen“ neutralen Verbund vereinigen (Rekombination). Allein der verbleibende Rest (im obigen Fall die neutralen D^* -Zentren) bestimmt dann das Verhalten des Materials. Diese restlichen Fehlstellen reagieren bei entsprechender Temperatur mit dem Valenz- oder Leitungsband und bilden dann eine n- oder p-Leitung aus.

Insbesondere kann durch gezieltes Dotieren eine **Umdotierung** von n nach p oder umgekehrt erzielt werden.

11. Experimentell bestimmbare Grössen

Zur quantitativen Bewertung von Halbleiter-Eigenschaften benötigen wir ausser dem Bandabstand ΔW zwei weitere Grössen:

- Die **Anzahl** der beteiligten Ladungsträger im Volumen (Ladungsträger-Konzentration oder -Dichte), also $n_n(T)$ oder $n_p(T)$
- Die **Beweglichkeit** μ von Elektronen (μ_n) und Löchern (μ_p) im Kristallverbund.

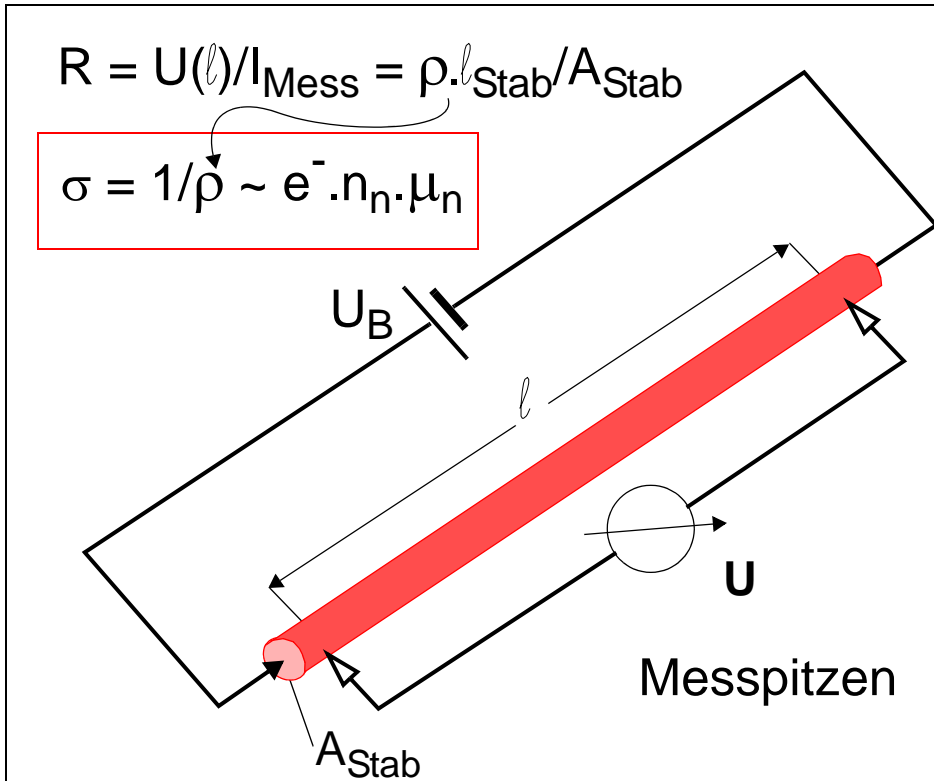
Dazu stehen uns zwei relativ einfache Messverfahren zur Verfügung:

- Die Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes ρ aus der Proben-Geometrie
 $R = U(\ell)/I_{\text{Mess}} = \rho \cdot \ell_{\text{Stab}} / A_{\text{Stab}}$ mit $1/\rho = \sigma(T) \sim e^- \cdot n_n(T) \cdot \mu_n(T)$, bzw. $\sigma(T) \sim e^+ \cdot n_p(T) \cdot \mu_p(T)$
- Die Messung der Hall-Spannung U_{Hall} , diese ist definiert als

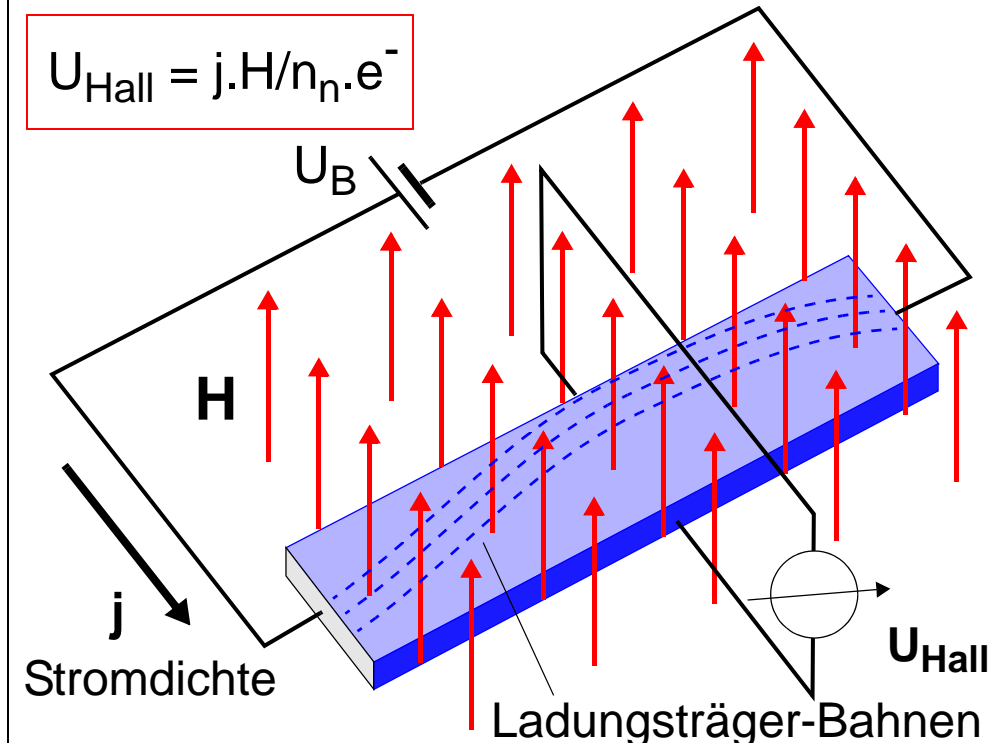
$$U_{\text{Hall}} = j \cdot H / n_n \cdot e^-$$
, je kleiner n_n , desto grösser wird U_{Hall}
- Durch Kombination beider Verfahren incl. Temperatur-Vorgabe und Vorzeichen-Beachtung der Hallspannung lassen sich zusätzlich n- und p-Leitung trennen, da

$$U_{\text{Hall}} = j \cdot H / n_n \cdot e^- \quad \text{bzw.} \quad -U_{\text{Hall}} = j \cdot H / n_p \cdot e^+$$
- Elektronen werden hier mit e^- und Defekt-Elektronen (Löcher) mit e^+ bezeichnet

11.1 Kombinierte Messverfahren



Widerstands-Messung



Hall-Effekt

Man umgibt die jeweilige Apparatur mit einer Temperier-Einrichtung (evtl. im Vakuum) und kann dann die Temperatur-Abhängigkeiten in weiten Grenzen untersuchen.

11.2 Massenwirkungsgesetz für Eigenleitung

Wie oben für reines Silizium gezeigt, kann ein temperatur-abhängiger Zerfall in Elektron (dieses ist dann im Leitungsband) und Defekt-Elektron (verbleibt im Valenzband) stattfinden nach folgender umkehrbarer Gleichung $0 \rightleftharpoons \ominus + \oplus$. Die Null auf der linken Gleichungsseite besagt, dass **keine neuen** Ladungen gebildet werden, sondern Gleichgewicht herrscht.

Im Falle der Halbleiter liegt die Energie kT so niedrig im Vergleich zu ΔW_{CV} , dass die Fermi-Statistik modifiziert werden kann, $e^{(\Delta W_{CV}/kT)} \gg 1$, also $f(W,T) = 1/e^{(\Delta W_{CV}/kT)} = e^{-(\Delta W_{CV}/kT)}$

Aus der Überlegung **Generierungsrate = Vernichtungsrate** für reine Halbleiter folgt, dass $n_i^2 = n_n \cdot n_p = \text{const}(T)$ (Massenwirkungsgesetz), hier dann $n_n = n_p$ ist und für die Temperatur-abhängigkeit die folgende Gleichung gilt (N_V und N_C sind die auf einen cm^3 bezogenen, spezifischen Band-Einheitswerte):

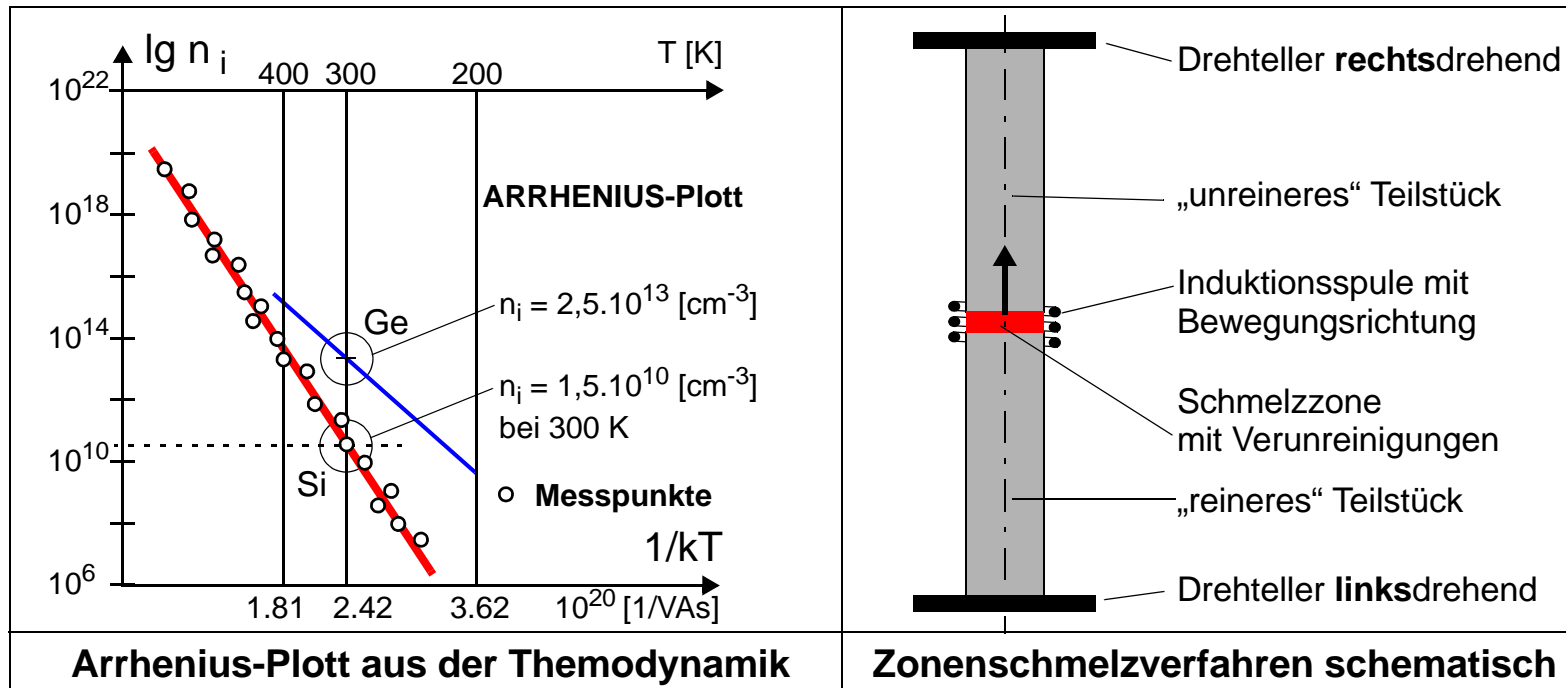
$$n_i^2(T) = n_n \cdot n_p = N_V \cdot N_C \cdot e^{-(\Delta W_{CV}/kT)} \text{ daraus folgt durch Logarithmieren}$$

$$\ln(n_i) \sim -\Delta W_{CV}/2kT \text{ mit der folgenden Steigung}$$

$$d(\ln n_i)/d(1/kT) = -\Delta W_{CV}/2 \quad \text{negative Steigung} \sim \text{halber Bandabstand}$$

Die letzte Gleichung besagt, dass man durch Auftragen der Zahl der bei der jeweiligen Temperatur gemessenen Ladungsträgerdichte $\ln(n_i)$ über $1/kT$ den Bandabstand $\Delta W_{CV}/2$ ermitteln kann.

11.3 Arrhenius-Plott und Zonenschmelzen



Aus den oben geschilderten Messungen kann man die temperatur-abhängigen Werte für die Zahl n_i der **Eigenleitung** von höchstreinem Si erhalten. Aus diesem Grund wird die Folge der Messpunkte logarithmisch über $1/kT$ (Arrhenius-Plott) aufgetragen, zusätzlich ergibt sich die durchgelegte Ausgleichs-Gerade. Am Schnittpunkt mit $T = 300$ [K] erhalten wir einen Wert von $n_i = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ für Si. Führt man die obigen Messungen dagegen an Ge durch, so wird $n_i = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ gefunden, eine über drei Zehnerpotenzen bessere elektrische Leitung. Weiterhin ist die Steigung im Arrhenius-Plott konstant (temperaturunabhängig), der **Bandabstand (Aktivierungsenergie) ändert sich somit nicht**. Zur Verdeutlichung der Temperatur-Abhängigkeit von n_i wurde über dem Diagramm zusätzlich die aus $1/kT$ errechnete, rückwärts laufende, absolute Temperatur T eingetragen.

11.4 „Reinheitsgebot“

In einem cm^3 Si (oder Ge) sind rund 10^{23} Atome enthalten, wovon nur etwa 10^{10} ein Elektron zum Ladungstransport beisteuern, dies macht deutlich, dass **jedes Fremdatom** im Einkristall zu einer Verfälschung führen muss. Silizium wird heute „halbleiterrein“ mit 99,9999999% (sog. Neun-Neuner-Si) hergestellt und ist gegenwärtig das am reinsten lieferbare Element auf der Erde. Bei Ge sind die Forderungen etwas moderater.

Diese beispiellose Reinheit wird durch **tiegelloses** „Zonenschmelzen“ unter Schutzgas erreicht, wobei eine schmale Schmelzzone langsam von unten nach oben durch einen senkrecht stehenden Kristall bewegt wird. **Da die Fremdmetalle i.A. in der Schmelze besser löslich sind als im Festkörper, wandern alle Beimengungen mit der Schmelzzone nach oben.** Zur besseren Entmischung rotieren die beiden Kristallteile entgegengesetzt. Der Schmelzdurchgang von unten nach oben wird etliche Male wiederholt, am Ende der Reinigungsprozedur wird das oberste Kristallstück abgeschnitten und verworfen. Der übriggebliebene, hochreine Rohkristall dient dann als Ausgangsmaterial für die noch zu besprechende Zucht von Einkristallen.

Die obige Eigenleitung der reinen Halbleiter ist in der Technik gänzlich unwillkommen und störend, da die gewollten Effekte überdeckt werden. Sie wurde nur zur Abgrenzung der Nutzttemperaturen hier besprochen.

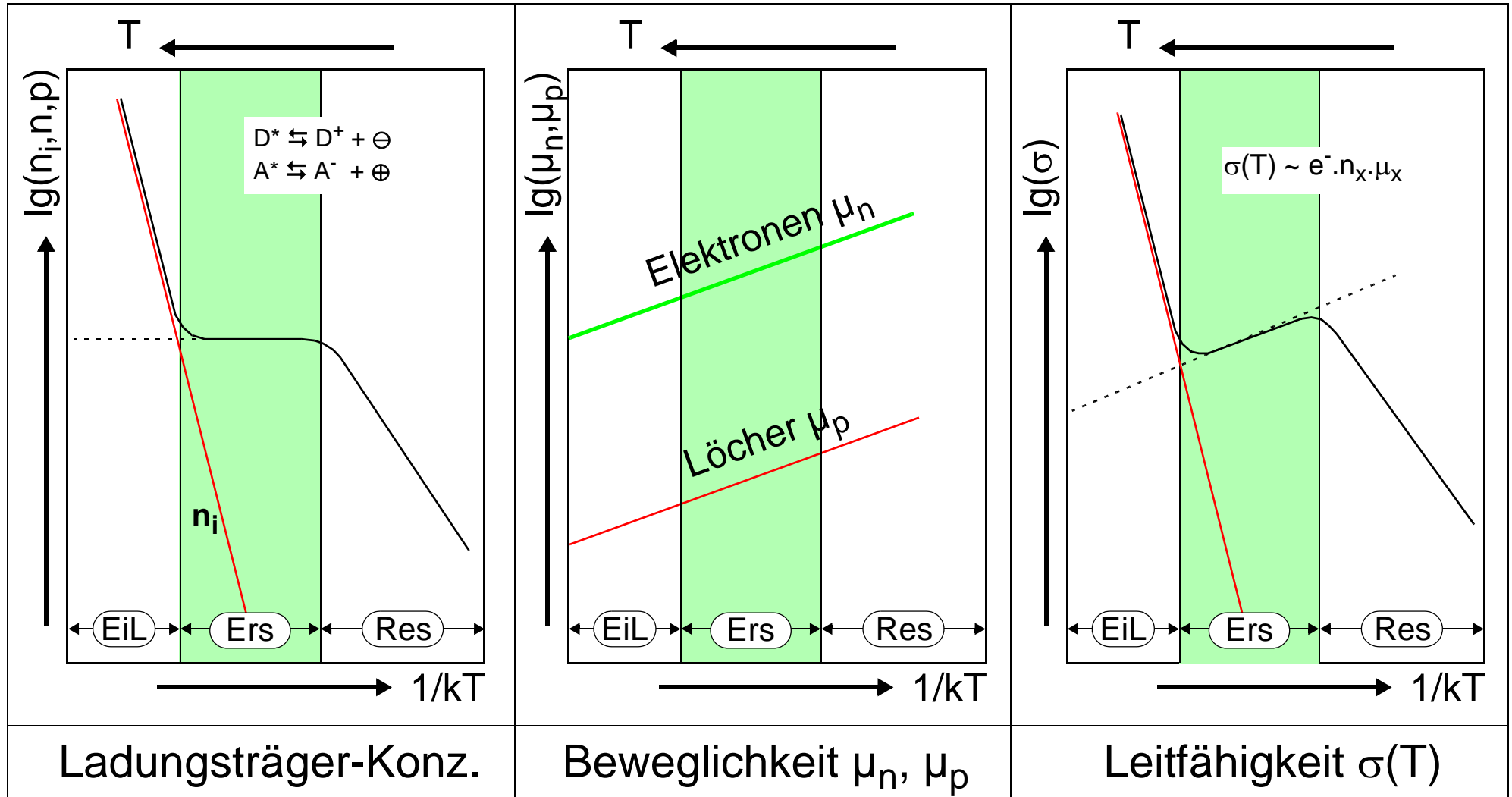
11.5 Temperatur-Abhängigkeiten

Die obige **Modifikation der Fermi-Gleichung** gilt auch für die **Dotierungs-Partner**, obwohl deren Bandabstände (Aktivierungs-Energien) schon eher mit kT vergleichbar werden. Wie man bei Messreihen mit tiefen Temperaturen an dotierten Halbleitern feststellt, ergeben sich dort ebenfalls Geradenstücke im Arrhenius-Plott. Hier wird dann $n_i^2(T) = n_n \cdot n_p$ mit $n_n \gg n_p$ oder $n_n \ll n_p$

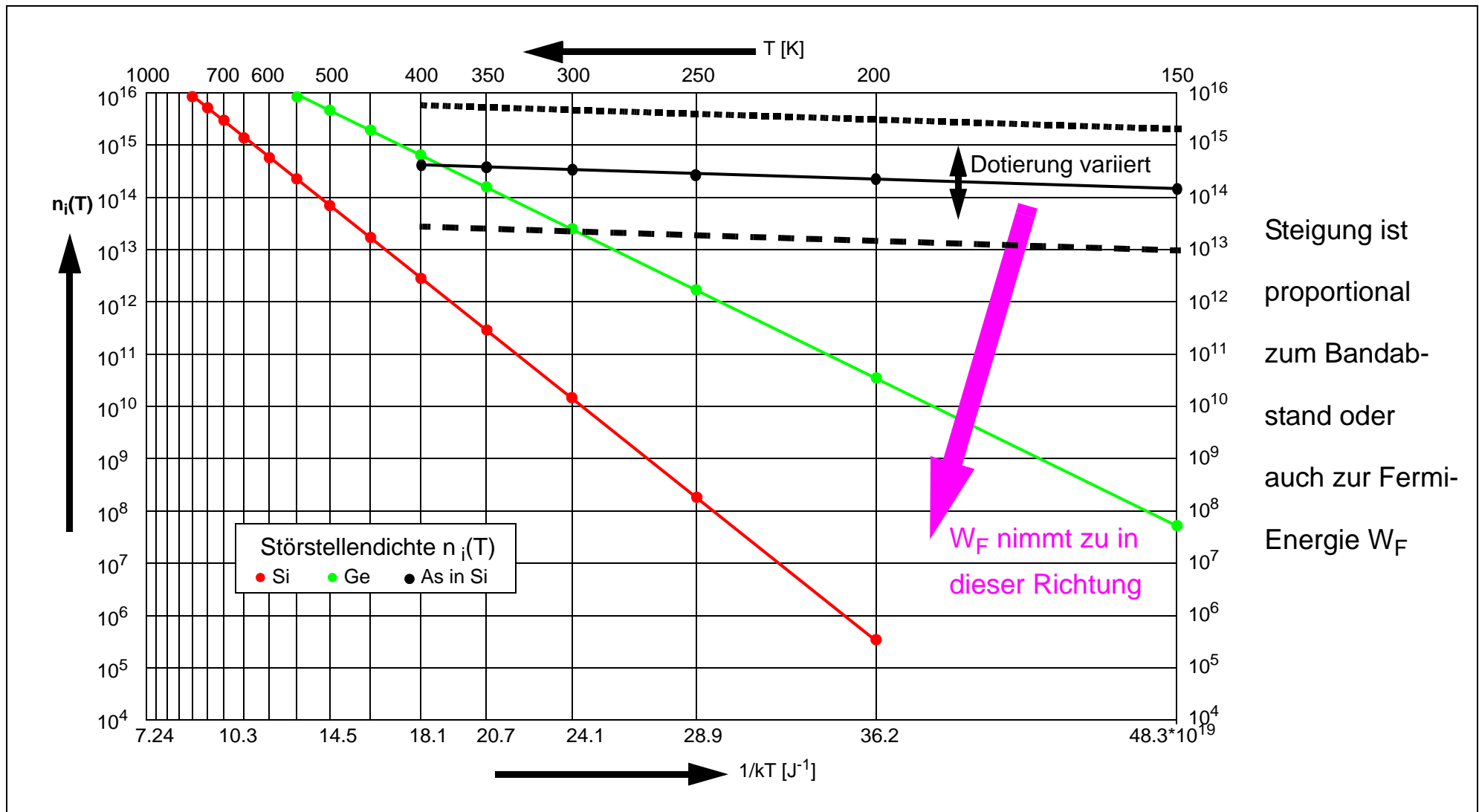
Man kann drei Gebiete unterscheiden, die sich mit steigender Temperatur einstellen:

- **Störstellen-Reserve** (Res). Man kann folgende (reversible) Reaktions-Gleichungen für Bildung und Zerfall bei Donatoren **oder** Akzeptoren aufstellen: $D^* \rightleftharpoons D^+ + \ominus$ bzw. $A^* \rightleftharpoons A^- + \oplus$ oder in verallgemeinerter Form $0 \rightleftharpoons \ominus + \oplus$. Mit diesem Zerfall beginnen wir in 8.2.6 bei tiefen Temperaturen, d.h. jeweils rechts über $1/kT$. Bei der Ladungsträger-Konzentration n_n oder n_p beobachtet man einen Anstieg über der reziproken Temperatur-Skala, was eine positive Temperatur-Abhängigkeit bedeutet. Bei tiefen Temperaturen ergibt sich nur ein schwacher Zerfall nach der o.a. Zerfallsgleichung, der aber mit **steigender Temperatur** solange zunimmt, bis sich alle Reaktionspartner auf der rechten Gleichungsseite befinden. Damit ist die Reserve an Störstellen aufgebraucht und man bezeichnet dieses Gebiet als Störstellenleitung (oder auch Störstellenreserve = Res). Ein ähnlicher Verlauf ergibt sich auch bei der elektrischen Leitfähigkeit $1/\rho(T) = \sigma(T)$.
- **Störstellen-Erschöpfung** (Ers). Bei weiter steigender Temperatur kommen keine weiteren Ladungsträger mehr hinzu, deshalb bleibt die Zahl n_n oder n_p im mittleren, farbig unterlegten Temperaturbereich **konstant**. Dieses Gebiet nennt man den Bereich der Störstellenerschöpfung (Ers). Die Leitfähigkeit $\sigma(T)$ kann je nach Material sogar (wie eingezeichnet) leicht abnehmen wegen der Zusammenstöße mit den Gitterschwingungen.
- **Eigenleitung** (Eil) wurde bereits besprochen. Die Kurve der Störstellenerschöpfung mündet in die der Eigenleitung ein, die bei höheren Temperaturen allein bestimmend ist

11.6 Hoch- und Tieftemperatur-Abhängigkeiten



11.7 Einige errechnete Werte für n



11.8 Zur Beweglichkeit

Nachfolgende Tabelle zeigt einen Überblick für einige Materialien

Halbleiter	Si	Ge	GaAs	PbS	CdS	SiC	InSb	Diamant
μ_n in [m^2/Vs]	0.135	0.390	0.880	0.060	0.020	0.01	8.000	0.220
μ_p in [m^2/Vs]	0.048	0.190	0.130	0.040	⊗	0.002	0.700	0.160
⊗ CdS kann nicht p-dotiert werden (keine amphotere Dotierbarkeit = beliebig n oder p)								dotiert

Die Beweglichkeit ist ein Mass für die Zusammenstösse der Ladungsträger (Elektronen oder Löcher) mit dem Atomgitter unter dem Aspekt, dass jeder Ladungsträger zum ungehinderten Transport eine gewisse mittlere freie Weglänge benötigt, auf der er keine Zusammenstösse erleidet. Eine grosse Beweglichkeit ist also ein Zeichen dafür, dass wenige Zusammenstösse stattfinden. Da $\sigma(T) \sim n_x(T) \cdot \mu_x(T)$, bedeutet ein hoher Betrag der Beweglichkeit auch eine hohe spezifische elektrische Leitfähigkeit σ . In Metallen liegt μ_n bei ca. 50-100 ($\text{Cu} = 35 [\text{m}^2/\text{Vs}]$ bei Raumtemperatur). Ein grosses σ kann man durch ein grosses μ (bei gewissen Halbleitern) oder ein grosses n (wie bei Metallen) erreichen.

Beweglichkeit μ und Teilchengeschwindigkeit \mathbf{v} im Gitter sind mit dem antreibenden elektrischen Feld \mathbf{E} über die folgenden Gleichungen verknüpft (dazu gehören noch mittlere Lebensdauern $\tau_i = 10^{-1} \dots 10^{-5} [\text{s}]$):

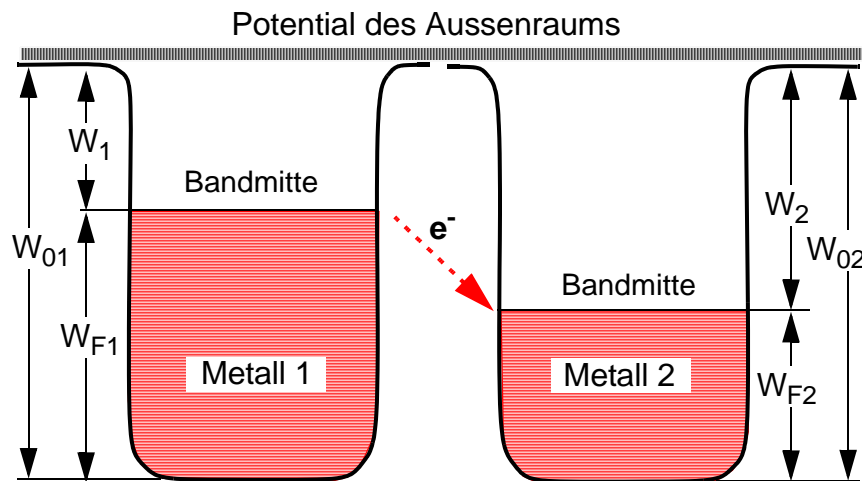
$$\mathbf{v}_n = -\mu_n \cdot \mathbf{E} \quad \mathbf{v}_p = \mu_p \cdot \mathbf{E}$$

Beispiele für Elektronen-Geschwindigkeiten (Drift-Geschwindigkeit zwischen zwei Zusammenstössen mit dem Gitter) bei 1/100 der mittleren Durchbruch-Feldstärke von $\mathbf{E} = 5 \cdot 10^8 [\text{Vm}^{-1}]$:

$$\text{n-Si: } \mathbf{v}_n = 0.135 \cdot 5 \cdot 10^6 [\text{m}^2\text{V/Vsm}] = 675 [\text{kms}^{-1}], \quad \text{n-InSb: } \mathbf{v}_n = 4000 [\text{kms}^{-1}]$$

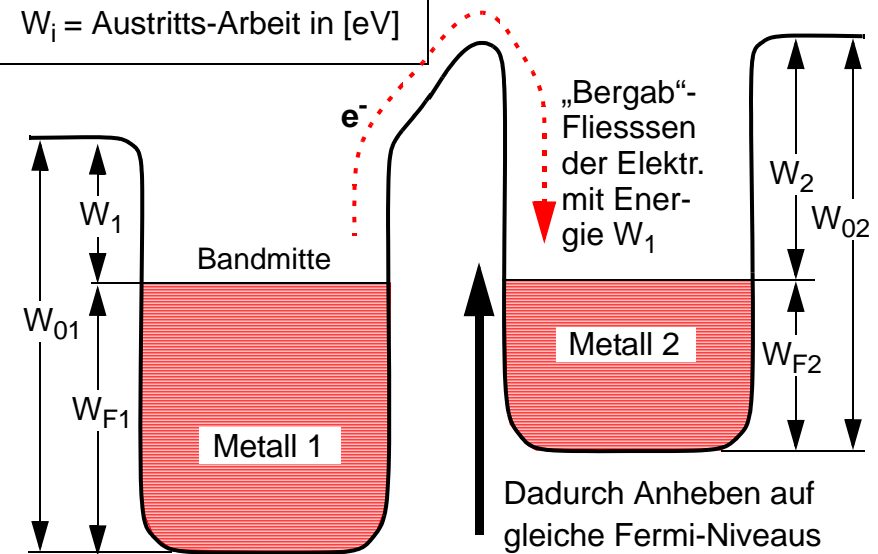
11.9 Berührungsspannung von Metallen

W_{0i} = Gesamt-Energie ab Boden in [eV], W_{Fi} = **Fermi**-Energie [eV], W_i = Austritts-Arbeit in [eV]



Vor dem Kontakt

Jedes Metall besitzt seine eigenen Werte für die Gesamt-Energie, die Fermi-Energie und die Austritts-Arbeit aus der Oberfläche. Bezugs-Potential ist das Potential des Aussenraums.

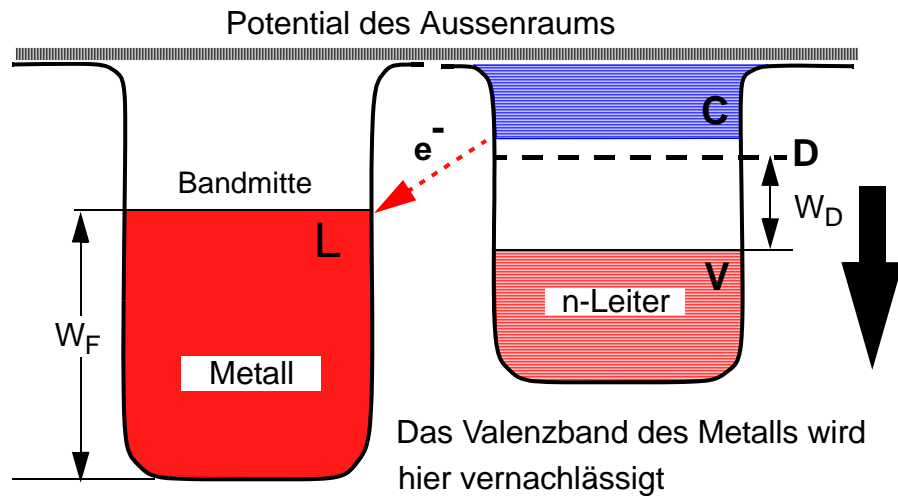


Nach dem Kontakt

Beim Kontakt der beiden Metalle fließen wenige Elektronen zu Metall 2 und laden dieses so lange negativ auf, bis die Fermi-Niveaus in beiden Potentialtöpfen auf gleicher Höhe liegen. Dadurch ergibt sich eine messbare Berührungsspannung zwischen Metall 1 und Metall 2: $\Delta U = (W_2 - W_1)/e$ [V]

11.10 N-Halbleiter-Metall-Kontakt 1

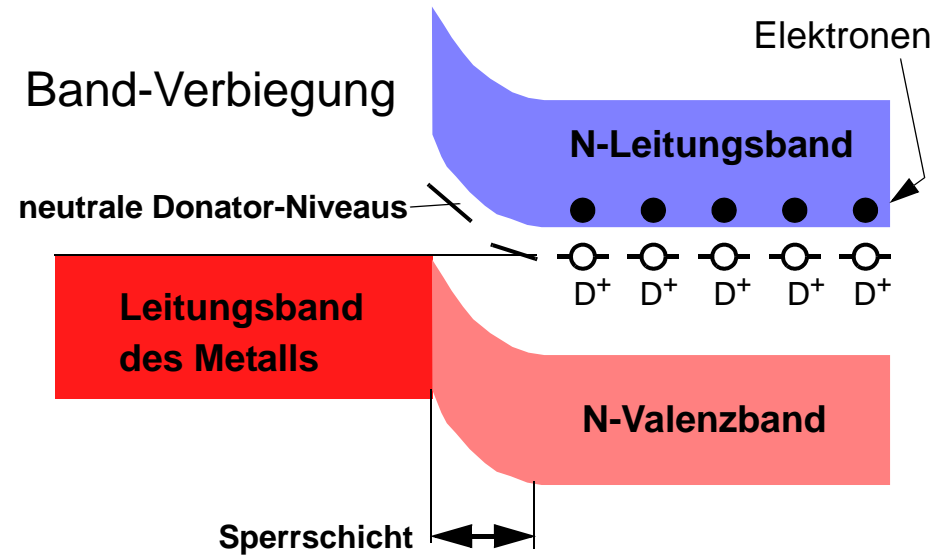
W_F = **Fermi-Energie** [eV], W_D = **Donator-Niveau** [eV]



Vor dem Kontakt (vereinfacht)

Jeder Partner besitzt seine eigenen Werte. Beim Metall für die Fermi-Energie, bei dem n-Leiter für das Donator-Niveau W_D [eV]. Bezugs-Potential ist immer das Potential des Aussenraums. Beim Kontakt fließen energetisch höher gelegene Elektronen stets „bergab“. Umgekehrte Richtung verboten.

Band-Verbiegung

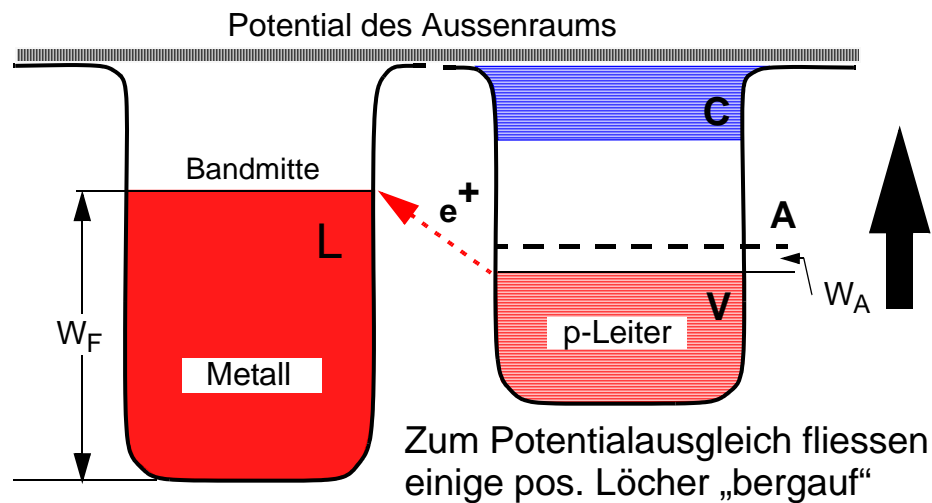


Nach dem Kontakt

Beim Kontakt der beiden Partner fließen wenige Elektronen vom Donator-Level zum Metall und laden dieses so lange negativ auf, bis Oberkante Leitungsband (W_F) und das geräumte Donator-Niveau auf gleicher Höhe liegen. Dadurch werden die Halbleiterbänder verbogen, es bildet sich eine Sperrschicht.

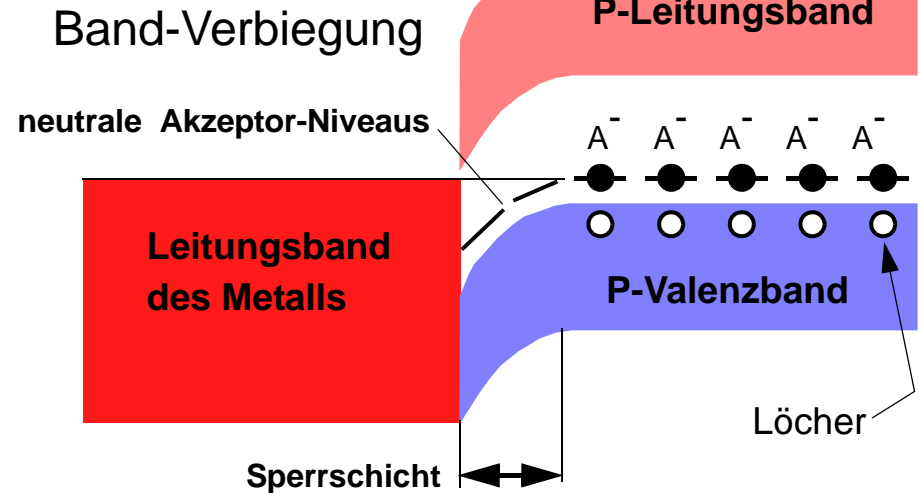
11.10.1 P-Halbleiter-Metall-Kontakt

W_F = Fermi-Energie [eV], W_A = Akzeptor-Niveau [eV]



Vor dem Kontakt

Jeder Partner besitzt seine eigenen Werte. Knapp oberhalb des Valenzbandes V sitzen die Akzeptoren, jedoch energetisch unterhalb des Fermi-Levels des Metalls. Somit fließen beim Kontakt einige Löcher aus dem Valenzband in das Metall und laden dieses positiv auf gegen den P-Halbleiter



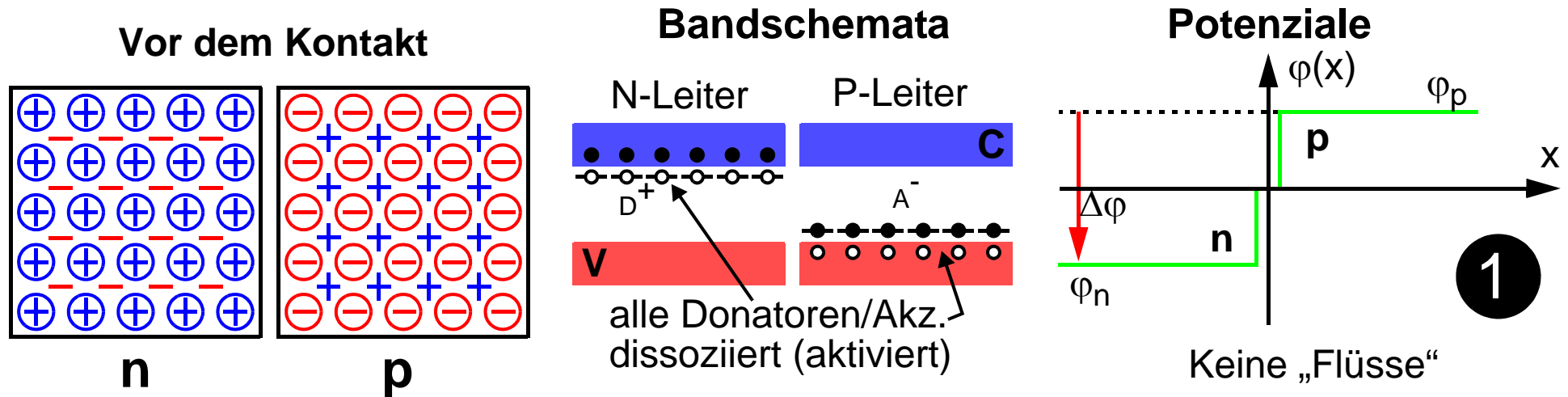
Nach dem Kontakt

In der Kontaktzone bildet sich durch besagten Löcherfluss eine Raumladungszone aus, die den Zustrom weiterer Löcher behindert (kein „Bergab-Fliessen“ der pos. Löcher). Beim Anlegen entsprechender Spannungen werden die Bänder gehoben oder gesenkt (Gleichrichter-Wirkung).

11.10.2 Legende zu Halbleiter-Metall-Kontakt

- **N-Halbleiter-Metall-Kontakt.** Beim Anlegen von Wechselspannung werden die Halbleiterbänder in Bezug auf die Metall-Elektronen (davon gibt es eben mehr) gehoben oder gesenkt. Liegt am Metall eine positive Spannung, dann hebt sich der Level der Donatoren soweit, dass er über der Fermi-Energie des Metalls liegt. Von rechts können dann Elektronen einwandern, die ausgeräumten Niveaus auffüllen und nach links aus dem Leitungsband „bergab“ ins Metall abfließen. Dabei wird die Sperrschicht weitgehend abgebaut (geringer Widerstand). Bei **positiver Spannung am Halbleiter** werden die Bänder weiter abgesenkt und weitere Elektronen aus dem Donator-Niveau abgesaugt, die **Sperrschicht verbreitert** sich, verbunden mit einer starken Widerstandserhöhung der Gesamt-Anordnung. Das ist das ganze Geheimnis der Gleichrichter-Wirkung!!
- **P-Halbleiter-Metall-Kontakt.** Hier liegen die Verhältnisse genau umgekehrt. Bei negativer Spannung am Metall (**pos. am Halbleiter**) wird eine weitere **Bandabsenkung** erzwungen, wodurch die Akzeptor-Niveaus unterhalb der Fermi-Energie des Metalls zu liegen kommen. Alle Akzeptor-Plätze werden besetzt, die Sperrschicht wird sehr schmal, dadurch können Löcher aus dem Valenzband in das Metall gelangen (auch dies ist ein Stromfluss, wenn auch mit umgekehrtem Vorzeichen). Im umgekehrten Fall (negativ am Halbleiter) erfolgt eine Band-Anhebung, verbunden mit einer Verbreiterung der Sperrschicht durch Leerräumen von Akzeptorplätzen in der Kontaktzone.

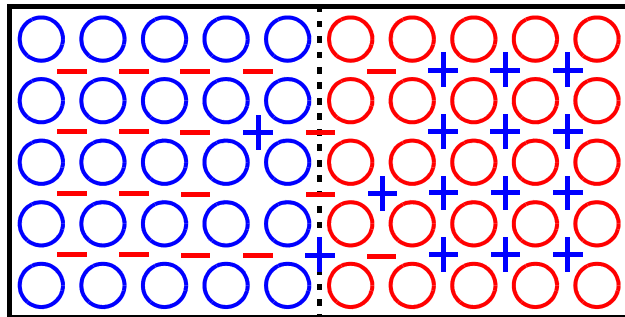
11.11 Kontakt zwischen N- und P-Leiter



- **Vor dem Kontakt** haben wir zwei homogen dotierte Stücke Halbleiter-Material mit identischer Teilchenzahldichte N_n und N_p , jeweils auf einen cm^3 bezogen.
- Im **Bandschema** sind sämtliche Donatoren-Niveaus aufgespalten in $D^* \rightleftharpoons D^+ + \ominus$ und sämtliche Akzeptoren-Niveaus in $A^* \rightleftharpoons A^- + \oplus$, wobei das Gleichgewicht jeweils total auf der rechten Seite liegt. Bezugslinie ist immer die Fermi-Energie der Niveaus
- Bei den **Potenzialen** besitzt der n-Leiter ein konstantes, negatives Potenzial über das gesamte Volumen (hier $\phi_n(x) = \text{const}$) und der p-Leiter ein positives $\phi_p(x) = \text{const}$. Die Differenz des Potenziale beträgt $\Delta\phi$. Das Koordinatensystem liegt symmetrisch zur Mitte. Die Darstellung entspricht etwa dem Potentialtopf-Modell.

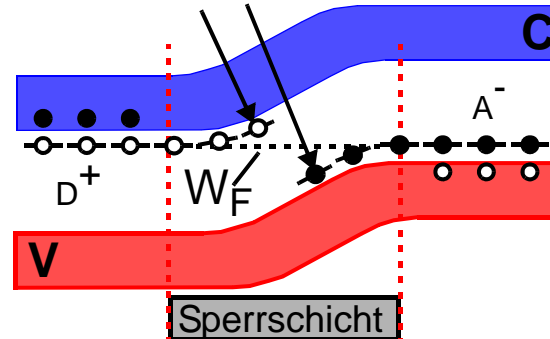
11.11.1 Kontakt zwischen N- und P-Leiter

Kontakt, ohne Spannung

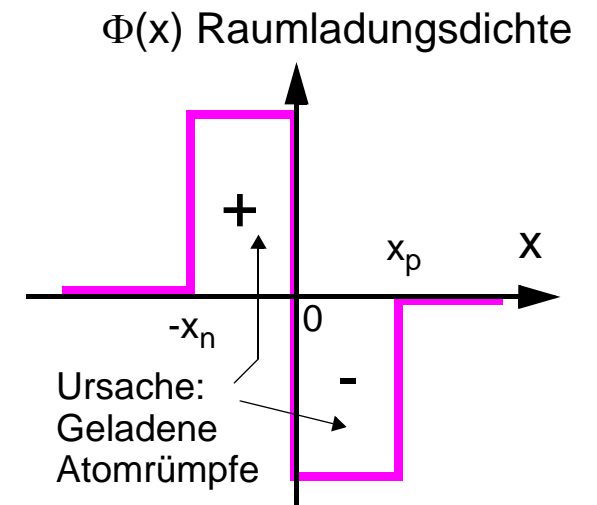
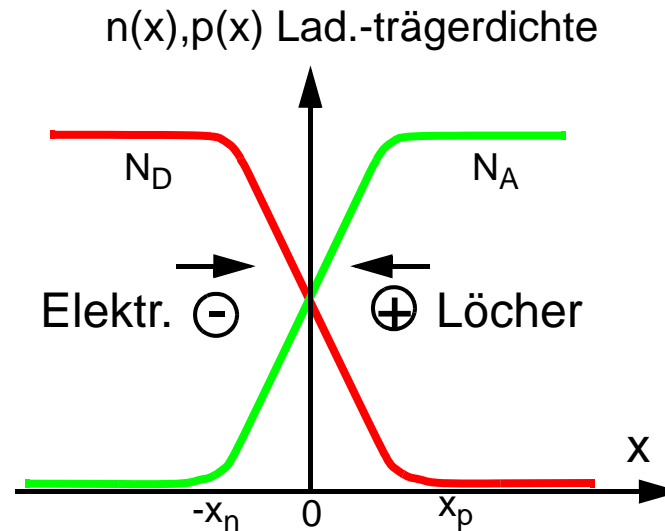
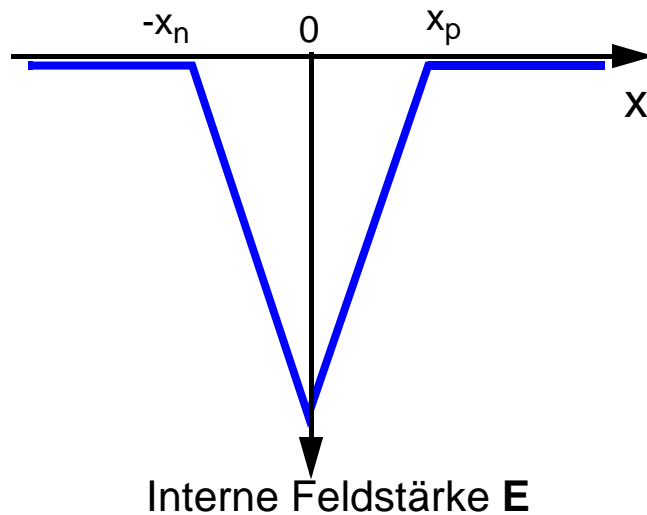
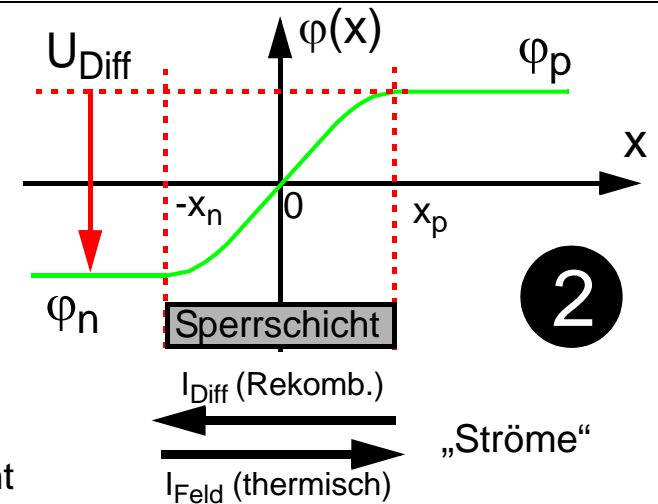


Rekombination

Abdiffundieren



Ausbildung einer el. Doppelschicht



11.11.2 Legende zu Schritt 2

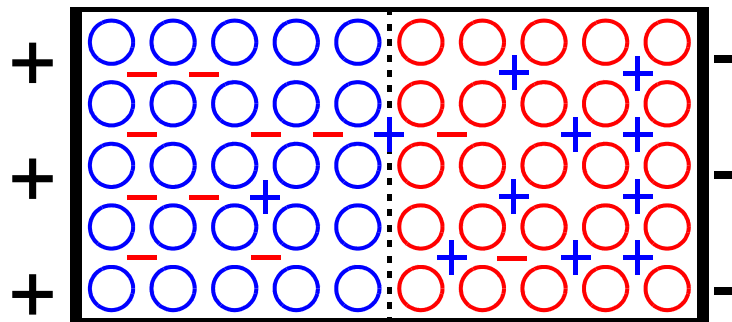
- Im linken **Gitterschema** werden nach dem Kontakt durch „Diffusion“ Löcher von rechts angesaugt, im Ausgleich dafür Elektronen nach rechts in das p-Gebiet abgegeben, wobei jeweils eine Rekombination stattfindet. Alle Atomrümpfe bleiben geladen.
- Mitte oben: **Bandanhebung** (Fermi-Level n-Leiter wird als konstant festgehalten) des p-Leiters so, dass Donatorlevel und Akzeptorlevel **auf gleicher energetischer Höhe**, dies entspricht den vorigen Potentialtopf-Betrachtungen. Wegen der Abwanderung (Rekombination) der Ladungsträger durch Diffusion verarmen die Niveaus, sodass nur umgekehrt geladene Atomrümpfe D^+ und A^- im Kontaktgebiet verbleiben. Diese bilden eine Dipol-Raumladungszone (Sperrschicht) aus, welche die weitere Diffusion von Ladungsträgern unterbindet. Da wir im Gebiet der Störstellen-Erschöpfung (11.6) arbeiten, sind die verbleibenden Donatoren und Akzeptoren alle aktiviert (dissoziiert)
- **Potentiale:** Es stellt sich von $-x_n$ bis x_p der gezeigte Potentialverlauf zwischen φ_n und φ_p mit der Potential-Differenz $\Delta\varphi$ ein, der hier der materialabhängigen Diffusions-Spannung U_{Diff} entspricht ($U_{\text{Diff}} = 0.7 \text{ [V]}$ für Si und 0.35 [V] für Ge, U_s Schleusenspannung)
- **Diffusions- und Feldstrom** sind hier gleich, da sich die thermisch gebildeten Löcher und Elektronen ohne äussere Spannung im Ladungsgleichgewicht befinden müssen.

11.11.3 Legende zu Schritt 2

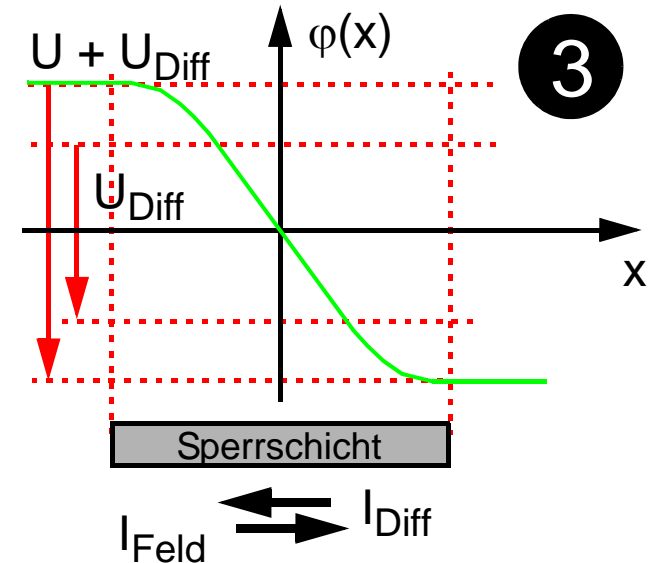
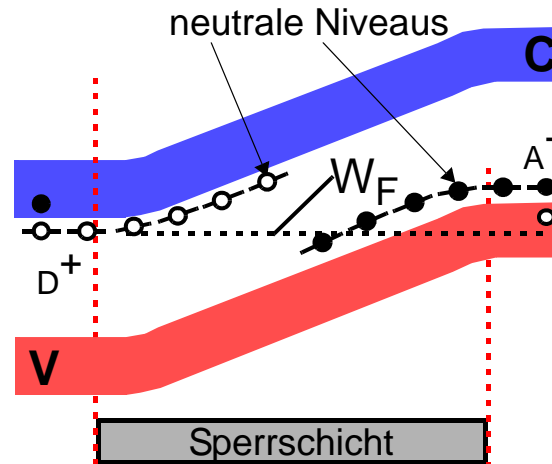
- **Null-Linie** für Potential $\varphi(x)$ mittig, da n- und p-Zentren negative, bzw. positive Ladungen bedeuten
- **Interne Feldstärke E** bildet sich aus wegen der Ladungstrennung durch Abdiffundieren der Ladungsträger. Man beachte die Unstetigkeit in der Mitte und den Verlauf im Gebiet ausserhalb der Sperrschicht.
- Die Kurven der **Ladungsträger-Dichten** zeigen, dass das Massenwirkungsgesetz gilt, also $n_i^2 = n_n \cdot n_p = \text{const.}$ An der Grenzfläche gilt $n_n = n_p$. Zusätzlich ist die Wanderungsrichtung von Elektronen aus dem n-dotierten Material in den p-Leiter und die Wanderung (Diffusion) der Löcher nach links in den n-Leiter gezeigt.
- **Raumladungsdichte $\Phi(x)$** : Dieser Kurvenverlauf rührt von den Atomrümpfen der Donatoren und Akzeptoren her (vereinfacht gezeichnet, um die Sperrschicht zu demonstrieren für das „Abdrängen“ der Elektronen und Löcher in die Randgebiete)
- Allen drei unteren Kurvenverläufen ist gemeinsam, dass die **Sperrschicht** immer dort beginnt, wo die Kurven die Null-Linie verlassen ($-x_n < x < x_p$).

11.11.4 Schritt 3 und 4

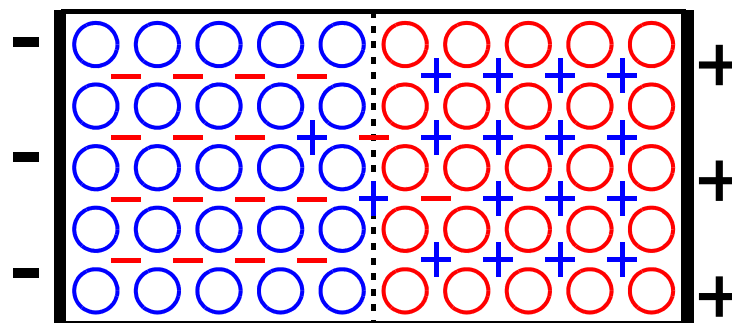
Sperr-Richtung (R gross)



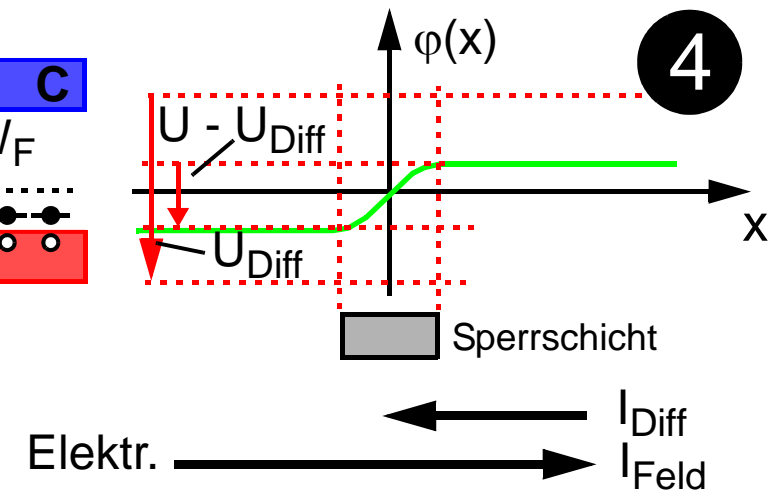
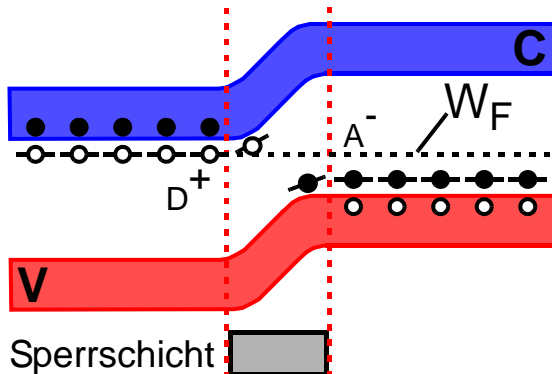
Breite Sperrschicht



Durchlass-Richtung (R klein)



Schmale Sperrschicht



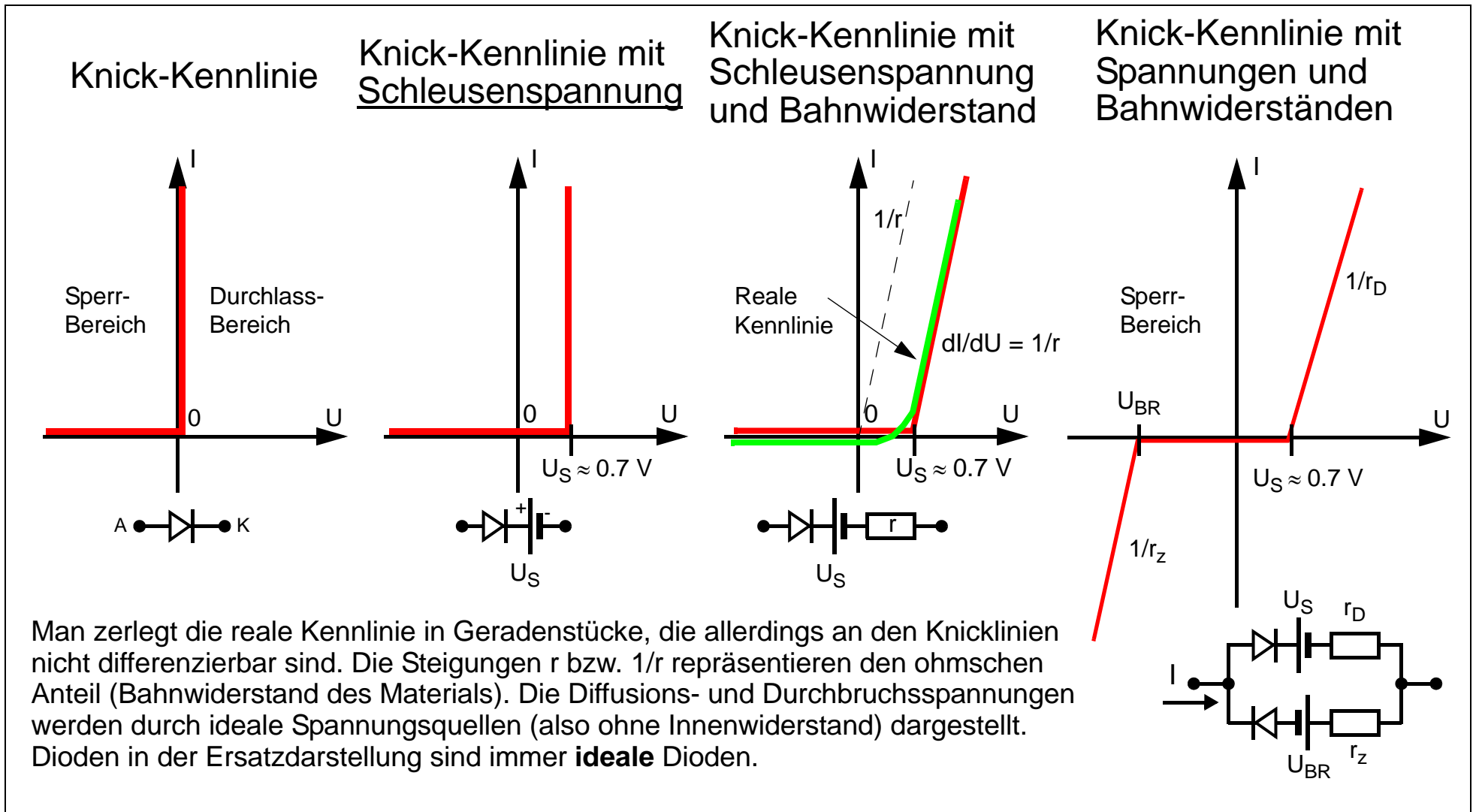
11.11.5 Legende zu Schritt 3 (Sperr-Richtung)

- Im **Gitterschema** erkennen wir, dass eine starke „Ausdünnung“ an Ladungsträgern durch weitere Rekombination stattgefunden hat. Ursache ist die positive Spannung am n-Leiter und die negative Spannung am p-Leiter, dadurch werden die im jeweiligen Gebiet vorkommenden Majoritätsträger abgesaugt, sodass sich die Sperrschicht nennenswert verbreitert. Es ergibt sich wegen dieses Mangels an Ladungsträgern ein sehr hoher Sperrschicht-Widerstand.
- Sperrschicht: Bei zu starker negativer Anhebung (grosse Potenzial-Differenz, Beispiel 5 [eV]) des p-Bandes können wegen der grossen Feldstärke Elektronen tunneln. Dies wird noch bei der Zener-Diode zu besprochen sein.
- Beim **Bandschema** wird durch die negative Spannung (Zuführung von Elektronen) am p-Leiter das Niveau der Akzeptoren **über** die Fermi-Grenze der Donatoren angehoben. Die verbleibenden Elektronen links der Sperrschicht im n-Leiter müssten bei thermischer Anregung „den Berg hinauf“ laufen, dies ist aber verboten. Die wenigen Elektronen im p-Gebiet kommen wegen des hohen Widerstands nicht ins n-Gebiet. Man erkennt die vielen isolierten Atomrümpfe im Sperrgebiet
- Deshalb ist der **Diffusionsstrom** klein, der Feldstrom (äussere Spannung) ebenfalls
- Wegen der hohen positiven Vorspannung verläuft das **Potential** umgekehrt zum neutralen Fall. Zu hohe Sperrspannungen sind zu vermeiden, sonst Durchbruch!

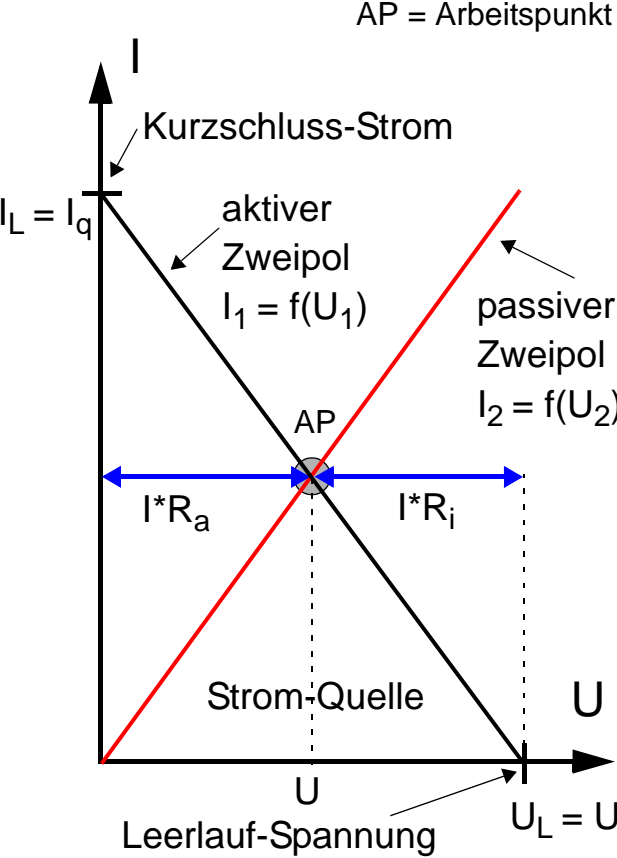
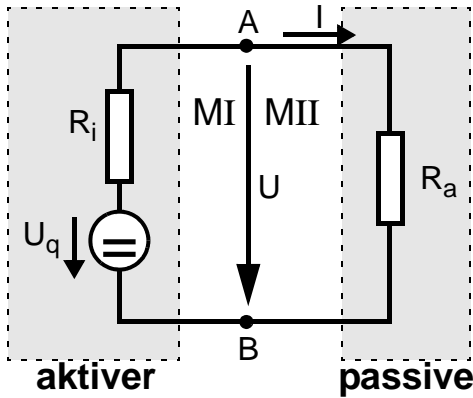
11.11.6 Legende zu Schritt 4 (Durchlass-Richtung)

- **Gitterschema:** In Durchlassrichtung liegt am n-Leiter eine negative, am p-Leiter eine positive Spannung an, dadurch werden in das jeweilige Gebiet die entsprechenden Majoritätsträger eingespeist, wodurch die diffundierten Minoritätsträger weitgehend durch Rekombination neutralisiert werden. Dadurch ergibt sich eine (sehr) dünne Sperrschicht mit kleinem Widerstand.
- Im **Bandschema** ist nur noch eine schwache Absenkung des Akzeptor-Niveaus **unter** die Fermi-Grenze des Donatorbandes wirksam, wodurch ein ungehinderter Transfer von Elektronen **und** Löchern stattfinden kann. Kleine Spannungen ergeben bereits grosse Ströme. Deutlich erkennbar sind die fast vollständig besetzten Donator- und Akzeptor-Paare, jeweils mit Elektronen, bzw. mit Löchern.
- Die **Potenziale** sind ebenfalls stark abgesenkt. Wegen der umgekehrten Polarität ähnelt der Verlauf dem Fall nach dem Kontakt, aber ohne antreibende Spannung. Der Feldstrom in Durchlass-Richtung ist um Grössenordnungen grösser als der Diffusionsstrom (eingezeichnet ist nur der Elektronenstrom, der Löcherstrom verläuft umgekehrt).

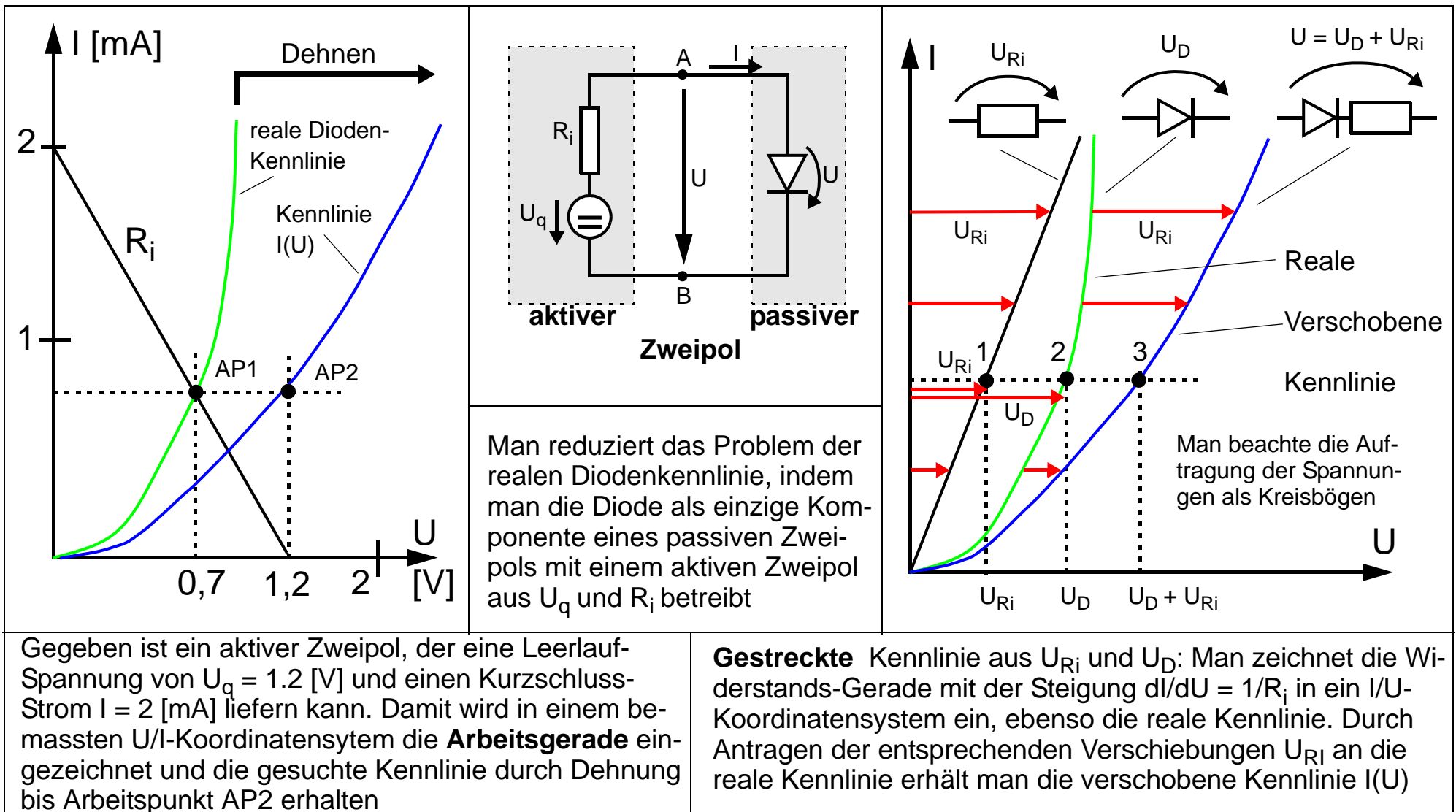
11.12 Einige Kennlinien-Modelle



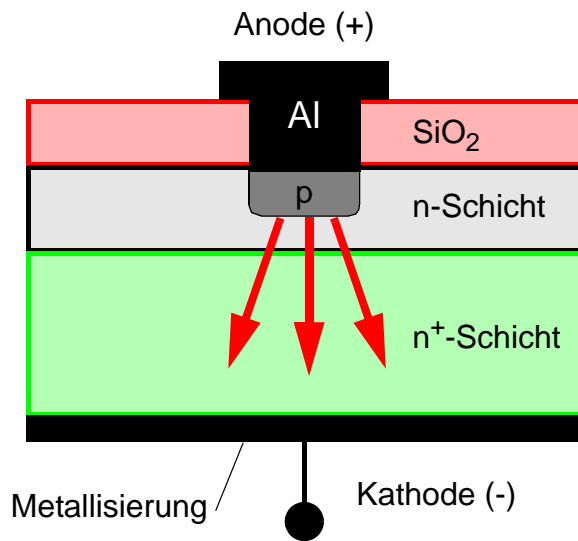
11.13 Der Arbeitspunkt im „Grundstromkreis“

<p>AP = Arbeitspunkt</p>  <p>Kurzschluss-Strom</p> <p>$I_L = I_q$</p> <p>aktiver Zweipol $I_1 = f(U_1)$</p> <p>passiver Zweipol $I_2 = f(U_2)$</p> <p>AP</p> <p>$I \cdot R_a$</p> <p>$I \cdot R_i$</p> <p>Strom-Quelle</p> <p>U</p> <p>Leerlauf-Spannung</p> <p>$U_L = U_q$</p>	 <p>Zweipol</p> <p>Zusammenschalten von aktivem und passivem Zweipol über verlustfreie Verbindungsleitungen (oder z.B. in R_a enthalten) ergibt:</p> <p>$I_1 = I_2 = I$ $U_1 = U_2 = U (= U_{AB})$ „Arbeitspunkt AP“</p> <p>Man erhält zusätzlich die Maschen-Gl.</p> <p>MI : $U + I R_i - U_q = 0$ aktiver Zweipol MII: $I R_a - U = 0$ passiver Zweipol</p> <p>Daraus folgt für Werte bzgl. Punkt A und B:</p> <p>$I = U_q / (R_i + R_a) = U_q / R_{ges}$ und $U = I R_a = U_q R_a / (R_i + R_a)$</p> <p>Es ergeben sich zwei Extremwerte:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $R_a = 0$ (Kurzschluss) $I = I_{max} = I_q$ 2. $R_a \rightarrow \infty$ (Leerlauf) $I = 0$
<p>Grafische Lösung</p>	<p>Analytische Lösung für den Grundstromkreis</p>

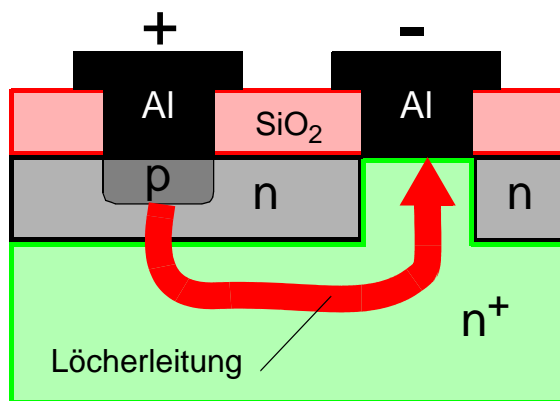
11.13.1 Arbeitspunkt nichtlineare Kennlinie(n)



11.14 Dioden-Bauformen

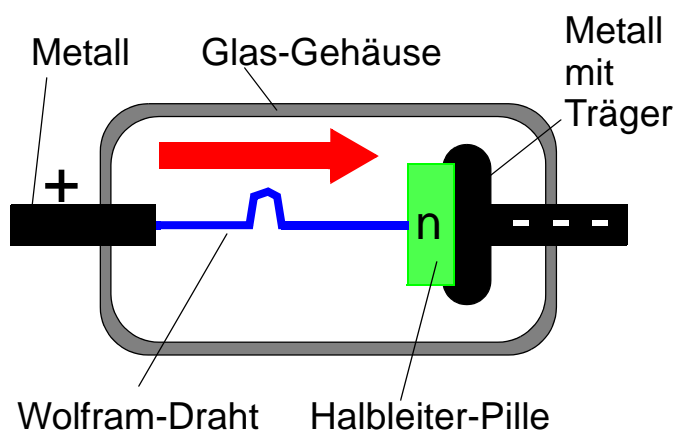


Flächen-Diode: Ausgangspunkt ist die hoch dotierte n^+ -Schicht, auf die man die n-Schicht epitaktisch (durch Aufdampfen) aufwachsen lässt. Nun folgt die SiO_2 -Schicht, die durch Oxidation der n-Schicht erhalten wird. In einem Masken-Prozess werden in die isolierende SiO_2 -Schicht Löcher geätzt, in die man durch Ionen-Implantation eine p-Umdotierung einbringt. Anschliessend erhält die Oberfläche eine aufgedampfte Anode, auf der Unterseite eine aufgedampfte Metallschicht für die Kathode.



Planar-Bauform mit Oberflächen-Kontakten: Hier wird ebenfalls auf die n^+ -Schicht eine epitaktische n-Schicht aufgebracht, allerdings bleibt jeweils eine n^+ -Insel für die Kathode frei. Nun folgt die SiO_2 -Schicht, die anschliessend Löcher für die beiden Metall-Kontakte erhält, die ebenfalls durch Aufdampfen erzeugt werden.

Form eignet sich für Höchst-Integration



Diskretes Bauteil für Einzelbestückung

Spitzen-Diode: Hier haben wir nur ein n-dotiertes Plättchen (Pille) in einem Metallträger. Eine federnde Wolfram-Spitze bildet den Gegenpol. Durch einen kurzen Stromstoss (Formierung) wird ein Akzeptor-Gebiet im n-Plättchen angelegt, wodurch die Spitzen-Diode ihre Gleichrichter-Eigenschaften erhält. Es handelt sich um eine ältere Bauform für schnelle Spezial-Anwendungen, die eine kleine Sperrschicht-Kapazität benötigen. (Siehe auch 11.10)

11.14.1 Dioden-Varianten

		<p>Si-Diode</p>
Zenerdiode	Dioden-Kennlinie mit Zener-Durchbruch	Schaltsymbol

Zener-Diode: Betrieb in Sperr-Richtung, starke Bandverbiegung, sodass bei einer definierten Durchbruchspannung Elektronen infolge der hohen Feldstärke von $E > 10^7$ [V/m] von den Atomrümpfen gelöst werden und einen Strom durch die Sperrschicht ergeben (Tunnel-Effekt). Die Zener-Diode ist ein passiver ZP.

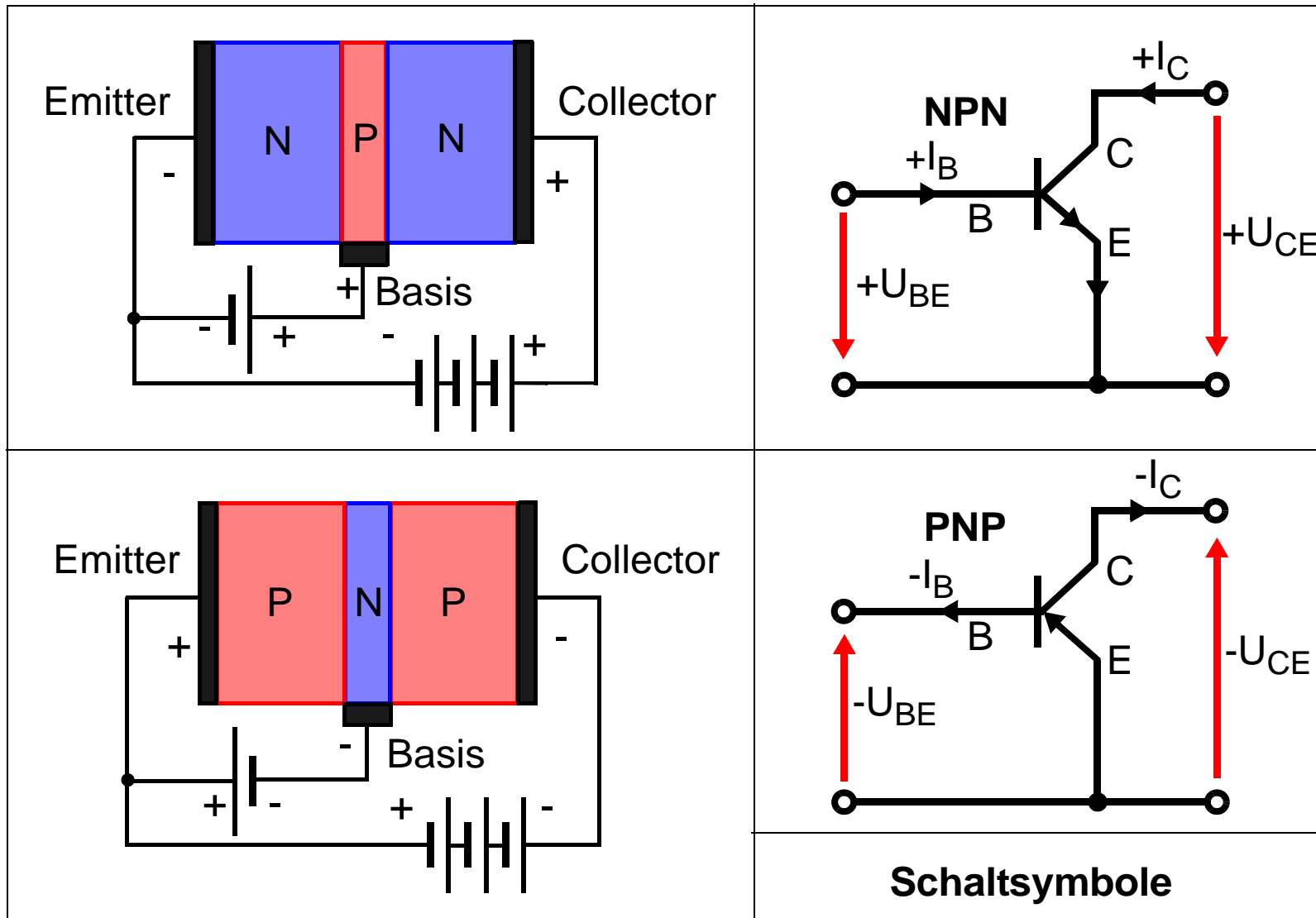
		<p>Foto-Diode</p>
Fotodiode	Kennlinie der Fotodiode	Schaltsymbol

Foto-Diode: Betrieb in Sperr-Richtung, Elektronen-Loch-Paare in der Sperrschicht werden durch die Energie $h \cdot f$ der Lichtquanten aufgespalten und infolge elektrischen Feldes getrennt und ergeben die Foto-Spannung (*passiver Zweip.*) Bei der **Solarzelle** wird ohne Vorspannung in **Durchlassrichtung** eine Leistung $P = 0.1$ [mW] in einen Fotostrom von etwa 50 [μ A] umgewandelt (*aktiver Zweip.*)

		<p>Laser-Diode, LED</p>
Laser-Diode	Kennlinie von LED und Laserdiode	Schaltsymbol

Laser-Diode und Licht emittierende Diode (**LED**): Betrieb in Durchlass-Richtung. Elektronen werden elektrisch auf ein höheres Niveau angehoben und fallen dann auf einen tieferen Energiezustand unter Aussendung von Licht-Quanten, deren Energie der Energie-Differenz des springenden Elektrons entspricht.

12. Der Transistor



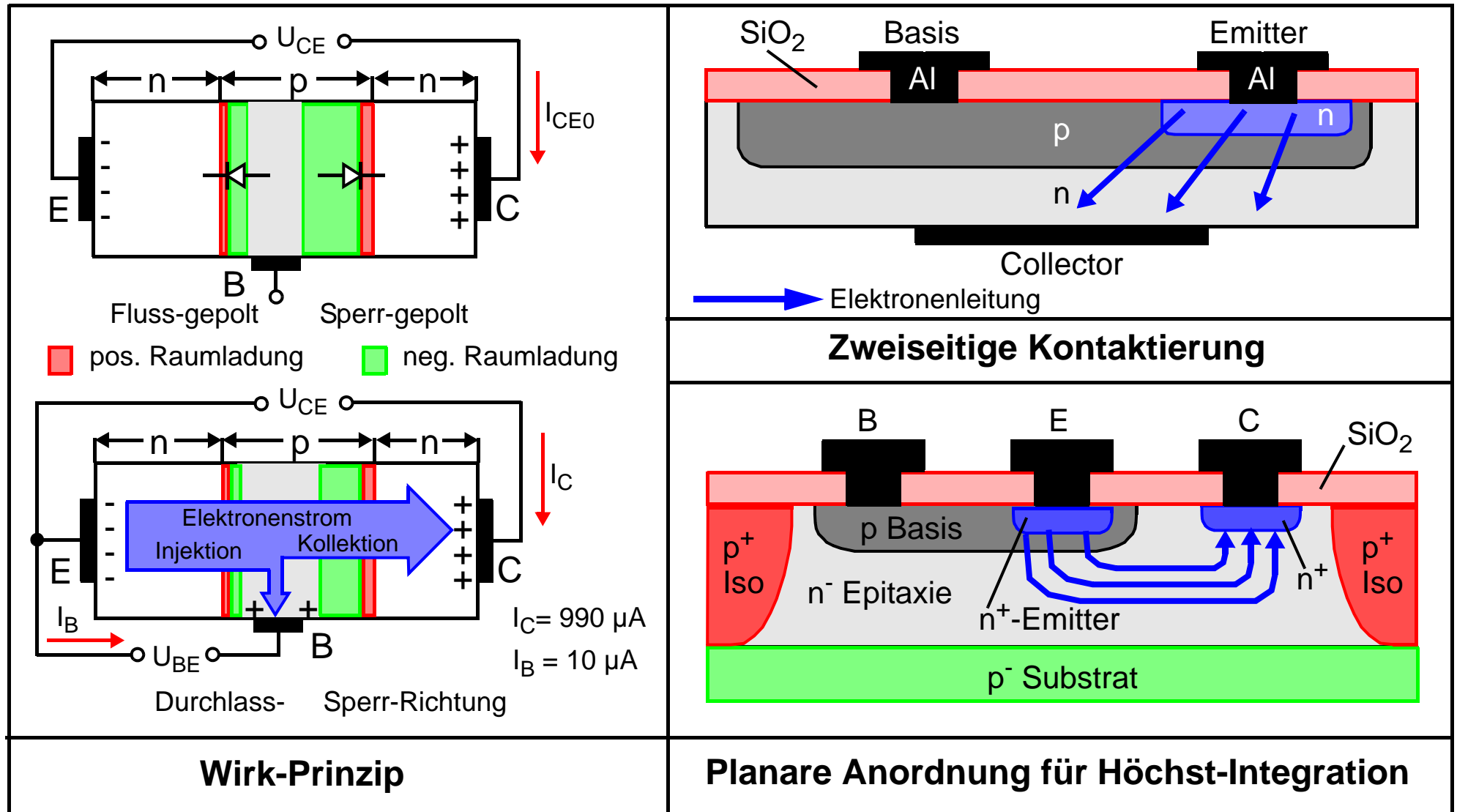
12.1 Grundlegendes

Nach diesen Betrachtungen zum Zweipol Diode wollen wir uns dem dreipoligen Transistor zuwenden, die bei der Diode gemachten Erfahrungen können hier weit gehend angewendet werden. Der Transistor besteht aus einer Folge von drei dotierten Schichten der Reihenfolge NPN oder PNP. Wie aus der historischen Tabelle ersichtlich, wurde diese Konstruktion 1947 von Bardeen, Brattain, Shockley erfunden, damals noch als „Spitzentransistor“. Der ursprüngliche Versuchsaufbau bestand aus zwei metallischen Prüfspitzen, die in geringem, gegenseitigem Abstand auf einem Germanium-Kristall auflagen. Dadurch ergaben sich zwei Metall-Halbleiter-Kontakte. Als grundlegende Idee diente das Vorbild einer Steuer-Elektrode bei Elektronen-Röhren, die eine Diode zu einer Triode mit steuerbarem Elektronenstrom machte: Mit einer kleinen Steuerspannung konnte man einen grossen Nutzstrom steuern, bzw. verstärken. Der Name Transistor leitet sich ab aus **Transfer** und **Resistor**, was auf den Verstärker-Effekt hinweist, auf den noch eingegangen wird.

Der geschilderte Aufbau wurde schon bald modifiziert, er ist modellhaft in 12. angegeben für NPN- und PNP-Transistoren. Dort sind auch die Schaltsymbole gezeigt, der Emitter-Pfeil symbolisiert die oben geschilderte Prüfspitze, die Richtung geht wie immer von Plus nach Minus. Weiterhin ist der schematische Aufbau und die elektrische Beschaltung skizziert. Der Transistor besitzt drei Elektroden, die **Collector** (Sammler), **Emitter** (Aussender) und **Basis** genannt werden. Die Basis liegt immer zwischen Collector und Emitter und besitzt im Vergleich zu diesen eine sehr geringe Dicke. In obiger Folie sind beide Dotierungsarten aufgeführt, wir wollen uns aber im Folgenden nur mit dem NPN-Transistor befassen (zum PNP kommt man, wenn man alle Dotierungen, Ströme und Spannungen umkehrt). Die Bezeichnung **bipolar** leitet sich aus der Verwendung beider Dotierungsarten ab, somit auch beider Leitungsarten (Elektronen und Löcher). Wie zu sehen, wird beim NPN-Transistor der N-Emitter negativ, der N-Collector und die Basis positiv angeschlossen, dadurch bilden sich zunächst zwei PN-Übergänge: Basis-Emitter in Durchlass- und Basis-Collector in Sperr-Richtung.

Oft wird in der Literatur die Meinung vertreten, dies sei die Zusammenschaltung zweier Dioden. **Diese Ansicht ist falsch**, da bei der Zusammenschaltung (Verlöten) eine massive Metallschicht vorliegt, beim Transistor dagegen die ungestörte Folge N-P-N ohne störenden Zwischenraum

12.2 Transistor, Schema



12.2.1 Legende 1

Zur Erklärung der Funktionsweise des Transistors wollen wir in 12.2 links oben zwei verschiedene Zustände der Transistor-Beschaltung betrachten, die sich in den Kennlinien wiederfinden werden. Zunächst wird nur die Spannung U_{CE} zwischen Collector und Emitter angelegt, die Basis wird noch im Leerlauf betrieben. Die pn-Grenzschicht (Basis-Collector) wird in Sperr-Richtung (eingezeichnetes Dioden-Symbol), die np-Schicht in Durchlass-Richtung betrieben. Aus den Betrachtungen zur Diode folgt, dass sich dabei zwischen Basis und Collector eine breite Doppel-Sperrschicht mit einer hohen Potenzial-Differenz ausbildet, an der fast die ganze angelegte Spannung U_{CE} abfällt. Der restliche Spannungsabfall erfolgt an der schmalen, in Durchlass-Richtung gepolten Grenzschicht zwischen Emitter und Basis. Als Randbedingung für dieses Verhalten wird die Dotierung so gewählt, dass die p-Schicht der Basis nur schwach dotiert wird, also wenig Majoritätsträger (Defekt-Elektronen) enthält, dadurch dehnt sich die Grenzschicht zwischen Basis und Kollektor nicht in Richtung der Kollektor-Dotierung aus. Da nur eine kleine Spannung an der linken Grenzschicht abfällt, reicht diese nicht aus, die Basis-Emitter-Diode durchzuschalten. Somit fließt bei leerlaufender Basis nur ein verschwindend kleiner Sperrstrom zwischen Emitter und Collector.

Im nächsten gedanklichen Schritt wird die Spannung U_{BE} so angelegt, dass die p-Schicht positiv vorgespannt ist. Der Elektronen liefernde Minuspol wird mit dem Emitter verbunden, dadurch wird die Raumladung des np-Übergangs weitgehend abgebaut. Somit wird die Potenzialdifferenz auch verringert und es können nun mehr Elektronen aus der n-Schicht des Emitters (daher der Name) in das p-Gebiet der Basis gelangen. Da dort eine geringe Dotierung vorgegeben ist, können nur wenige Elektronen mit den Löchern der p-Schicht rekombinieren, sie werden durch die positive Polarität des Collectors angezogen und „gesammelt“, wobei die ebenfalls dünner gewordene Raumladungsschicht kein Hindernis mehr darstellt. Diese gesammelten Elektronen stellen den Collectorstrom I_C dar. Nur die wenigen Elektronen, die durch Rekombination aus der Bilanz verschwinden, müssen durch die Spannungsquelle U_{BE} ersetzt werden, dies bedeutet einen kleinen Basisstrom $I_C \gg I_B$ oder eine Stromverstärkung $B = I_C/I_B \approx 10 \dots 500$.

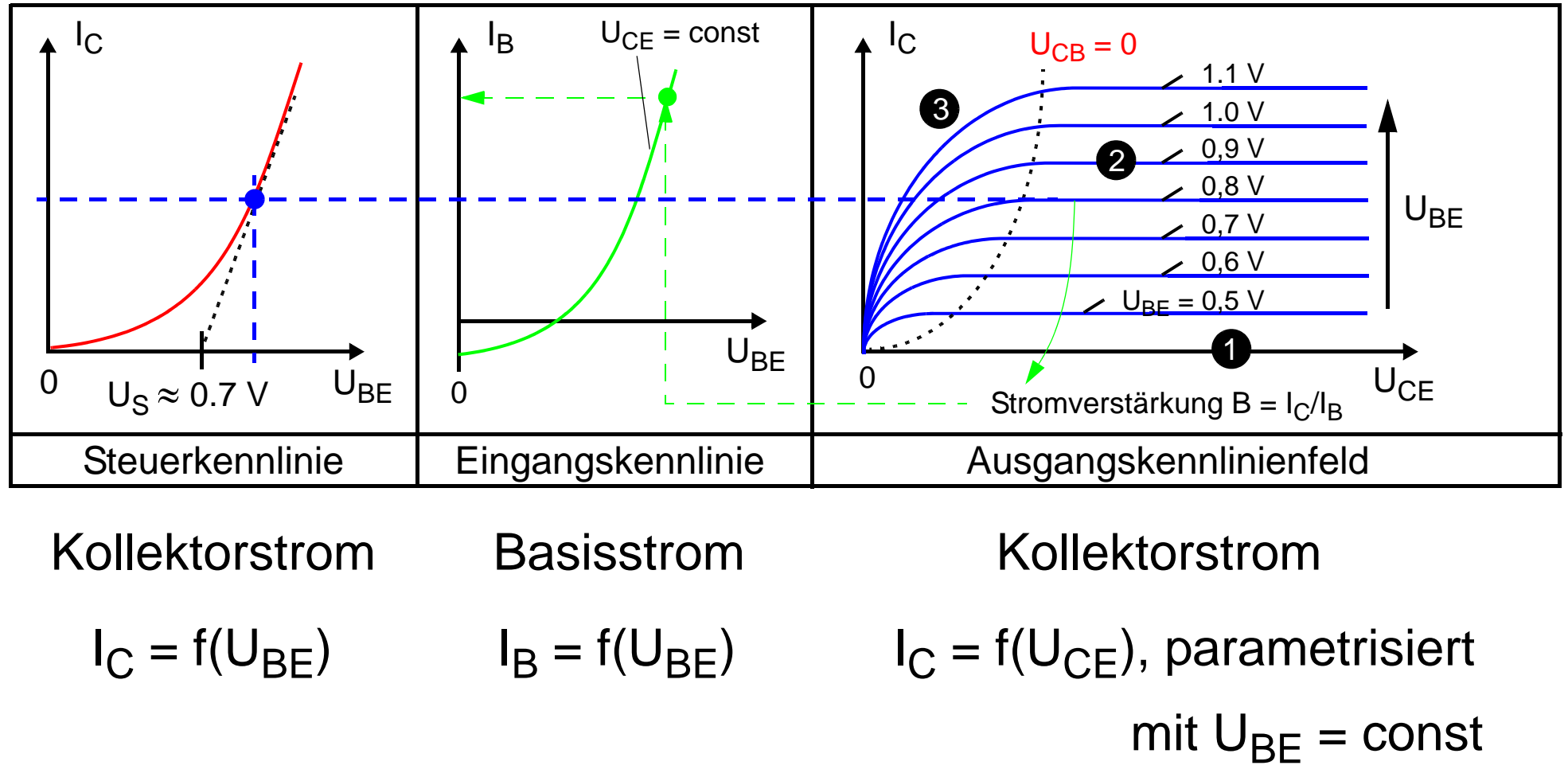
Im Allgemeinen ist auch $I_C \sim I_B$, dies ist der eigentliche Transistor-Effekt, bei dem man mit einem kleinen Basisstrom einen grossen Collectorstrom steuert. Man beachte die skizzierte Aufspaltung des Elektronenstroms.

12.1.2 Legende 2

In 12.2 ist rechts der Weg zur Höchstintegration von monolithisch integrierten Bipolar-Transistoren skizziert: Das obere Teilbild zeigt einen gedanklichen Zwischenschritt auf dem Weg zu einer völlig planaren Anordnung aller Schichten. Die Schichtfolge N-P-N ist korrekt, allerdings muss bei dieser Anordnung die Kontaktierung des Collectors noch von unten, somit aus dem Wafer erfolgen. Ebenfalls skizziert sind die Kontakte aus Aluminium (oft auch aus Metall-Silizium-Verbindungen = Silicide) und die deckende Oxidschicht aus Quarz (SiO_2). Die Pfeile aus der n-Dotierung des Emitters stellen den Elektronenstrom dar, der auf dem Weg zum Kollektor in geringem Mass rekombiniert.

Das rechte, untere Teilbild zeigt den endgültigen Aufbau eines planaren, nur von oben versorgten NPN-Bipolar-Transistors. Wir besprechen die Schichtfolge von unten nach oben, somit in der Reihenfolge der noch zu schildernden Prozess-Schritte: Zunächst wird auf der Waferoberfläche eine Deckschicht aus schwach dotiertem P-Substrat aufgebracht (angedeutet durch p^- , dies hat hier nichts mehr mit den Ladungen zu tun, diese stecken implizit in N oder P). Darauf folgt eine durch Aufdampfen (Epitaxie) erzeugte (schwach dotierte) n^- -Schicht, in die durch Ätzen tiefe Gruben erzeugt werden, in denen die den Einzeltransistor umgebende p^+ -Isolierwanne ebenfalls durch Epitaxie „eingefüllt“ wird. Die p^+ -Isolierwannen sind gesperrte pn-Übergänge zur gegenseitigen Abschirmung der Transistor-Inseln. Mit der entsprechenden Maske wird durch Ionen-Implantation (Beschuss der Oberfläche mit Dotierungs-Ionen, deren Beschleunigungsspannung zwischen kV und MV liegt, je nach gewünschter Eindringtiefe) die p-Basis erzeugt. Charakteristisch sind die in der Tiefe liegenden Rundungen. In einem weiteren Prozess-Schritt folgt die gleichzeitige Ionen-Implantation der beiden hoch dotierten n^+ -Kontakte für Collector und Emitter. Darüber wird eine alles überdeckende Schicht Silizium aufgedampft, die anschliessend bei 1000-1300°C oxidiert wird. Beim vorletzten Prozess-Schritt werden die Öffnungen für das Einbringen der Kontakte freigeätzt, dann folgt die „Metallisierung“ der Anschlussmatrix.

12.2 Die Kennlinien des Transistors



12.2.1 Legende

Nach diesem vorgezogenen, kurzen Ausflug in die Herstellung von höchstintegrierten Bausteinen wollen wir uns den Kennlinien der Bipolar-Transistoren zuwenden. Da der Transistor drei Anschlüsse besitzt, gibt es viele Möglichkeiten der gegenseitigen Abhängigkeiten, als zweckmässig hat sich die in 12.2 gezeigte Dreiteilung durchgesetzt. Man trägt über U_{BE} den Collectorstrom I_C (Steuerkennlinie) und den Basisstrom I_B (Eingangskennlinie) auf. Die **Steuerkennlinie** beschreibt, welchen Collectorstrom man mit welcher Spannung U_{BE} einstellen kann, die Eingangskennlinie liefert den zugehörigen Basisstrom I_B , damit kann die Stromverstärkung B ermittelt werden. Liegt die Eingangs-Spannung $U_{BE} > U_S$, so werden vom Emitter Elektronen in die Basiszone injiziert, die wegen der Ausgangs-Spannung $U_{CE} > 0$ zum Kollektor hin abgesaugt werden, wo sie den Ausgangsstrom I_C bilden.

Die **Eingangskennlinie** beschreibt die Belastung der ansteuernden Signalquelle für $U_{CE} = \text{const.}$

Es gibt aber auch Kennlinien-Diagramme z.B. in [Paul99], bei denen I_C direkt über I_B dargestellt wird (Stromübertragungs-Kennlinie).

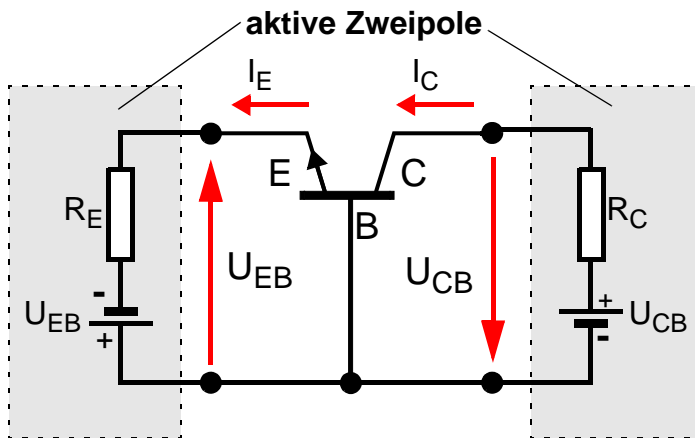
Das **Ausgangskennlinienfeld** ist parametrisiert mit der Basis-Emitterspannung U_{BE} , ab der Collector-Basisspannung $U_{CB} = 0$ verlaufen alle parametrisierten Kennlinien linear und parallel zu einander. Für die Zwecke der digitalen Informationsverarbeitung sind die Kennlinienfelder nicht von der Bedeutung, die ihnen in der Analogtechnik z.B. bei Verstärkern zukommt. Für die nachfolgenden Betrachtungen wollen wir das Kennlinienfeld aus der Sicht der Spannungs-Pegel betrachten (Si: $U_S = 0,7 \text{ [V]}$ = Schwellspannung):

Im Bereich 1 sind beide PN-Übergänge gesperrt = nichtleitend, dies entspricht einem Schalter mit geöffneten Kontakten. Es gilt $U_{BE} \leq U_S$, $U_{BC} \leq U_S$

Bereich 2: Dies ist der lineare Bereich, ein PN-Übergang ist leitend (Durchlass-Richtung) einer gesperrt, dies ist der Verstärker-Bereich mit $U_{BE} > U_S$, $U_{BC} \leq U_S$ (Normalbetrieb)

Alle Kurvenpunkte im Bereich 3 sind dadurch erreichbar, dass beide PN-Übergänge in Durchlass-Richtung gepolt (leitend) sind, dies entspricht einem Schalter mit geschlossenen Kontakten. Die entsprechenden Pegel sind: $U_{BE} > U_S$, $U_{BC} > U_S$. Dies ist der gesättigte Bereich mit einem besonders niedrigen Widerstandswert.

12.3 Arbeitspunkt(e)

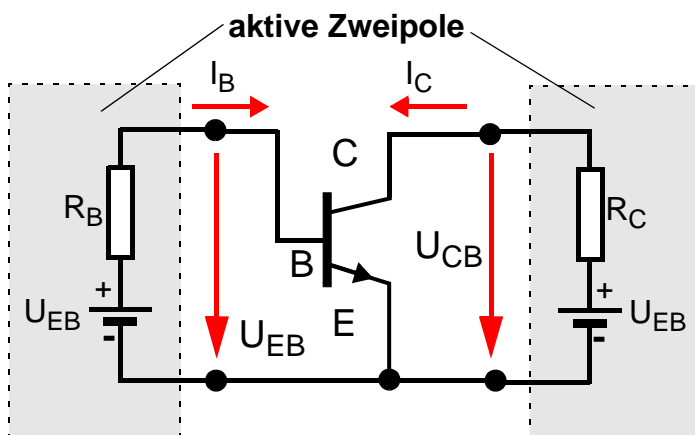


Zum Grundverständnis der Transistor-Schaltungen setzt man links und rechts je einen aktiven Zweipol ein. Schaltungstechnisch aufwändig, da ungleiche Polarität. Kennlinien:

$$I_E = f(U_{EB}, U_{CB})$$

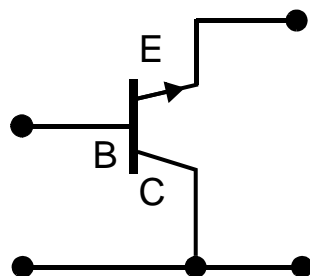
$$I_C = g(U_{EB}, U_{CB})$$

Basis-Schaltung mit NPN-Transistor



Für Verstärker-Schaltungen. Einfacher, da identische Polung der aktiven Zweipole

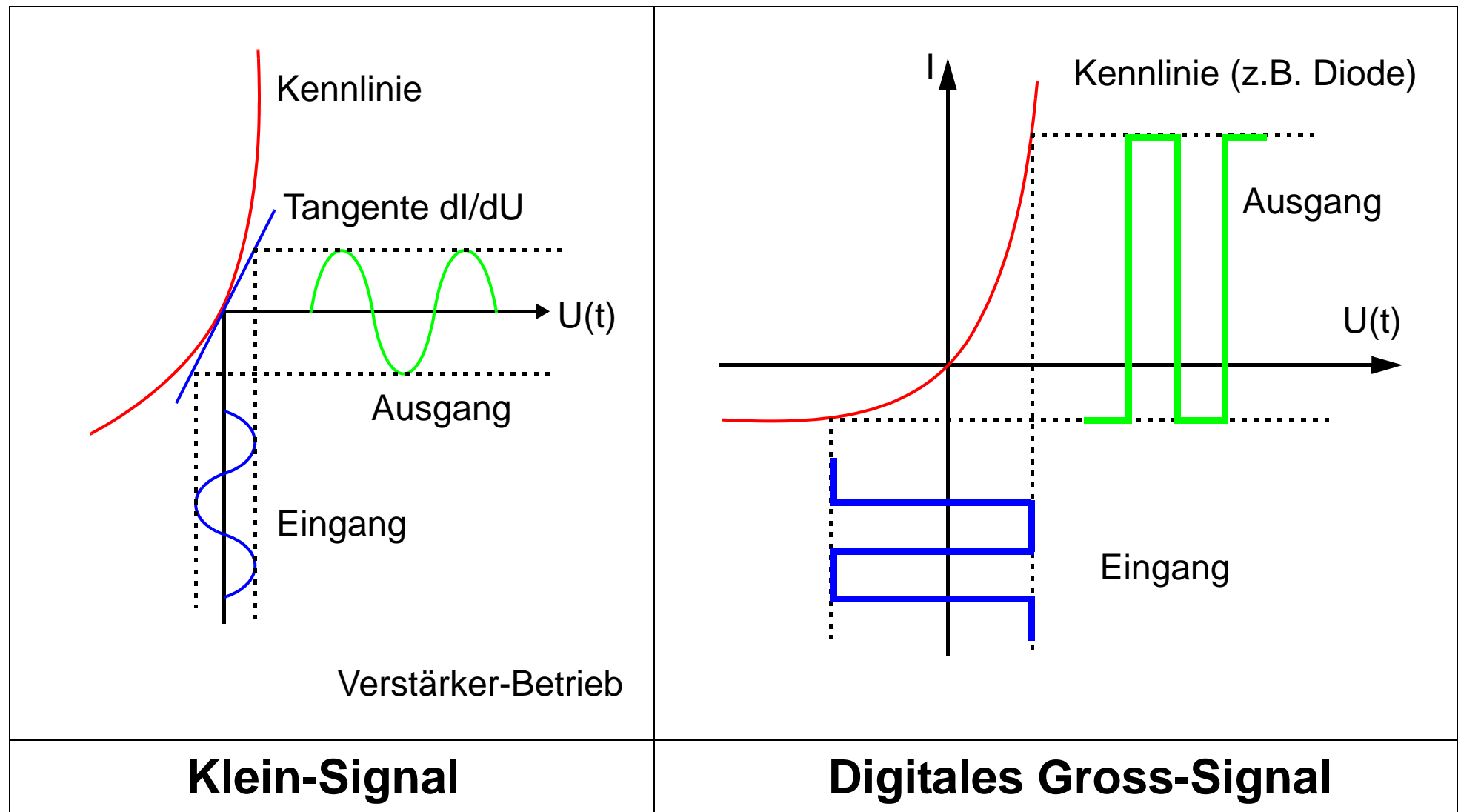
Emitter-Schaltung (Polung der Zweipole beachten)



Ist der Transistor überhaupt ein **passiver**, nichtlinearer Vierpol? Ja für Gleichspannungen/ -ströme, da er immer Leistung verbraucht.

Kollektor-Schaltung

12.4 Signal-Verhalten



13. Höchstintegration

Motivation für die Höchst-Integration:

Ausbeute an funktionsfähigen Schaltungen $Y = \exp(-DA)$, wobei D die Defektdichte [Defekte/mm²] und A die Chipfläche ist. Bei einer Verdoppelung der Chipfläche A sinkt die ursprüngliche Ausbeute auf 37% bei einer Verdreifachung des Preises. Dies spricht gegen die Höchst-Integration.

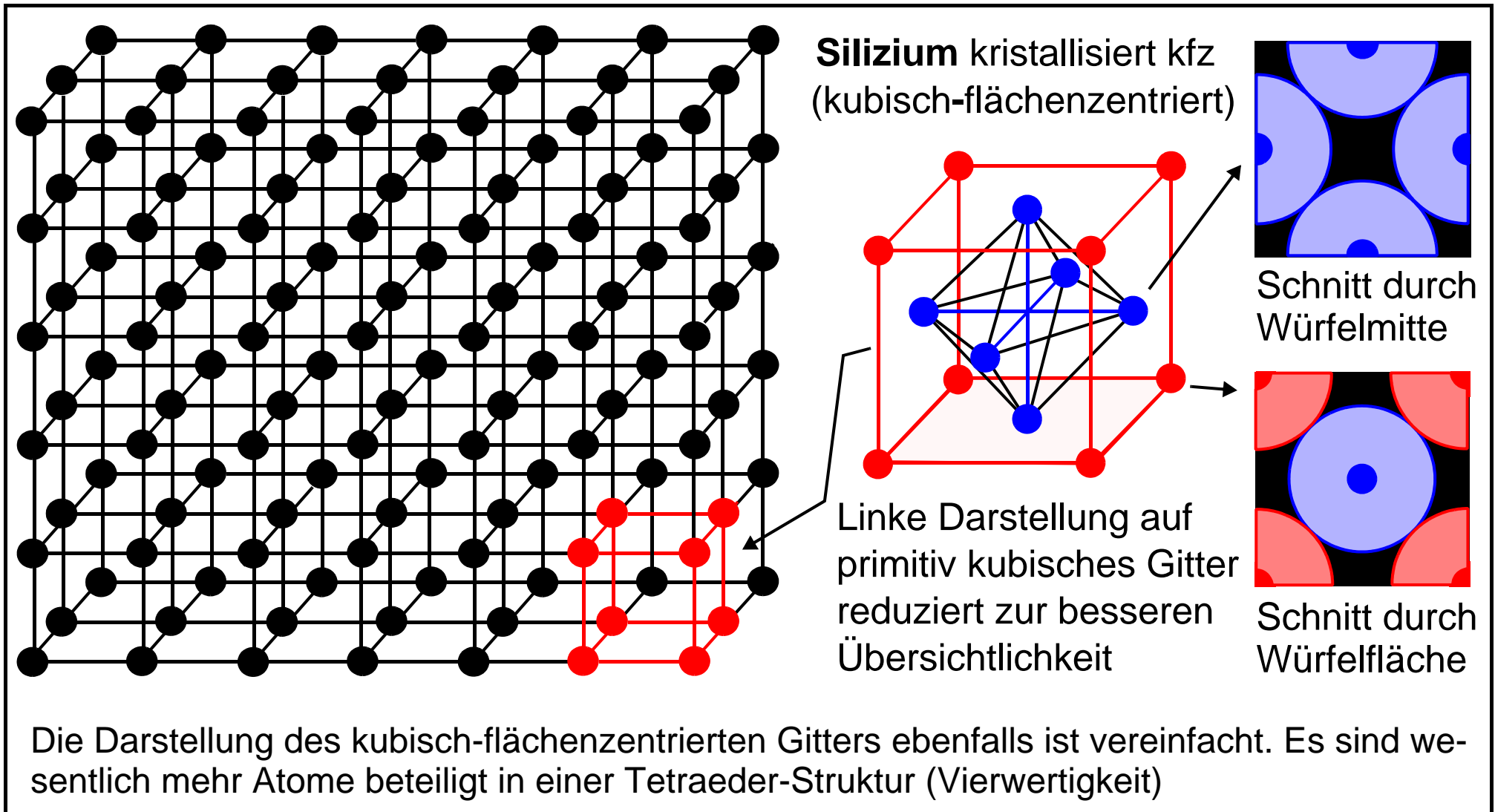
Andererseits sind die Herstellungskosten K für eine Si-Scheibe (Wafer) und die Foto-Masken immer konstant, unabhängig von deren Durchmesser. Da man aber auf eine grössere Scheibe auch n mal mehr Bauelemente unterbringen kann, sinken deren Herstellungskosten auf einen Anteil $K' = K/n$. Weiterhin werden die Bauelemente in einem Parallel-Prozess auf dem Wafer erzeugt, sodass auch hier geringere anteilige Kosten anfallen.

Aus dem Gesagten ergibt sich, dass man zu immer höheren Integrationsdichten gehen muss, verbunden mit einer gleichzeitigen Verbesserung der Defektdichte D .

Sehr langfristig wird man an einer „Wafer Scale Integration“ nicht vorbeikommen, hier wird die Scheibe nicht mehr zerschnitten in einzelne Chips, die anschliessend wieder auf der Platine über Leitungen verbunden werden, sondern die gesamte Verdrahtung erfolgt auf dem Wafer.

Begonnen wurde mit einer Zahl der Funktions-Elemente von ca. 10^2 (SSI = Small Scale Integration), gegenwärtig ist man bei $10^5 \dots 10^6$ (VLSI = Very Large Scale Integration), demnächst bei $10^6 \dots 10^9$ (ULSI = Ultra Large Scale Integration). Bei Werten über 10^9 gelangt man zu obiger Wafer Scale Integration.

13.1 Silizium-Einkristall



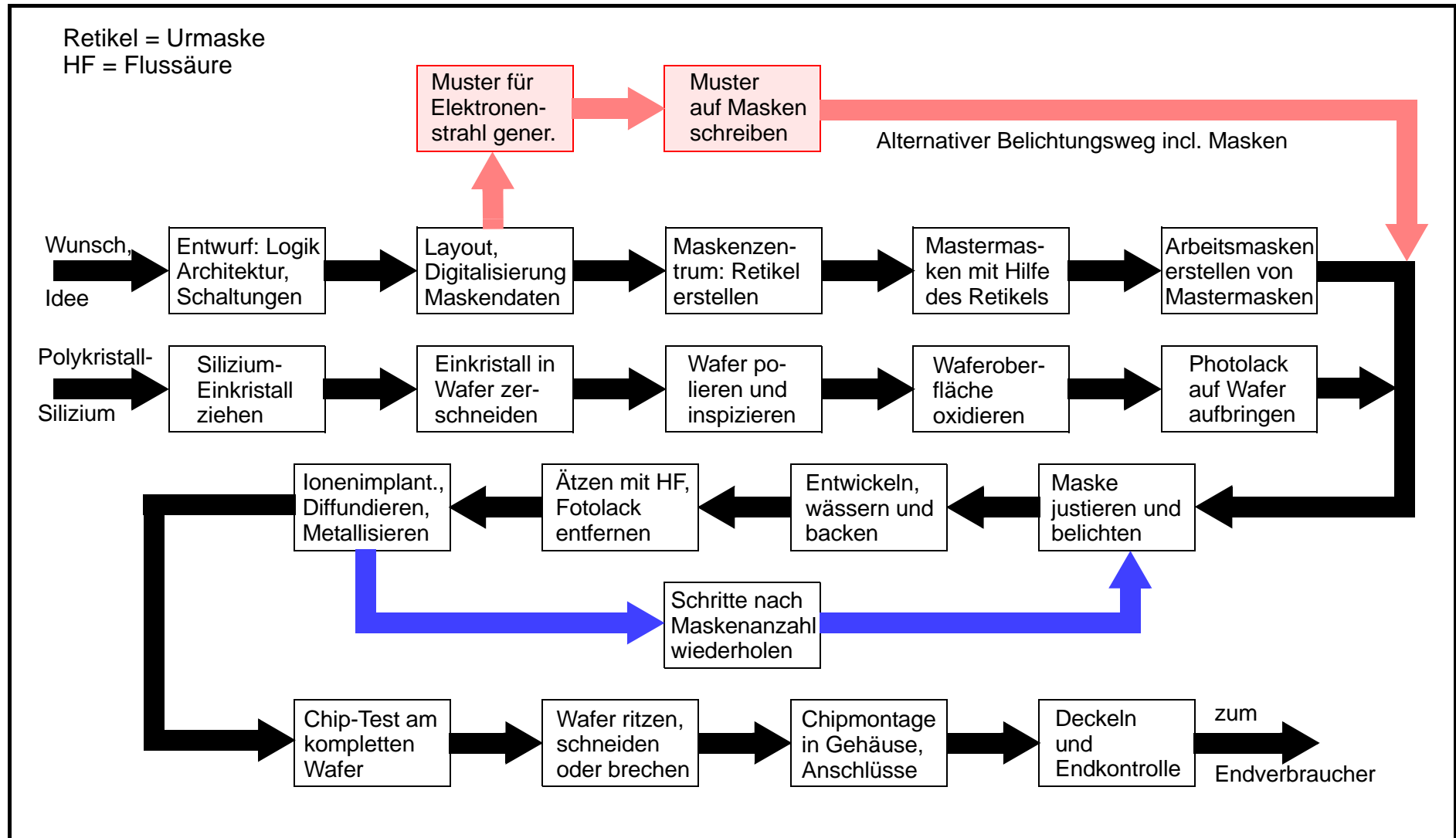
13.1.1 Legende

Man stelle sich vor, dass der zuvor skizzierte Atomverband aus Si-Atomen in jede Richtung noch ca. 5000 km weitergeht, dann hat man eine Vorstellung von der hohen Reinheit und Ordnung in einem Einkristall. Jedes grössere Fremdatom erzeugt eine Gitterverzerrung, im schlimmsten Fall wächst der Einkristall falsch weiter.

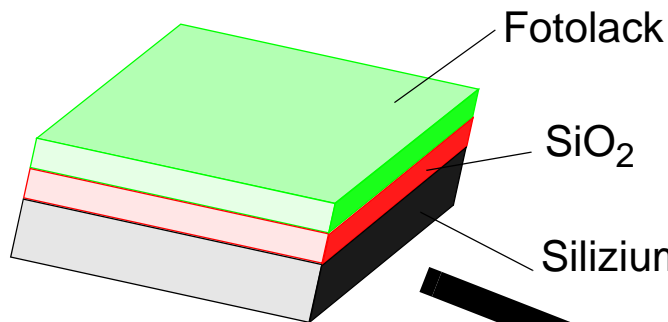
Da Silizium ein vierwertiges “Halbmetall” ist, muss man durch Zugabe 5-, bzw. 3-wertiger Elemente (As, P-Ionen) Elektronen- oder Löcherleitung zum Ladungstransport im Chip erzeugen. Der Silizium-Einkristall ist relativ spröde, trotzdem lässt er sich gut in ca. 0,5 mm dicke Wafer (Scheiben) zersägen.

Diese lassen sich hervorragend polieren, dann oxidieren (SiO_2 ist der ideale Isolator). Andererseits löst sich SiO_2 sehr gut in Fluss-Säure (HF) auf. Der Abdecklack zum Ätzen löst sich an den mit Licht oder dem Elektronenstrahl “belichteten” Stellen auf. Damit scharfe Kanten (im Nanometerbereich) entstehen, wird in der Gasphase geätzt, dies gilt auch für die Dotierung (Ionenimplantation). Beim Metallisieren (Leiterbahnen) ist auf thermische Verträglichkeit der Ausdehnungskoeffizienten aller Partner zu achten (früher Au oder Al, heute Cu).

13.2 Von der Idee zum fertigen Chip



13.2.1 Lithografie

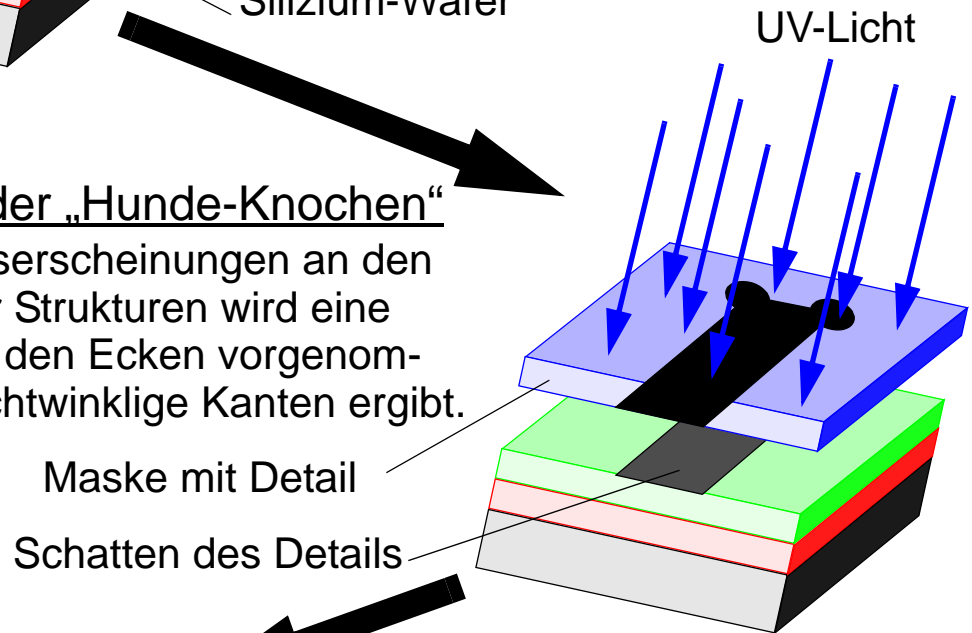


1. Ausgangs-Wafer

Wafer gleichmässig oxidiert und lackiert

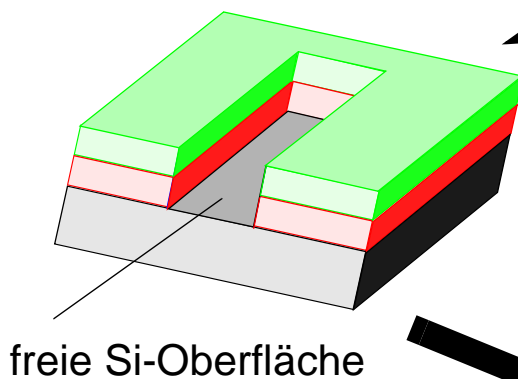
2. Abkopieren der „Hunde-Knochen“

Wegen Beugungserscheinungen an den Berandungen der Strukturen wird eine Überkorrektur an den Ecken vorgenommen, die dann rechtwinklige Kanten ergibt.



3. Nach Lack-Entwicklung und Ätzen

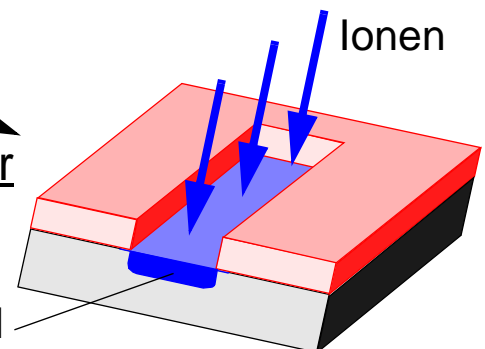
Der ausgehärtete Lack löst sich nur an den nicht belichteten Stellen auf (oder auch umgekehrt). Dann wird das frei gelegte SiO₂ mit HF weg-geätzt



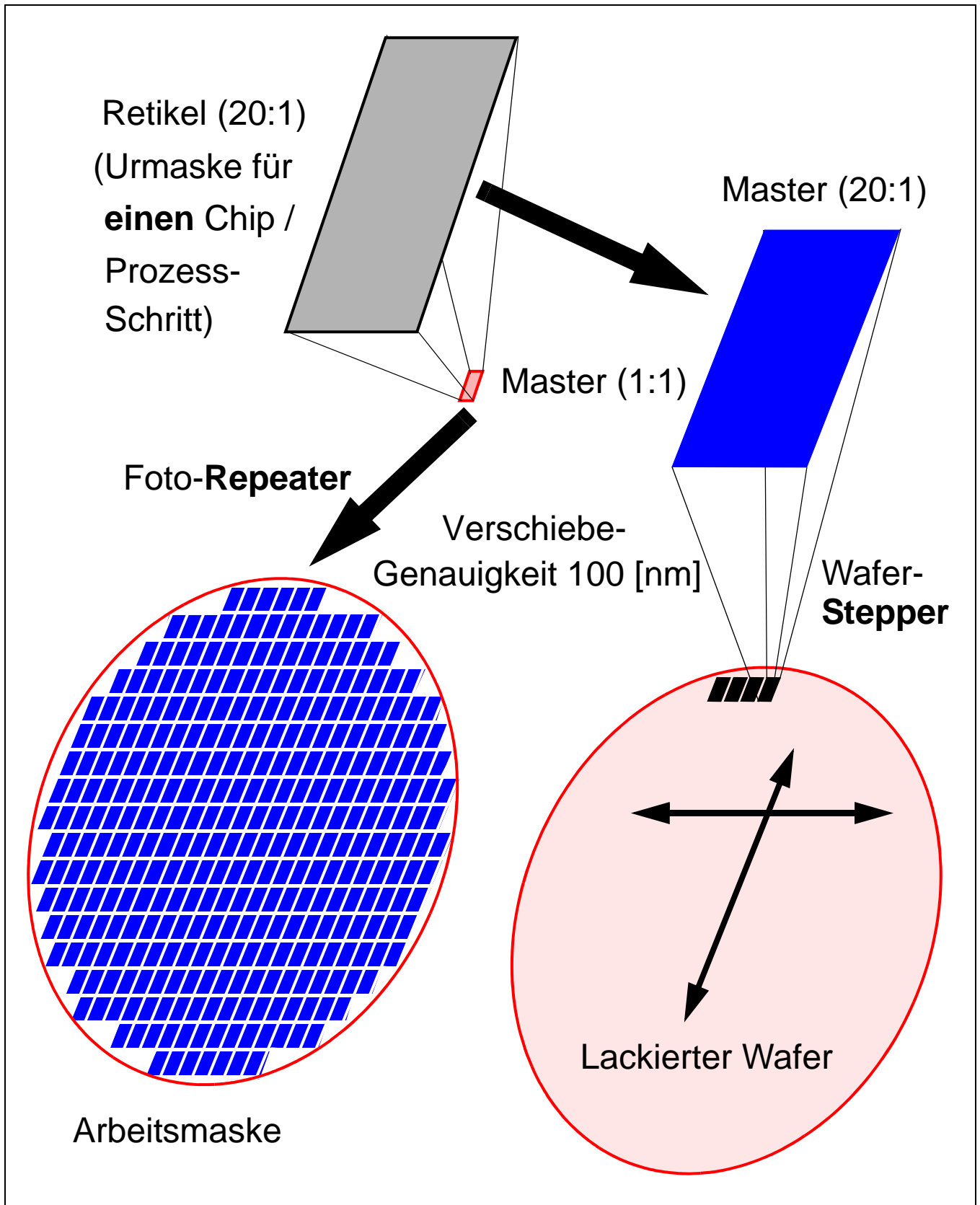
4. Dotierung der freigelegten Struktur

Der Lack wird abgelöst; in die offenen Stellen kann nun dotiert werden, z.B. durch Ionen-Implantation

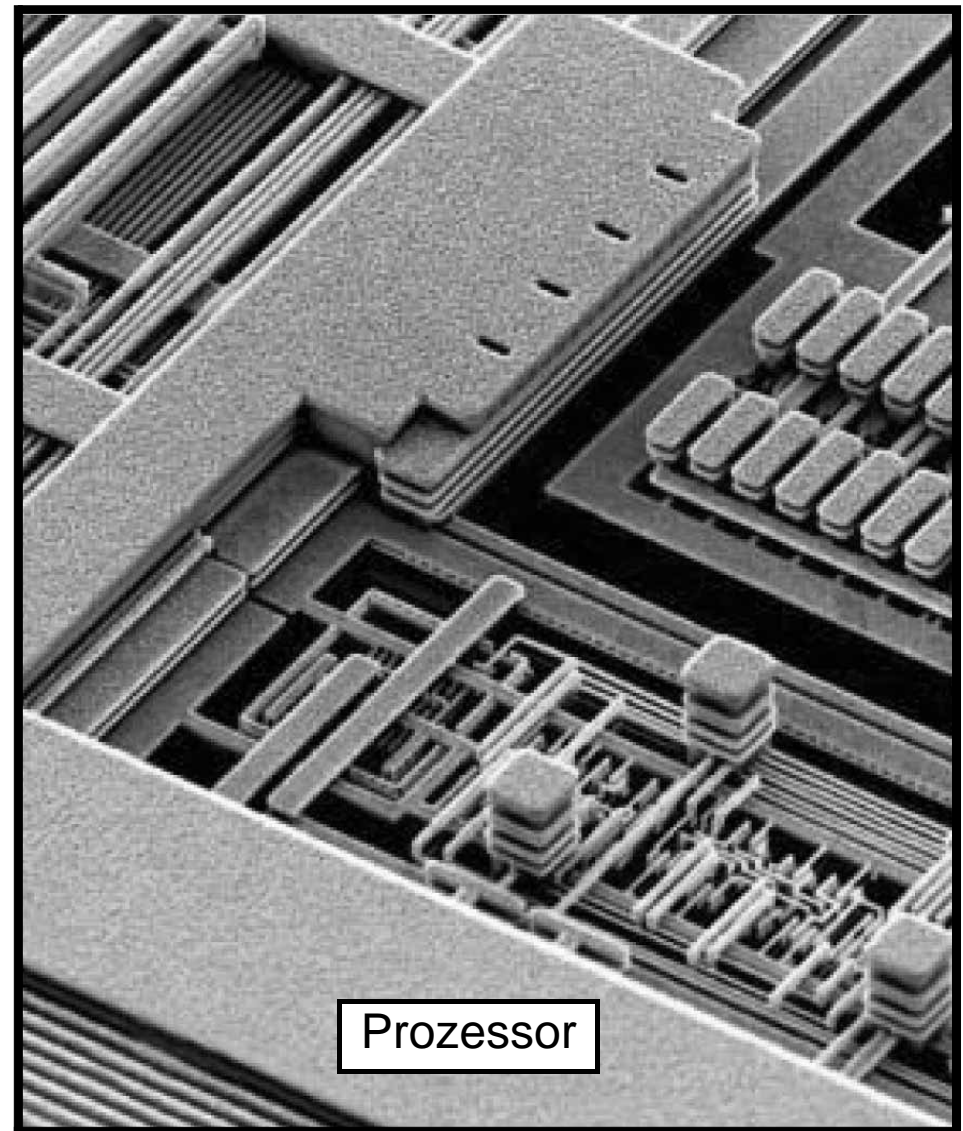
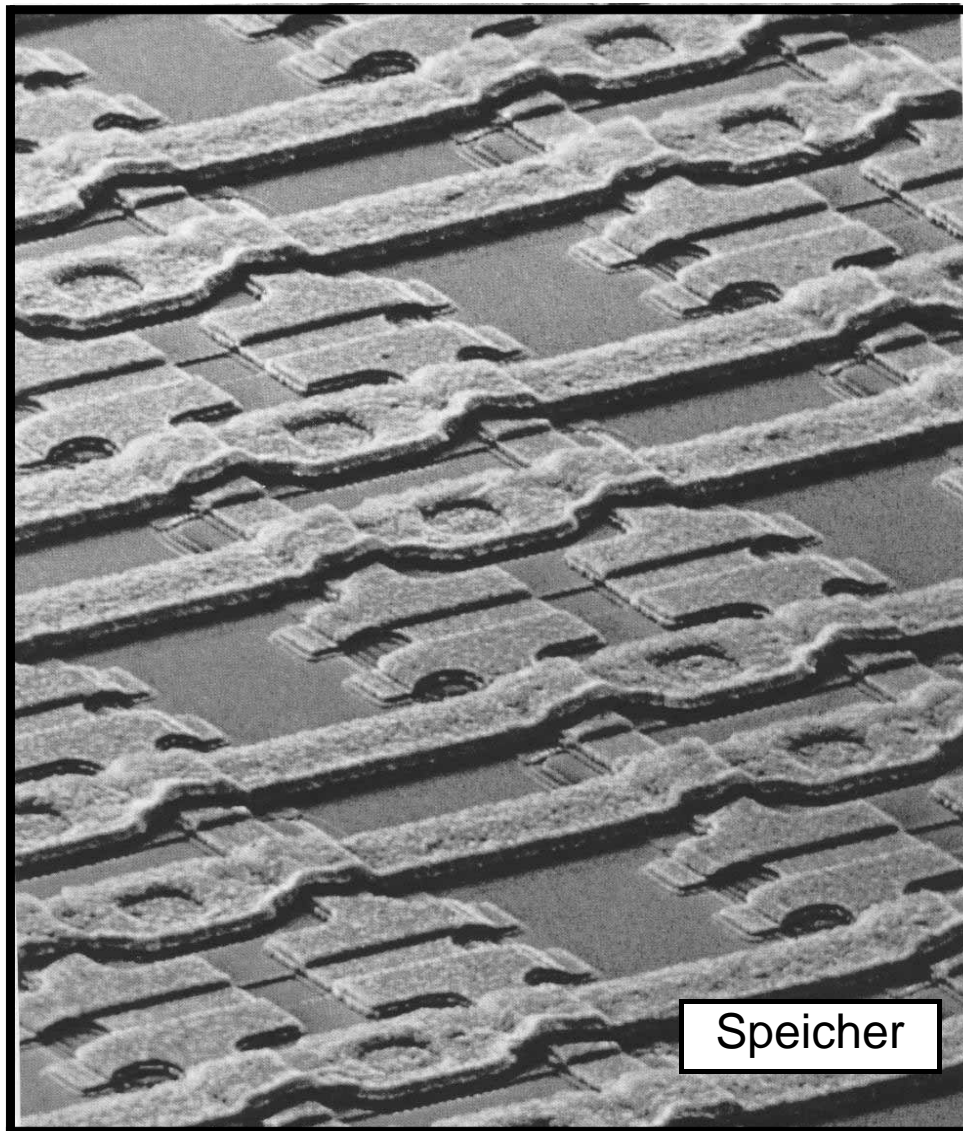
Dotier-Profil



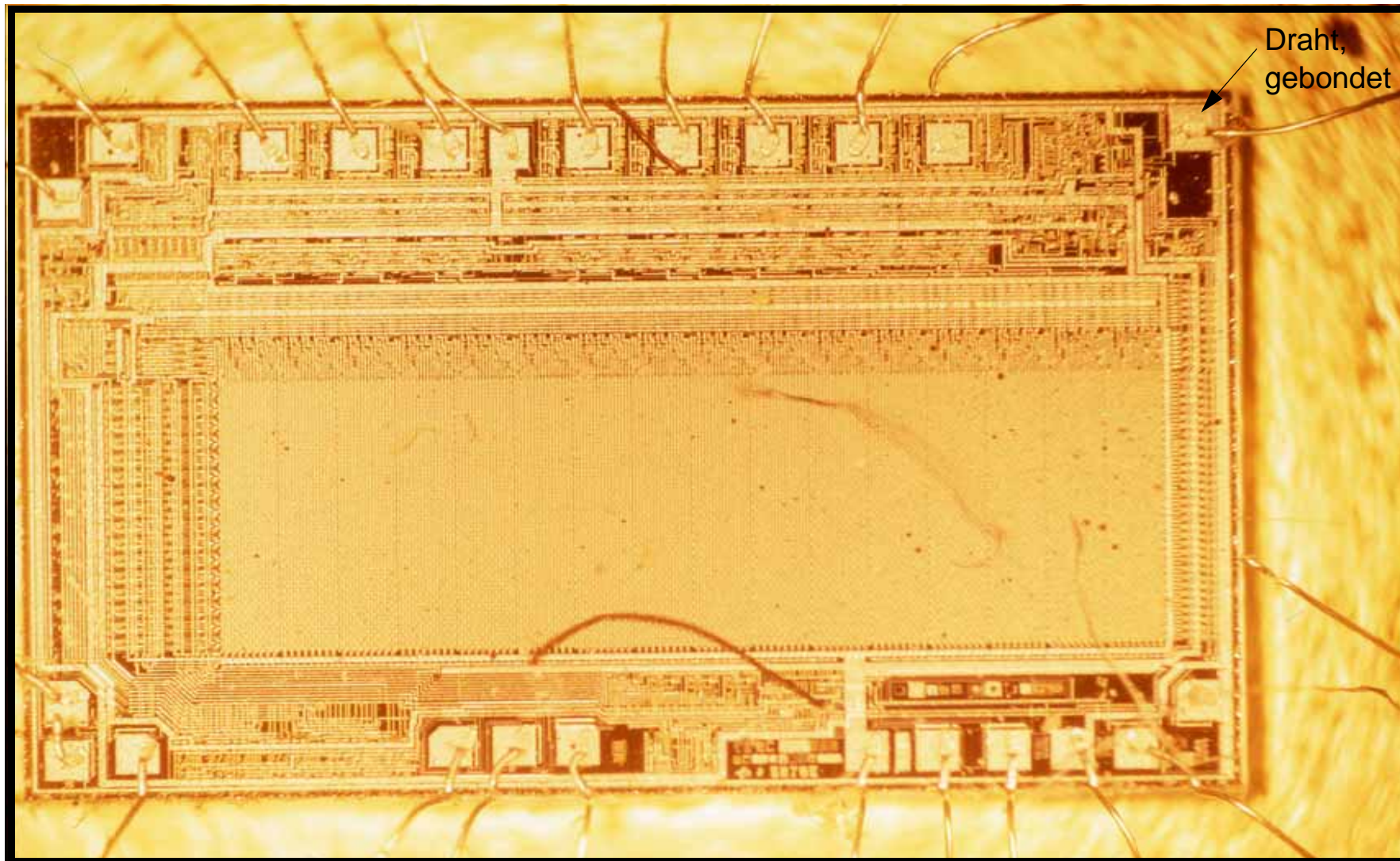
13.2.2 Maskierungen



13.2.3 „Innen-Ansicht“ zweier Chips



13.2.4 Chip-Verdrahtung im Gehäuse



13.2.5 Weitere Details Höchst-Integration

Epitaxie: Man lässt eine einkristalline, dünne Schicht aus der Gas- oder Flüssig-Phase auf dem Einkristall-Wafer aufwachsen. Diese Schicht ist dann dotierbar. So lässt sich auf einer niedrigohmigen Schicht eine hochohmige Schicht aufbringen.

Dotierung: Der gewünschte Leitungstyp (n oder p) wird mit den folgenden Verfahren erzielt

- **Diffusion:** Die bereits aufgebrachte Schicht aus Fremd-Atomen wird bei Temperaturen von 1000...1200°C zur Wanderung in die Unterlage veranlasst. Das Störstellenprofil ist abhängig von Parametern wie Temperatur, Zeit, evtl. Gasdruck, usw.
- **Implantation:** Hier werden Ionen (Dotier-Atome mit fehlenden Elektronen) in einer aus der Fernsehtechnik abgeleiteten „Kanone“ mit hoher Energie (keV...MeV) in das Halbleiter-Substrat eingeschossen. Die dort entstehenden Gitterstörungen müssen durch nachträgliches Tempern bei 800...1000°C wieder ausgeheilt werden. Mit der Ionen-Implantation lassen sich sehr dünne Schichten im Mikrometer-Bereich mit steilem Dotierungs-Profil herstellen.

Schicht-Herstellung: Diese dient vielen verschiedenen Zwecken, je nach Material

- Dielektrische **Isolierschichten** aus SiO_2 oder Si_3N_4 zur Maskierung, Isolation oder auch als Schutzschicht am Prozessende
- **Metallschichten** für Elektroden-Anschluss und Verbindungs-Leitungen. Material ist Al, Cu, Au, Metall-Silicid
- Dünne **Halbleiterschichten:** Epitaktische Schichten für Funktions-Elemente, Polykristalline Si-Schichten auf einer isolierenden Unterlage für Widerstände, Feldeffekt-Transistoren

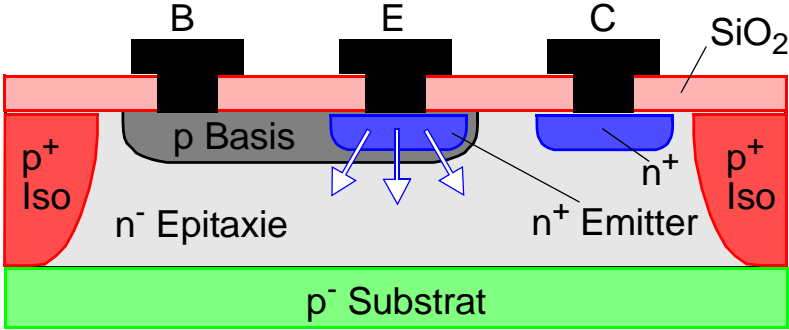
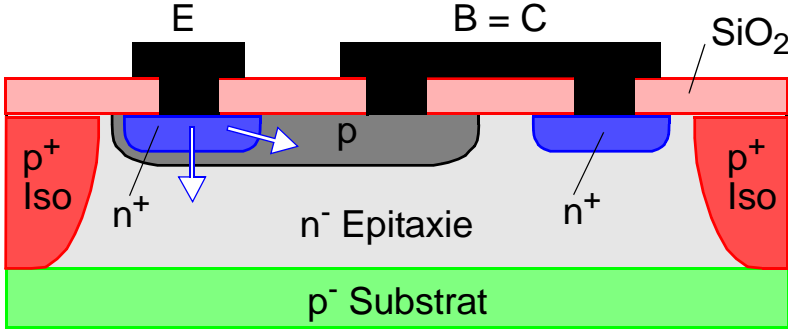
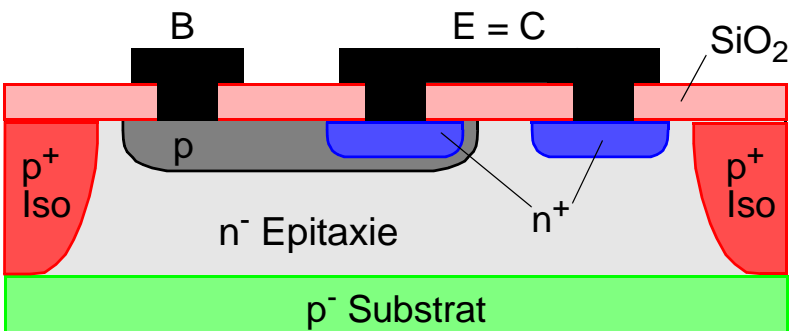
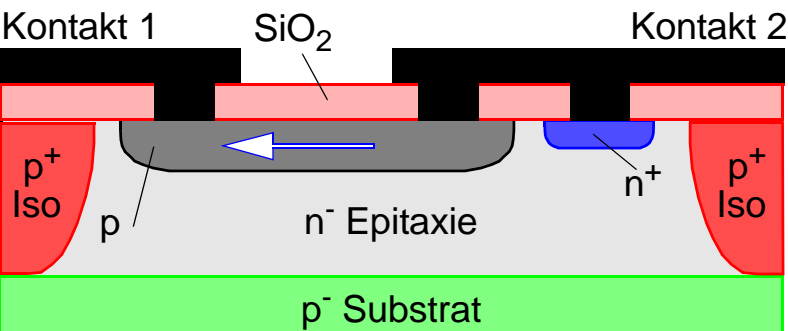
Lithografie: Hier wird eine vorgegebene Maskenstruktur auf eine vorbereitete, lichtempindliche Schicht übertragen durch Schattenwurf. „Licht“ liegt entweder im sichtbaren Bereich, im Ultravioletten, Röntgenbereich (sehr kurze Wellenlängen) oder auch über die Welleneigenschaft von Elektronen

Ätzen: Flüssigätzen (veraltet, da Randunschärfen) oder Plasmaätzen

Masken: Vorbereitung ist immer eine vergrößerte (20:1...10:1) „Master-Maske“ für den betreffenden Chip, die Retikel (engl. reticle) genannt wird. Aus dem Retikel werden die Arbeits-Schablonen erstellt für die Kontakt-Kopie mit ca. 1[μm] Abstand zum Wafer

- **Fotorepeater:** Da auf einer Arbeits-Schablone sehr viele identische Chips Platz finden, werden sie mit dem Fotorepeater vervielfältigt
- **Waferstepper:** Hier wird eine verkleinerte Abbildung des Retikels direkt Schritt für Schritt auf den vorbereiteten Wafer aufbelichtet (keine Rand-Unschärfe). Mit beiden Verfahren 100...200 Scheiben/Stunde
- Direkt-Schreiben mit **Elektronenstrahl** (oder auch auf Maske). 1 Wafer/Stunde

13.3 Ausführungsformen Bipolar-Technik

	
<p>Bipolarer NPN-Transistor</p>	<p>Integrierte Diode</p>
	
<p>Integrierter Kondensator (PN gesperrt)</p>	<p>Integrierter Widerstand</p>

„Baukasten“ aus integrierten Komponenten

13.3.1 Legende

- **Bipolarer Transistor:** Soll nur als Ausgangs-Konstruktion aufgeführt werden. Bezeichnung „Bipolar“ wegen npn oder pnp. Gegensatz: Unipolar (folgt)
- **Integrierte Diode:** Verbinden von Collector und Basis: Kann entweder in Durchlass- oder Sperr-Richtung betrieben werden. Für interne Anhebung von Potentialen auf dem Chip (Durchlass-Richtung) oder für Ableitung kleiner Leckströme (Sperr-Richtung).
- **Integrierter Kondensator:** Dieser wird immer in Sperr-Richtung betrieben, Verbindung von Emitter und Collector liefert einen spannungsabhängigen Kondensator. Dessen Kapazität C errechnet sich nach $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r A/d$, somit aus der Geometrie der Fläche A und deren Dicke, sowie aus dem Dotiergrad für ε_r
- **Integrierter Widerstand:** Auch hier werden zwei Anschlüsse gemeinsam betrieben, in der p-Wanne wird keine n^+ -Insel implantiert, somit spielt nur die Höhe der p-Dotierung eine Rolle wegen $\sigma = en_p \mu_p$. Zusätzliche Steuerung von R über Geometrie.

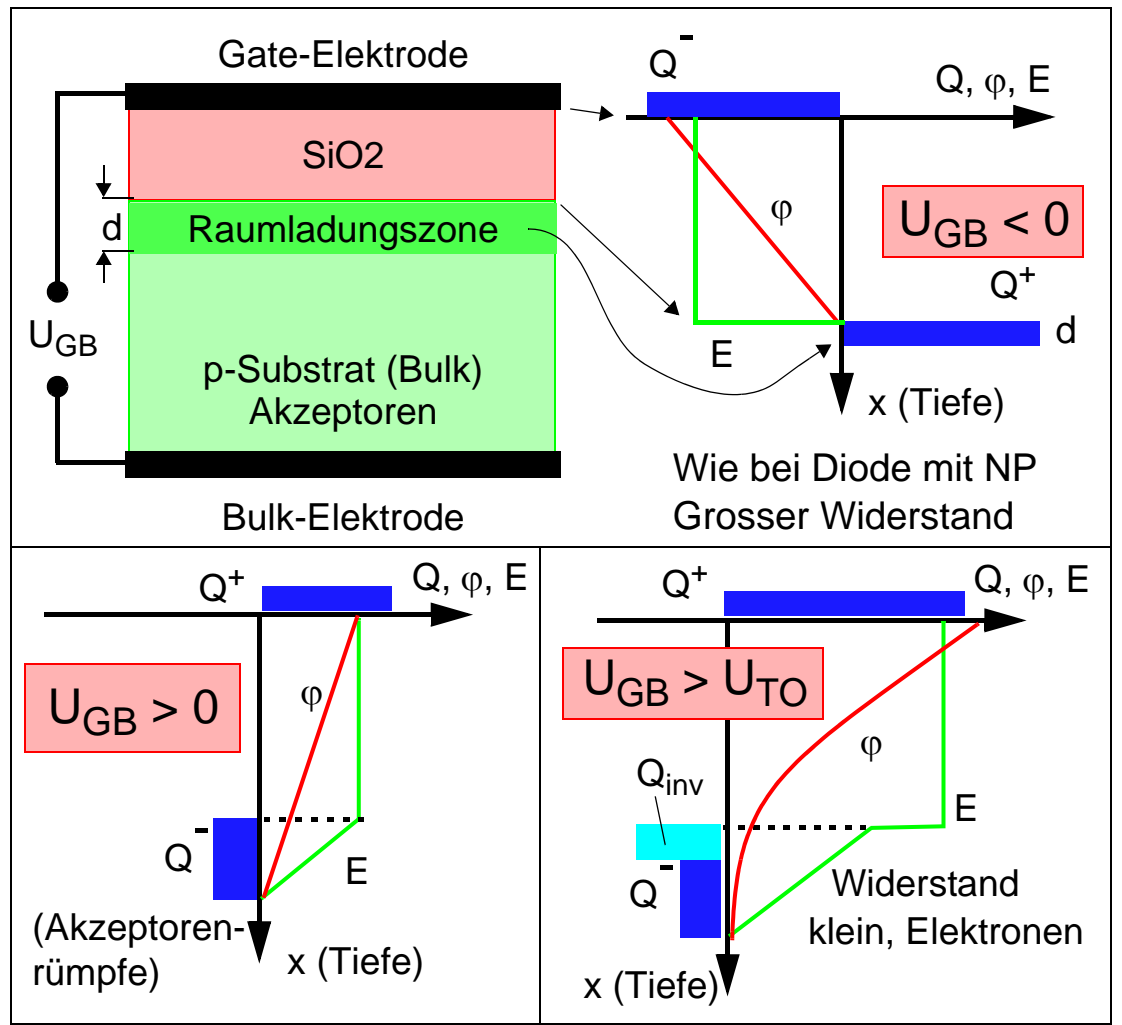
13.4 Der MOS-Kondensator

Der MOS-Transistor (**M**etall-**O**xid-**S**ilizium) erweitert die Möglichkeiten der Halbleiter-Anwendungen, von denen wir bisher den PN- und MS-Übergang besprochen haben. Beim MOS-Transistor kommt ein ganz anderes bestimmendes Element ins Spiel, die **MOS-Kapazität**, eines der am Besten untersuchten Bauteile bei Halbleitern. Wie in 13.4.1 zu sehen, besteht der MOS-Aufbau aus nur wenigen Schichten: In einem p⁻-Substrat sind durch Ionen-Implantation zwei n⁺-Wannen erzeugt. Darüber liegt wieder die Oxidschicht, die drei Durchbrüche für die Kontakte besitzt. Diese tragen die Bezeichnungen: **Source** (Quelle für Elektronen oder Löcher), **Drain** (Senke) und **Gate**, wobei auffällt, dass der Gate-Kontakt relativ weit nach unten reicht bis fast an das p⁻-Substrat. Die dünne SiO₂-Schicht unter dem Gate bildet das Dielektrikum ($\epsilon_r = 3.7$) des MOS-Kondensators, der lokal von Gate-Unterseite und Substrat-Oberfläche gebildet wird. Die Oxid-Schicht ist nur 20...100 [nm] dick, bei einer angelegten Potenzial-Differenz von $U_{GS} = 2$ [V] zwischen Gate und Substrat ergibt dies eine Feldstärke $E = U/d = 1 \cdot 10^8 \dots 2 \cdot 10^7$ [V/m] (zum Vergleich Luft = $5 \cdot 10^5$ [V/m]) und das erklärt überdeutlich den Namen Feldeffekt-Transistor. Beim p-Substrat (das wir vorläufig zur Erklärung beibehalten) wird die Gate-Elektrode zunächst mässig positiv aufgeladen, was auf der Substrat-Oberfläche in einem „Kondensator-Modell“ zwangsläufig eine negative Ladung ergibt. Diese sorgt für die Absaugung der positiven Löcher des p-Substrats bis in eine gewisse Tiefe, dadurch verarmt das Substrat an freien Ladungsträgern, es bleiben nur die ortsfesten, **negativ** geladenen Akzeptor-Rümpfe übrig, die eine Raumladung vergleichbar zum p-Gebiet eines PN-Übergangs bilden.

In einem zweiten Schritt erhöhen wir die Gate-Spannung soweit, dass die o.a. hohe Feldstärke im Substrat wirksam wird: Um das erforderliche Ladungsgleichgewicht aufrecht zu erhalten, werden zusätzlich zu den raumfesten negativen Donatoren in der Verarmungszone noch Elektronen durch thermische Generation (Fermi-Grenze) erzeugt. Es bildet sich somit zwischen den n⁺-Wannen von Source und Drain eine **n-leitende Schicht** im p-Substrat, deshalb wird dieser Vorgang **Inversion** genannt. Diese Inversionschicht ist durch eine variable Verarmungszone vom restlichen Substrat (= Bulk) getrennt.

13.4.1 Der MOS-Kondensator

Da die Inversion erst ab einer gewissen Spannung U_{GB} (Gate-Bulk = Substrat, das „S“ schon für Source vergeben) eintritt, wird diese Schwellspannung mit U_{TO} bezeichnet. Die Grösse von U_{GB} bestimmt die Leitfähigkeit im n-Kanal unter dem Gate, sie liegt zu Beginn wegen der Verarmung sehr niedrig und steigt sich durch die Inversion (Anreicherung) in einen technisch nutzbaren Bereich. Wegen dieses Verhaltens wird diese Art MOSFET (MOS-Feld-Effekt-Transistor) als selbst-sperrend bezeichnet (d.h. keine pos. Spannung ergibt keine Leitung). Wegen der Stromtransports durch nur eine Trägerart, hier die angereicherten Elektronen zählt der FET zu den **Unipolar**-Transistoren im Gegensatz zum besprochenen Bipolar-Transistor (Elektronen **und** Löcher). Die korrekte Bezeichnung für unser Beispiel lautet N-Kanal-Anreicherungs-MOSFET mit $U_{TO} > 0$, kurz NMOS genannt.



13.5 NMOS- und PMOS-Varianten

<p>N-Kanaltyp</p>	<p>NMOS-Widerstand</p>
<p>NMOS-Transistor und -Widerstand</p>	<p>PMOS-Transistor und -Widerstand</p>

13.5.1 Sonstige MOS-Typen

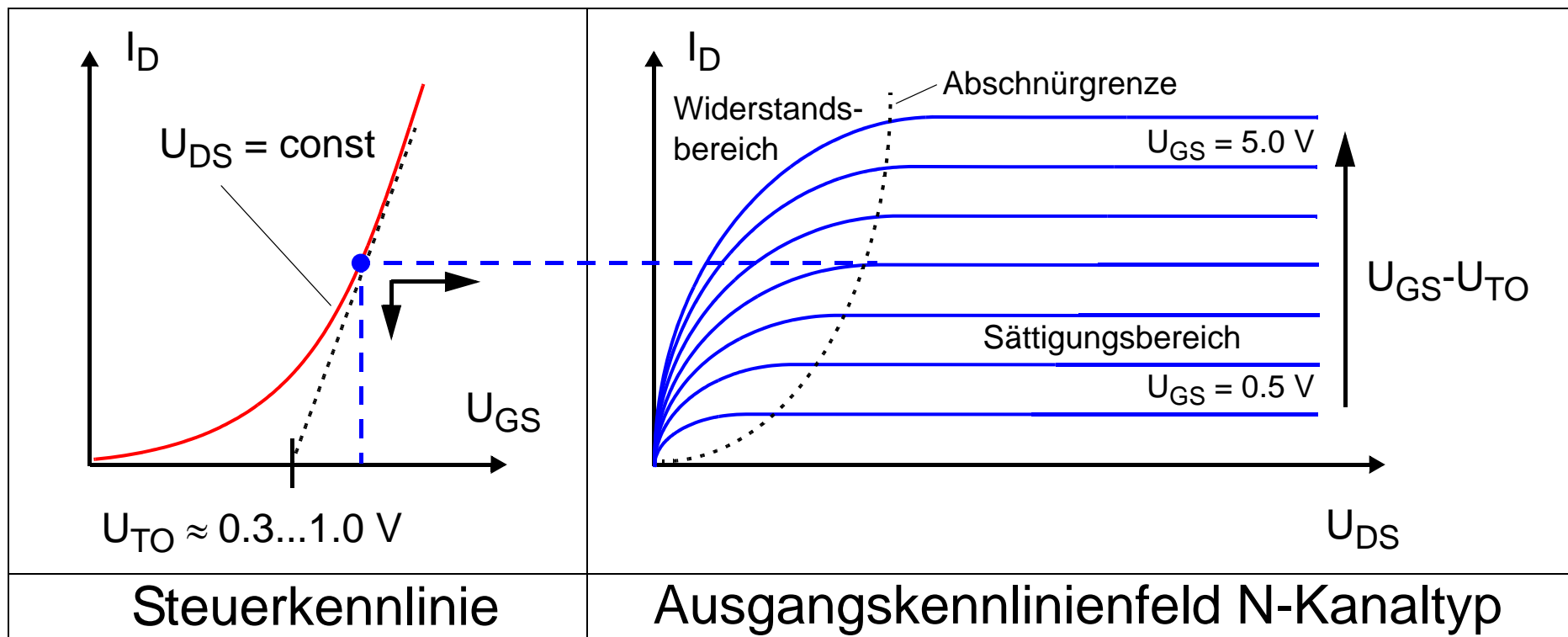
Bei umgekehrtem Aufbau benötigt ein P-Kanal-Anreicherungs-MOSFET (also mit n-Substrat) eine negative Schwellspannung $U_{TO} < 0$. Lässt man in die n-Schicht fünfwertige Donatoren eindiffundieren, so ergibt sich bereits ohne Vorspannung U_{GB} ein leitender n-Kanal zwischen Drain und Source, daher wird dieser FET-Typ auch als **selbstleitend** bezeichnet. Legt man eine negative Gatespannung an, dann werden die Elektronen abgedrängt und der FET wird zum Verarmungs- (engl. **Depletion**-) Typ und die Leitfähigkeit wird stark erniedrigt. Um die Vielfalt abzurunden: Es gibt auch noch den P-Kanal-Verarmungs-MOSFET auf den wir aber nicht näher eingehen wollen.

Die Schaltsymbole sind in 13.5 wiedergegeben: In beiden Fällen handelt es sich um **Anreicherungstypen**, daher wird der Strich über dem Gate unterbrochen gezeichnet und der Strompfeil beim Substrat angebracht in Analogie zu Bipolar-Transistoren. Beim **Verarmungstyp** (u.a. für integrierte Widerstände) wird der Strich durchgezeichnet. In der Praxis wird der selbstsperrende Typ bevorzugt, wir werden die nachfolgenden Beispiele mit dieser Art gestalten. Ausnahme: Integrierte Widerstände sind immer vom Depletion-Typ.

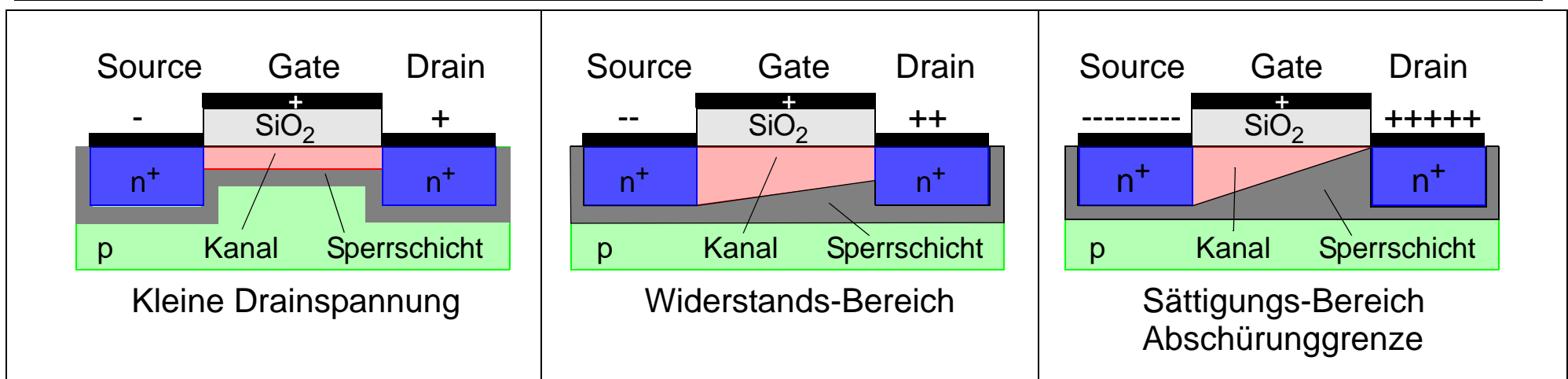
Verbindet man in 13.5 rechts die Anschlüsse für Gate und Source, so ergibt sich ein spannungsabhängiger Widerstand, auf den wir weiter unten eingehen werden. Die Technik ist für NMOS und PMOS anwendbar und wird bei den noch zu besprechenden komplementären Schaltungen eingesetzt. Hier sollte nur die technische Verwirklichung und die Schaltung gezeigt werden. Andere integrierte Bauteile (wie Kondensator und Diode beim Bipolar-Prinzip) sind nicht machbar, aber gegenwärtig auch nicht erforderlich.

13.6 Kennlinien NMOS-FET

Wir können uns nun der Besprechung der Kennlinien beim NMOS zuwenden. Es gibt nur zwei Kennlinien, da durch das Gate kein Strom fließt, sondern nur ein starkes elektrisches Feld aufgebaut wird. Die Durchbruchspannung (threshold) U_{TO} ist stark material-, bzw. dotierungsabhängig und liegt zwischen 0.3...1.0 [V], sie wird durch Messung der Steuerkennlinie und Schnitt der linearen Extrapolation mit der U_{GS} -Achse erhalten. Die beiden Kennlinienarten ähneln weitgehend denen des Bipolar-Transistors, sodass wir hier nicht näher darauf einzugehen brauchen.



13.7 Ergänzung MOS-Kennlinie (E-Typ)



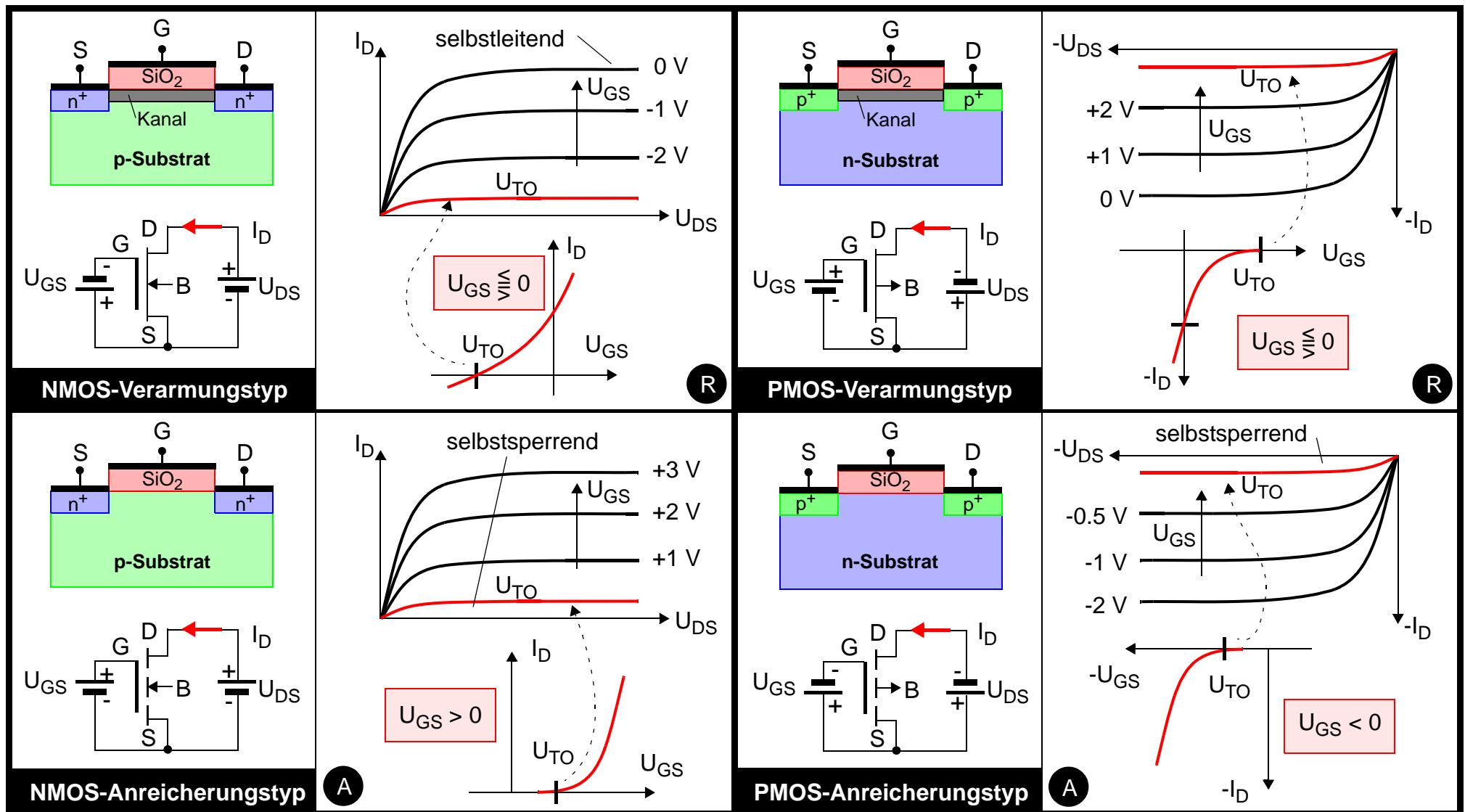
Bei **kleiner Drainspannung** bildet sich auch nur eine flacher Kanal (schwach leitend). Unter den beiden n^+ -Dotierinseln und dem Kanal bildet sich eine gesperrt betriebene, isolierende Verarmungs-Grenzschicht zum p-Substrat. (Aussage gilt nur für Anreicherungs-Typ = **Enhancement**)

Im **Widerstands-Bereich** hat die Inversion voll eingesetzt, wobei sich ein den Widerstand bestimmendes Kanalprofil (Feldstärke-bedingt) einstellt. Auch hier bildet sich die isolierende Sperrschicht-Kapazität aus.

Im **Sättigungs-Bereich** steigt die Spannung U_{DS} soweit an, dass eine Sättigung im Kanal stattfindet und der Kanal sich evtl. bereits abschnürt. Ursache ist zusätzlich die Verbreiterung der Sperrschicht.

- Wie aus allen Betrachtungen ersichtlich, wird der Drainstrom I_D durch den MOSFET mit der **Gate-Spannung** gesteuert, während beim Bipolar-Transistor die Dicke der Grenzschichten mit dem **Basisstrom** verändert wird. Im Gegensatz zum Bipolar-Transistor benötigt der MOSFET keine eigenen Isolationsinseln zum Substrat, dies erledigt hier die Sperrschicht-Kapazität.

13.8 Klassifizierung der MOSFET's



13.8.1 Legende

Man kommt vom entsprechenden NMOS-Typ zum PMOS-Typ, indem man folgende Pegel umkehrt: U_{GS} und U_{DS} .

Weiterhin gelangt man jeweils vom Verarmungs-Typ (**Depletion = D-Typ**) zum Anreicherungs-Typ (**Enhancement = E-Typ**), indem man bei festgehaltener Spannung U_{DS} die Gate-Source-Spannung U_{GS} umkehrt. **Als Relais: A = Arbeits-, R = Ruhe-Kontakt.**

NMOS-Verarmungstyp (D-Typ): Bei diesem Typ erzeugt man infolge hoher p-Dotierung bereits ohne eine Gatespannung einen p-leitenden Kanal (siehe Kennlinie), der erst durch eine hohe negative Spannung U_{GS} zwischen Gate und Source zum Verschwinden gebracht werden kann. Dieser Transistor ist daher zu den **selbstleitenden** Typen zu rechnen. Die Steuerkennlinie liegt überwiegend im vierten Quadranten.

NMOS-Anreicherungstyp (E-Typ): Dieser bildete unseren Ausgangspunkt. Eine positive Spannung U_{GS} bewirkt eine Stromzunahme, wenn $U_{DS} > 0$. Der FET sperrt, wenn die Spannung U_{GS} gegen NULL geht. Im Ausgangszustand ist der FET daher **selbstsperrend**.

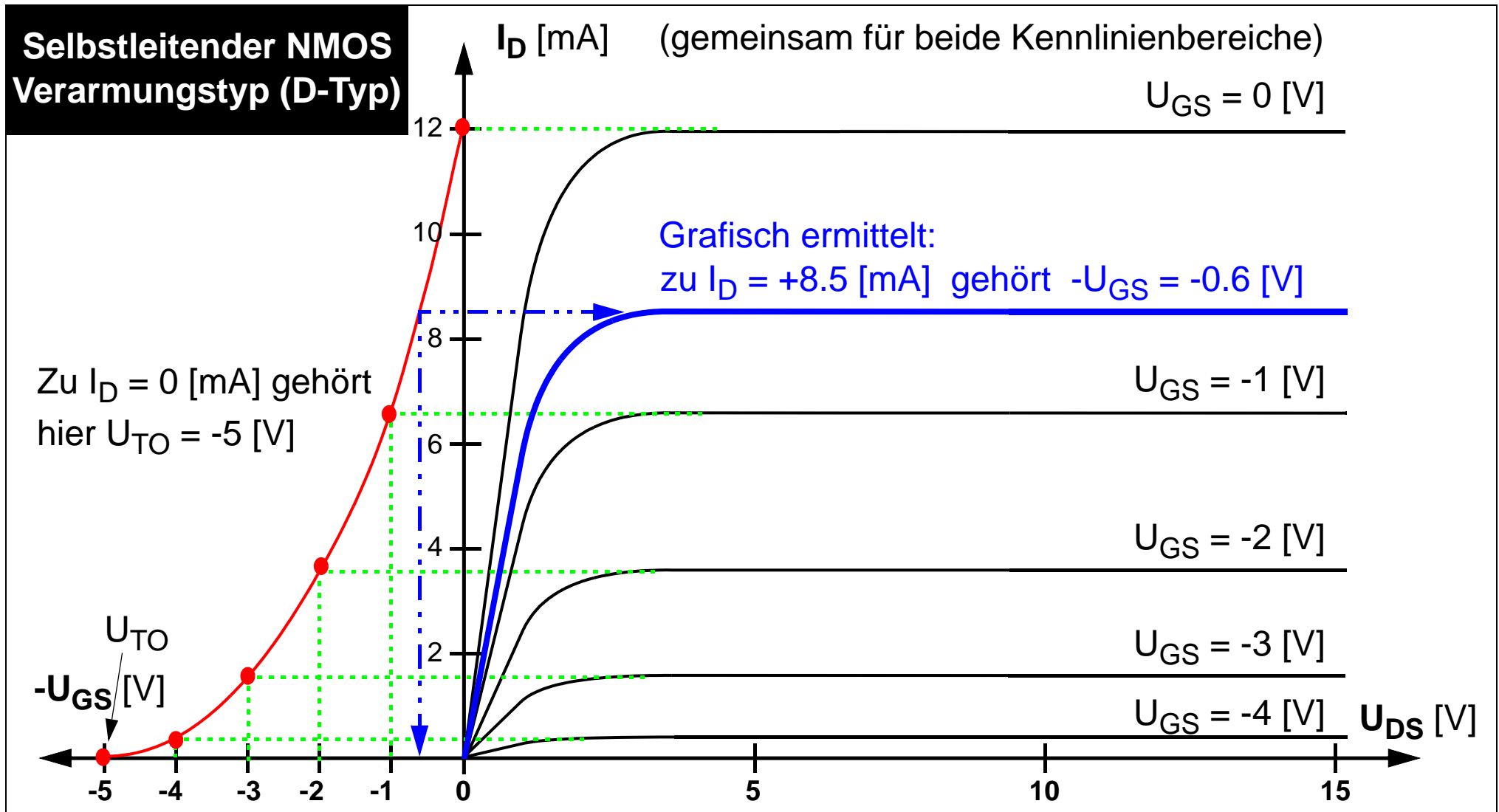
PMOS-Verarmungstyp: Hier wird durch Diffusion unter dem Gate ebenfalls eine Zone erhöhter Donatoren-Konzentration (n-Leitung) erzeugt, die bereits ohne Gate-Vorspannung eine Eigenleitung besitzt. Hier bewirkt eine positive Steuerspannung U_{GS} eine Stromabnahme bei I_D .

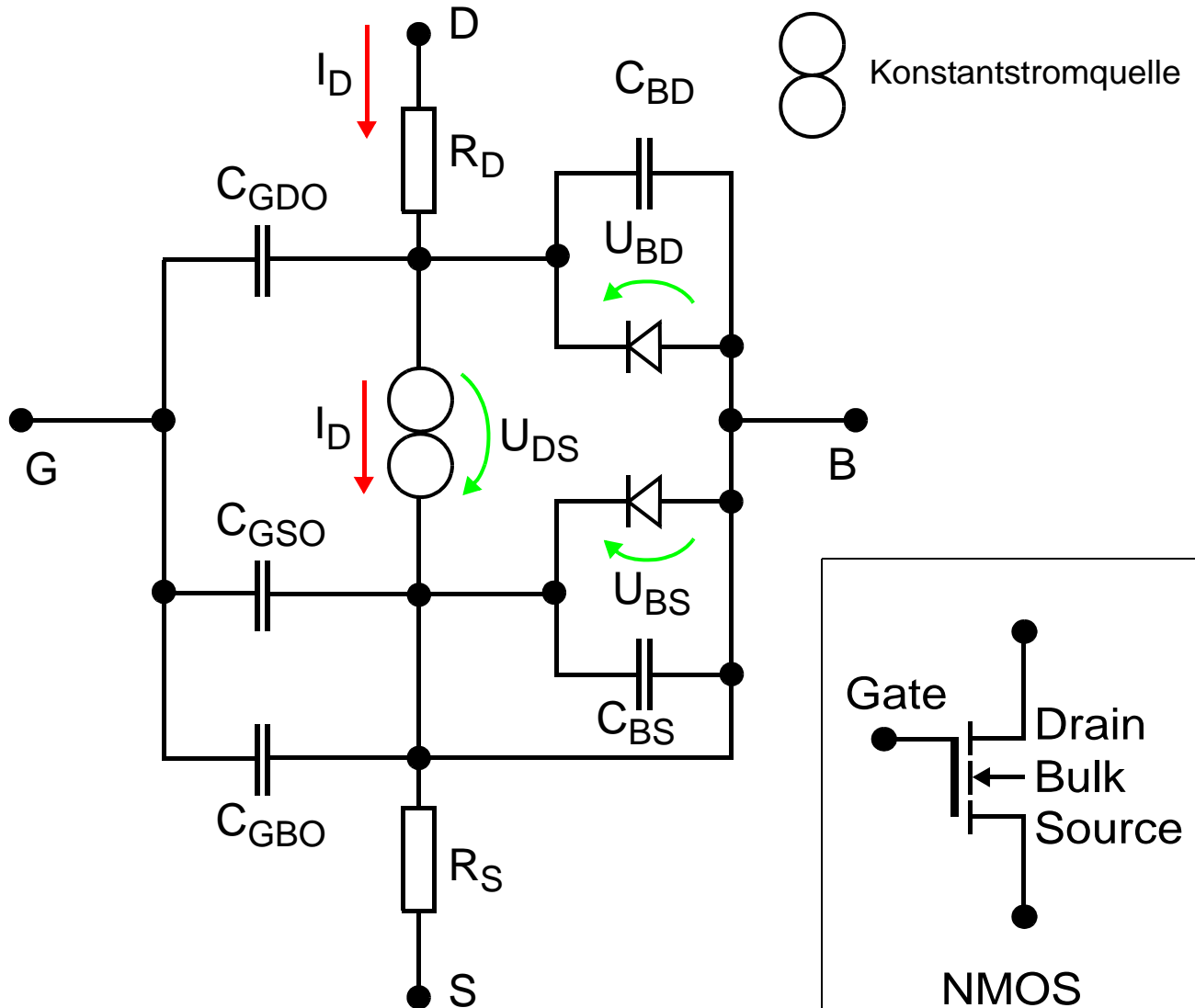
PMOS-Anreicherungstyp: Dies ist das Pendant zum NMOS-Typ, daher bewirkt eine Zunahme der negativen Steuerspannung U_{GS} eine Zunahme des ebenfalls negativen Drain-Source-Stroms I_D . Auch dieser FET-Typ ist selbstsperrend.

Anwendungen: Für logische Verknüpfungen benötigen wir Komponenten, die mit gemeinsamen Pegeln z.B. so schaltbar sind, dass jeweils ein Transistor leitet und der Partner sperrt.

Man beachte bei obigen Schaltungen die jeweiligen Polaritäten.

13.9 Werteextraktion aus den Kennlinien





Ersatzschaltbild MOSFET

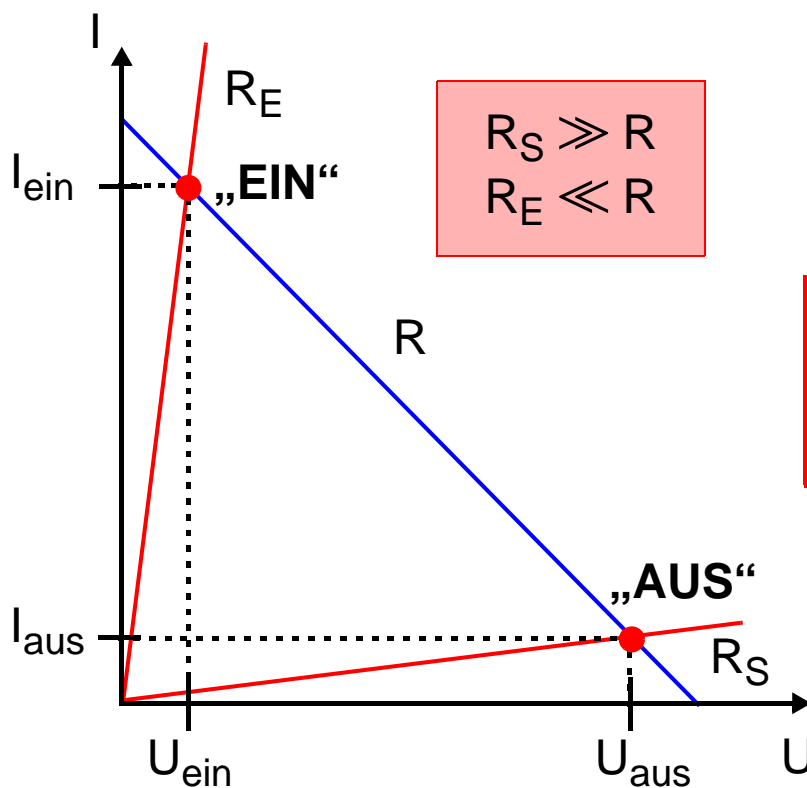
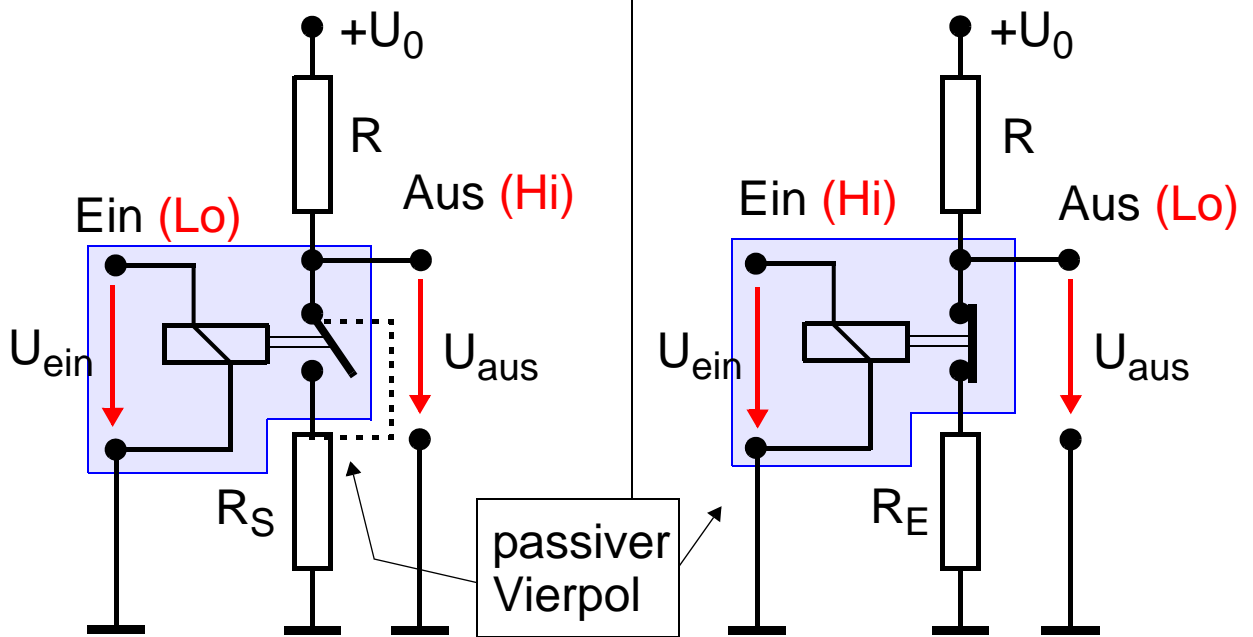
Das obige Ersatzschaltbild ist eine aus mehreren Möglichkeiten, einen MOSFET innerhalb des Simulations-Paketes SPICE zu simulieren. In diesem Modell werden die physikalischen Gegebenheiten wie Kanal-Abmessungen, Dotierungsprofile, -Dicken, usw. umgerechnet und dann als Kapazitäten, Widerstände, Eigenspannungen eingebracht. Die Ergebnisse von SPICE liefern dann Schaltzeiten, Strom- und Spannungsgrenzen, usw. Die Geometrie-Daten werden z.B. in VHDL zum Entwurf von Standardzellen eingesetzt.

14. Digitale Grundschaltungen

Digitale Grundschaltungen müssen zwei Aufgaben erfüllen:

- Sie führen eine logische Funktion aus (Abhängigkeit zwischen Ein-gangs- und Ausgangs-Variablen. Diese werden beschrieben durch:
 - Schalt-Algebra (z.B. $y = \overline{x_0} \& \overline{x_1}$ UND-Verknüpfung negiert)
 - Schaltbild
 - Wahrheitstabelle
- Digitale Grundschaltungen sind ein elektrisches Netzwerk mit technischen Eigenschaften, die durch typische statische und dynamische Kenngrößen zu beschreiben sind. Dadurch wird das Zusammenschalten mehrerer Grundelemente garantiert.
- Die genannten Beschreibungen gelten für sehr verschiedene Schaltungstechniken, die eine identische logische Grundfunktion ermöglichen. Wegen unterschiedlicher Pegel, Komponenten und dynamischen Anforderungen ergeben sich dann typische **Schaltkreis-Familien**

14.1 Logische Schaltungen



Wahrheitstabelle

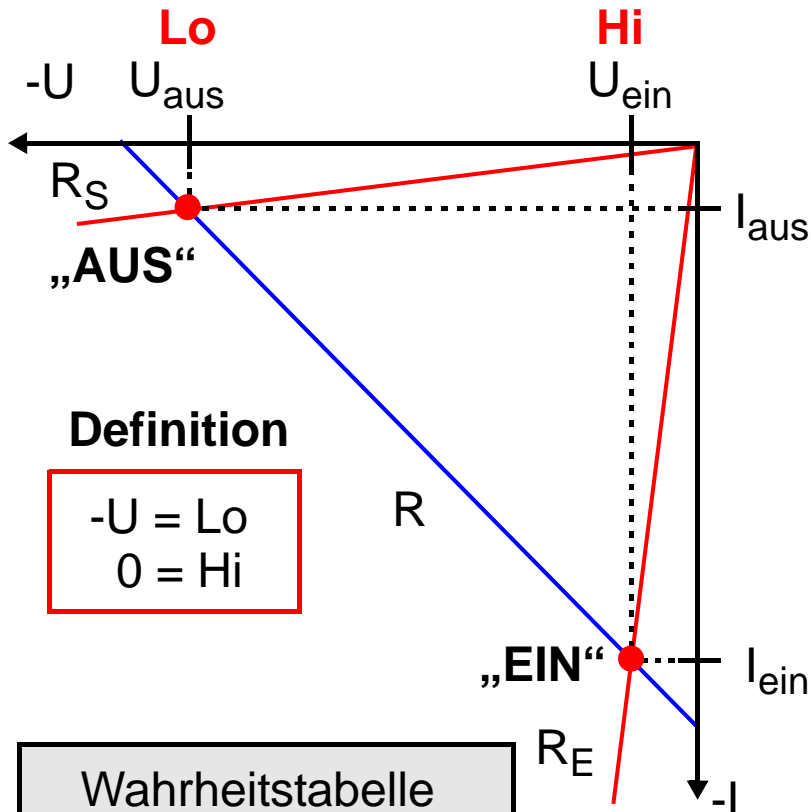
Eingang	Ausgang
Lo	Hi
Hi	Lo

Positive Logik

$0 = \text{Lo}, +U = \text{Hi}$

Das Relais als akt. Vierpol kann durch Transistor (Bipolar oder MOS) **ersetzt** werden.

14.2 Negative Logik (nicht invertierend)



Merkregel:
Der Zustand „Hi“ liegt immer **näher** bei Unendlich als der Zustand „Lo“

Das reale Relais ist in beiden Fällen ein aktiver Vierpol, weil jeweils ein Strom fließt, also wird auch Leistung verbraucht (in Wärme umgesetzt). Ist der Kontakt **offen**, so repräsentiert der Schalterwiderstand R_S eine nicht perfekte Isolation (bei $R_S = \infty$ wäre die Arbeitsgerade identisch mit der U-Achse). Ist dagegen der Kontakt **geschlossen**, so wird der Widerstand R_E als Äquivalent für endliche Durchgangswiderstände (Bahnwiderstände) bei Halbleitern eingeführt. Weiterhin verhindert R_E , dass die Arbeitsgerade mit der I-Achse identisch wird.

Wahrheitstabelle	
Eingang	Ausgang
Lo	Lo
Hi	Hi

Abhilfe: Ruhekontakt statt Arbeitskontakt, dann Invertierung

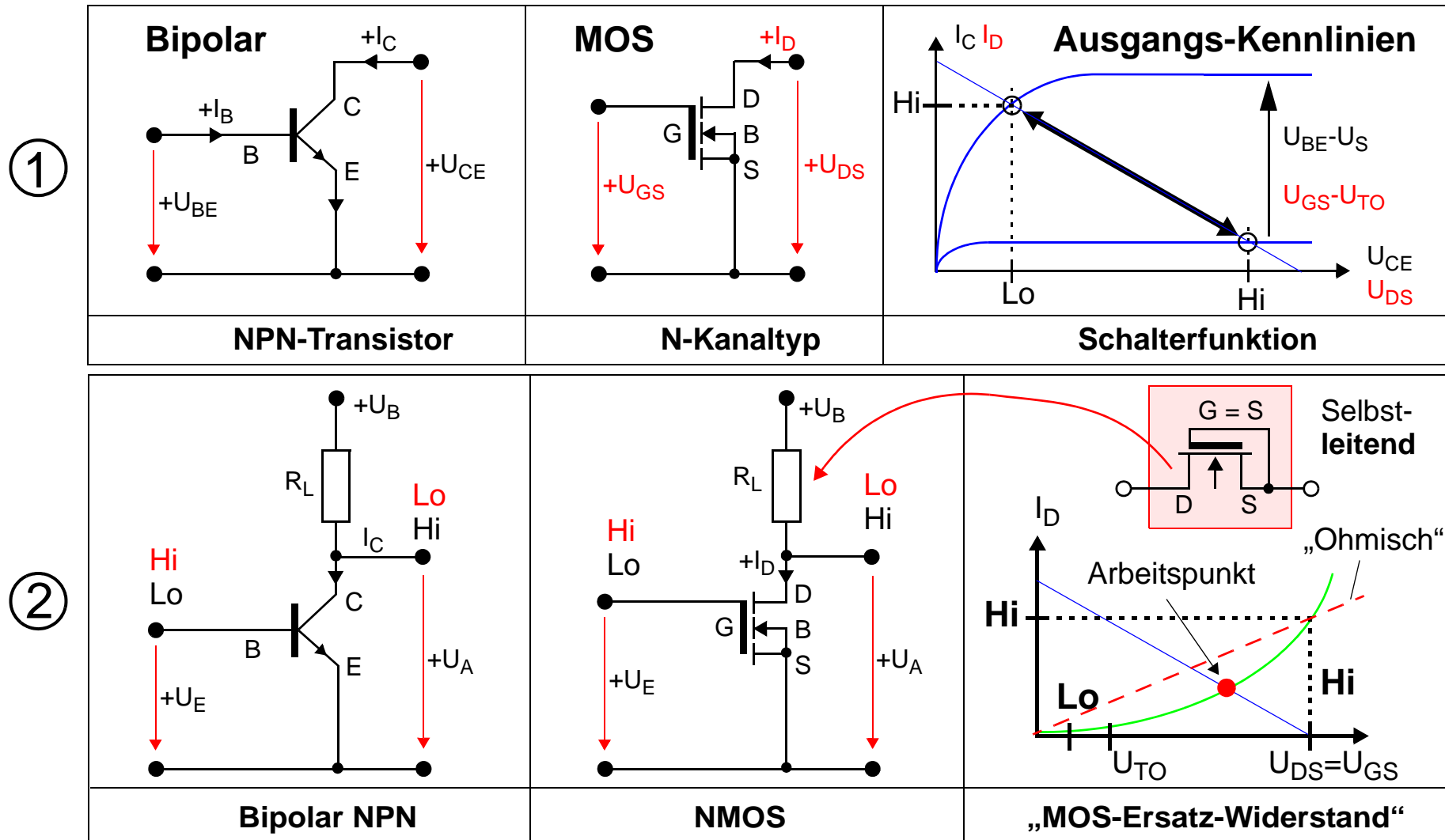
14.3 Der Transistor als Schalter

Zum Verständnis, wie z.B. ein Speicherchip funktioniert, benötigt man keine analoge Verstärkung, sondern nur den Wechsel zwischen zwei Zuständen, die auch hier mit **HIGH** (Hi) und **LOW** (Lo) bezeichnet werden. Je nach verwendeter Logik-Familie werden diesen beiden Zuständen diskrete elektrische Spannungswerte zugeordnet. Vorläufig verwenden wir nur die [positive Logik](#), bei der $Lo = 0$ und $Hi = +U$ vereinbart wird. Die Höhe der Spannung ist von der verwendeten Technologie abhängig, es wird jedoch eine einheitliche Spannungsvereinbarung angestrebt, damit die Logik-Familien auch untereinander mischbar sind (z.B. Bipolar und CMOS = BICMOS). Verstärkerschaltungen werden hier nicht besprochen, sondern nur die [digitale Gross-Signalverarbeitung](#).

In der nachfolgenden Abbildung 1 ist eine Bipolar-Schaltung mit NPN-Transistor und ein NMOS vom [Anreicherungstyp](#) in Emitter-, bzw. Source-Schaltung skizziert. Die Bezeichnung rührt aus der gemeinsamen „Anbindung“ von U_{BE} und U_{CE} , bzw. von U_{GS} und U_{DS} an den unteren Querstrich her, der mit Emitter, bzw. Source verbunden ist (dies sind jeweils die „Spender“ der Elektronen). Beide Schaltungen sind bekanntlich als „[Vierpole](#)“ mit je zwei Klemmen darstellbar. Da die Kennlinien obiger Transistor-Typen sehr ähnlich sind, können wir die Betrachtungen in einem gemeinsamen Kennlinienfeld anstellen.

Als Parameter dienen die Basis-Emitter-Spannung U_{BE} und die Gate-Source-Spannung U_{GS} . Niedrige Spannung zwischen Basis und Emitter bedeutet einen kleinen Collectorstrom I_C und eine hohe Spannung U_{CE} zwischen Collector und Emitter: Der [Transistor sperrt](#) und in dieser Schaltung wird auf Grund des hohen Werts von U_{CE} der [logische Wert Hi](#) zugeordnet. Zu einem hohen U_{BE} gehört ein hoher Strom I_C , der Transistor leitet (ist offen), damit kann die Spannung U_{CE} durch den Transistor weitgehend abfließen und es ergibt sich auch im Diagramm eine niedrige Collector-Emitter-Spannung, daher ist diesem Zustand Lo zugeordnet. Wie aus dem Gesagten ersichtlich, wird dieser logische Zustand dem Betrag von U_{CE} zugeordnet. Beim NMOS gelten die entsprechenden Überlegungen (Strom \rightarrow Spannung am Gate).

14.4 Schalter und Inverter



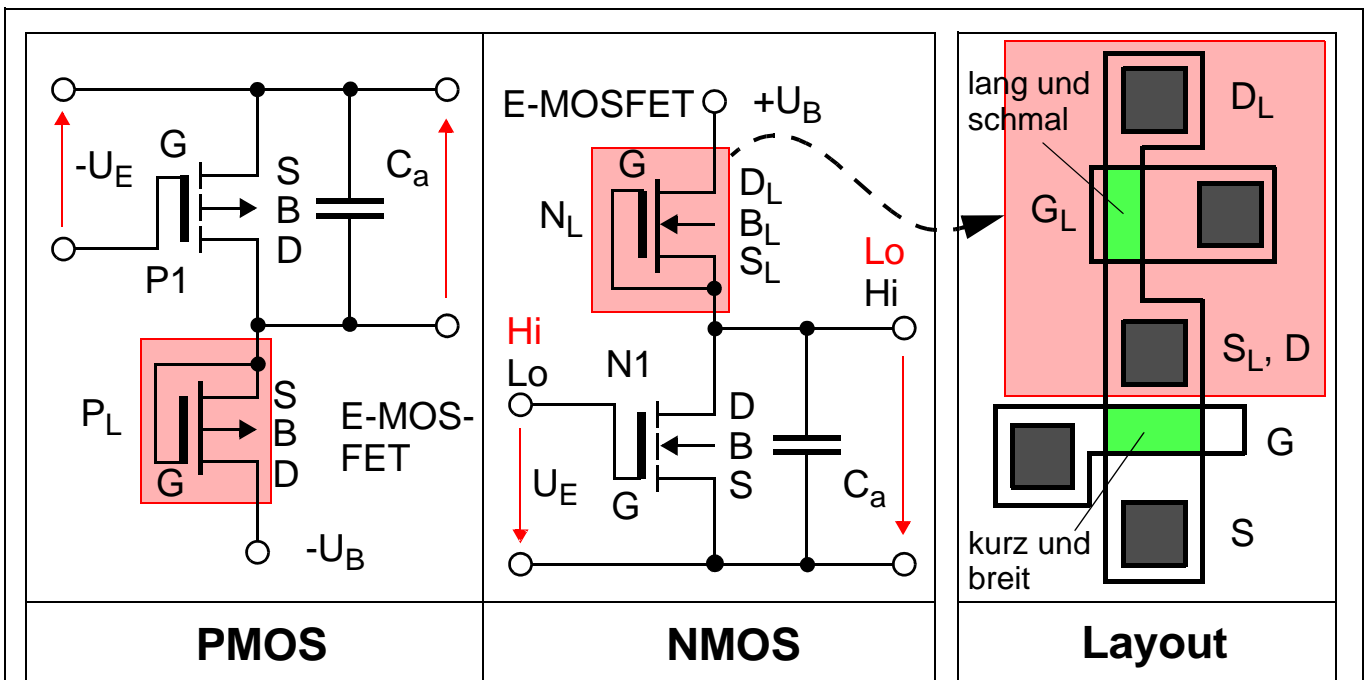
14.4.1 Legende zum Inverter

Die zuvor angestellten Überlegungen werden für eine modifizierte Schaltung nach vorstehender Abb.2 weiter verfolgt. Die angegebene Schaltung wurde um eine äussere, angelegte Spannung $+U_B$ und um einen zwischen Spannungsquelle und Collector, bzw. Drain liegenden Lastwiderstand R_L erweitert. Unterhalb von R_L befindet sich ein Abzweig, dessen Spannung gegen die untere Bezugslinie (Erdpotential) gemessen wird und den logischen Pegel wiedergibt.

Zusätzlich ist rechts in der Abbildung noch ein spannungsabhängiger, **integrierter MOS-Lastwiderstand** (passiver Zweipol vom D-Typ) skizziert mit seiner spannungsabhängigen Kennlinie, die durch die Verbindung von Source und Gate auf dem Chip erzeugt wird. Wie aus der Kennlinie ersichtlich, besteht kein linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung, diese Art von **Lastwiderstand gehorcht nicht dem Ohm'schen Gesetz**, man wird durch entsprechende Geometrie und Wahl des Arbeitspunktes (über angelegte Spannung) für einen der Schaltung angemessenen Wert von R_L sorgen. Wie aus dem Diagramm ersichtlich, erfolgt an integrierter Widerstand **keine Spannungsumkehr**. Bei der Schaltung mit Bipolar-Transistor wird ein integrierter Widerstand nach 11.2.4 eingesetzt.

Kennlinie: Bei allen nachfolgenden Schaltungen muss man nicht mehr „in Kennlinien“, sondern nur noch in angelegten Pegeln denken. Da ein bipolarer NPN und ein E-NMOS in der Schaltung verwendet werden, heisst die Verabredung: **Keine Eingangs-Spannung U_E** , also Lo, **dann sperren** in beiden Fällen **die Transistoren**. Somit liegt die volle Versorgungsspannung U_B am sperrenden Transistor an und steht damit auch als Ausgangsspannung U_A zur Verfügung. Somit ist dem Ausgang der Pegel Hi zuzuordnen. Im umgekehrten Fall (Hi am Eingang) leiten beide Transistoren, dadurch fliesst der Collectorstrom durch Widerstand und Transistor, an R_L fällt bei geeigneter Dimensionierung fast die gesamte Versorgungsspannung U_B ab (am Transistor U_S , bzw. U_{TO}) und die Ausgangsspannung geht auf einen Wert nahe Null zurück. Somit herrscht hier der Pegel Lo. Betrachtet man die jeweilige Zuordnung zwischen Eingangs- und Ausgangsgrössen, so stellt sich in beiden Fällen eine **Signalumkehr der Form $Lo \rightarrow Hi$, bzw. $Hi \rightarrow Lo$** . Die obige Schaltung stellt daher einen **Umkehrer (Inverter)** dar. Aus der Sicht der Arithmetik ein sehr brauchbares Rechner-Werkzeug, wenn man für die Subtraktion oder Division eine **Bitumkehr für das Zweier-Komplement** benötigt.

14.5 ED-Inverter



Durch Zusammenschalten eines selbstleitenden (E-Typ) Lastwiderstands und eines selbstsperrenden (D-Typ) MOSFET erhält man in der jeweiligen Technologie einen PMOS- oder NMOS-ED-Inverter. Die Verdrahtung erfolgt auch hier als Source-Schaltung, wobei Source S_L des Last-Transistors und Drain D des Schalttransistors verbunden sind und auch dem Abgriff der Ausgangsvariablen dienen. Der Bulk ist bei dieser Schaltungs-Variante mit Erde verbunden. Der Kondensator C_a im Ausgang repräsentiert die kapazitive Last der Folgeglieder, das Bezugspotential der Source liegt meist an Erde.

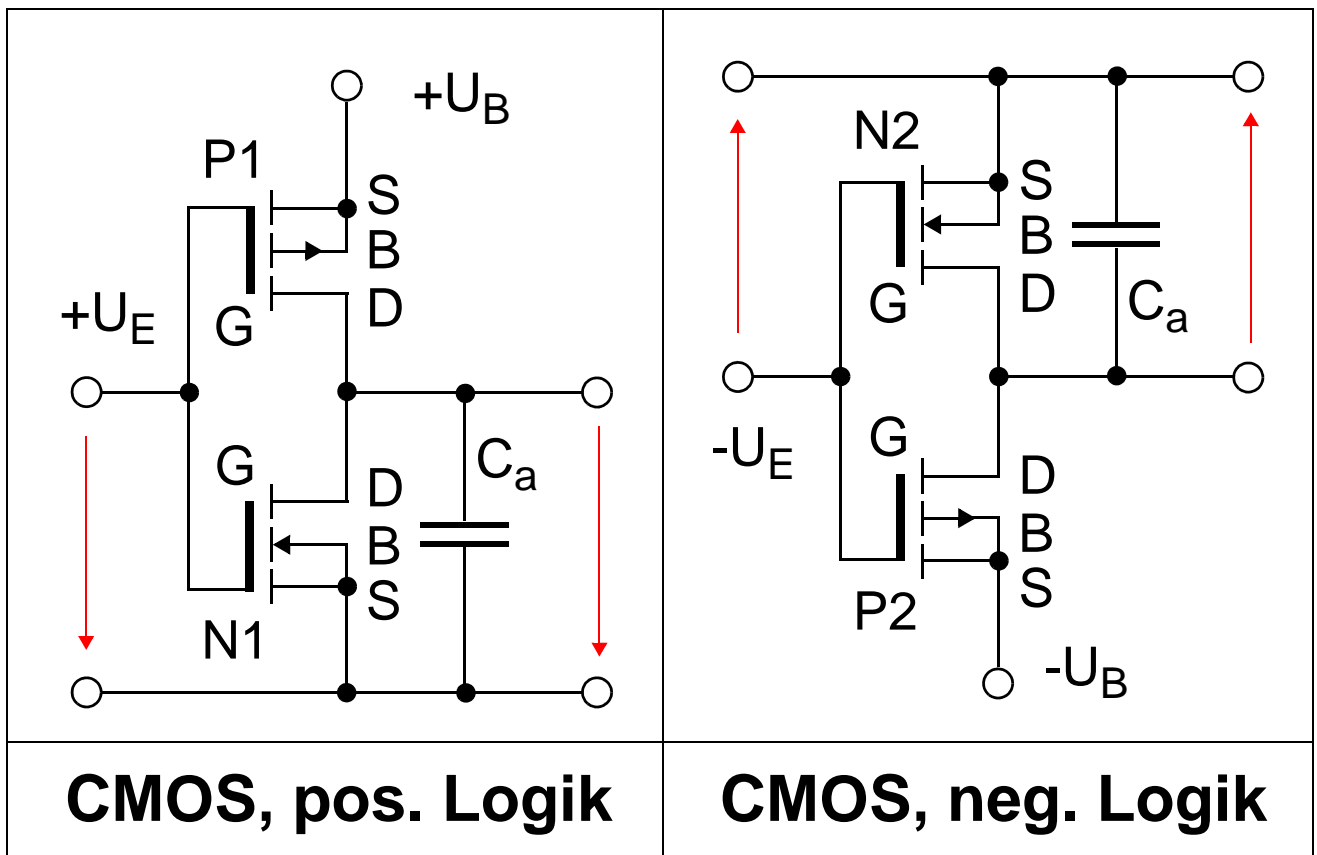
Für den NMOS-ED-Inverter erhält man in positiver Logik die obenhstehende Wahrheitstabelle.

Wahrheitstabelle	
Eingang	Ausgang
Lo	Hi
Hi	Lo

Negative Logik: Beim PMOS liegt eine negative Versorgungs-Spannung $-U_B$ vor. Wenn am Eingang eines PMOS-FETs ein negativer Pegel (= Lo) angelegt wird, dann wird dieser Typ leitend (siehe 13.8) und schaltet die negative Spannung $-U_B$ durch. Da aber der Lasttransistor P_L im Strompfad liegt, wird an ihm die angelegte äussere Spannung abfallen und der Ausgang somit Hi sein. Im Gegensatz zum reinen Widerstand (nicht invertierend in neg. Logik) tritt die Invertierung beim PMOS wegen der Vertauschung zum „Ruhe-Kontakt“ ein.

Beim **Layout** ist gezeigt, dass der Lastwiderstand einen schmalen, langen Kanal (hoher Widerstand) erhält, wogegen beim Schalttransistor eine breite, kurze Leiterbahn zur erzeugung eines kleinen Bahnwiderstands eingesetzt wird.

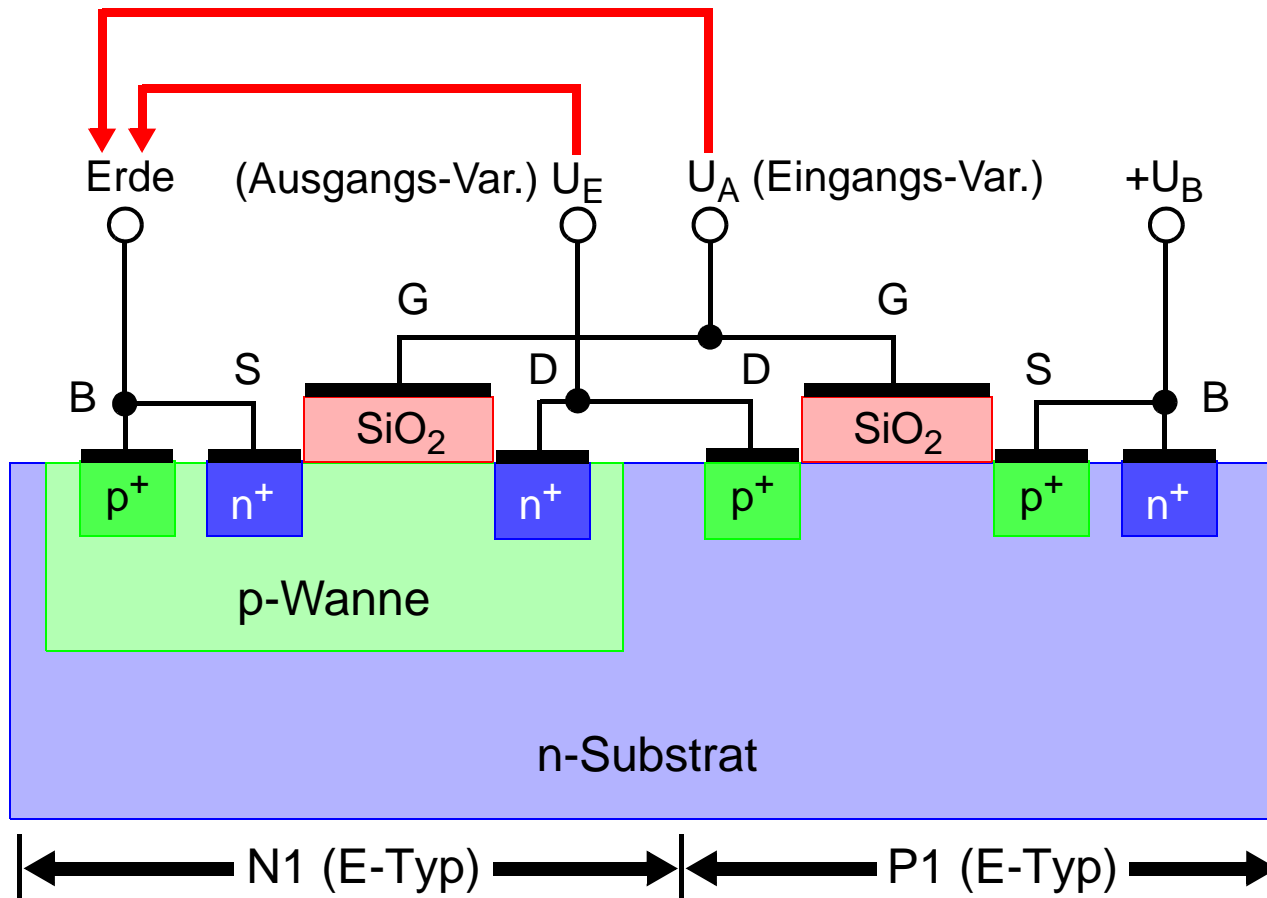
14.6 CMOS-Inverter



Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und im Inverter die zwei verschiedenen Transistortypen NMOS und PMOS verknüpfen. Da die Partner komplementär zu einander sind, spricht man von CMOS (**C**omplementary **M**OS). Beim Umschalten von Lo → Hi im linken Teilbild (positive Logik) ergibt sich ein sehr schneller Pegelwechsel, da immer nur ein Transistor leitet und der andere sperrt. Im vorliegenden Fall wird P1 sofort sperren und N1 sofort leiten, damit liegt wieder eine Pegelumkehr zwischen Eingang und Ausgang vor. Dieselben Überlegungen können bei der negativen Logik angestellt werden.

Anmerkung zur Schaltung: Um eine möglichst schnelle Umschaltung zu erreichen, werden je ein n-Kanal- und p-Kanal-Anreicherungs-MOSFET in Antireihenschaltung verknüpft (Drainanschlüsse werden verbunden). **Wechselschalter:** Es fließen keine Ruhestrome.

14.6.1 Schnitt durch einen CMOS-Inverter



CMOS, pos. Logik

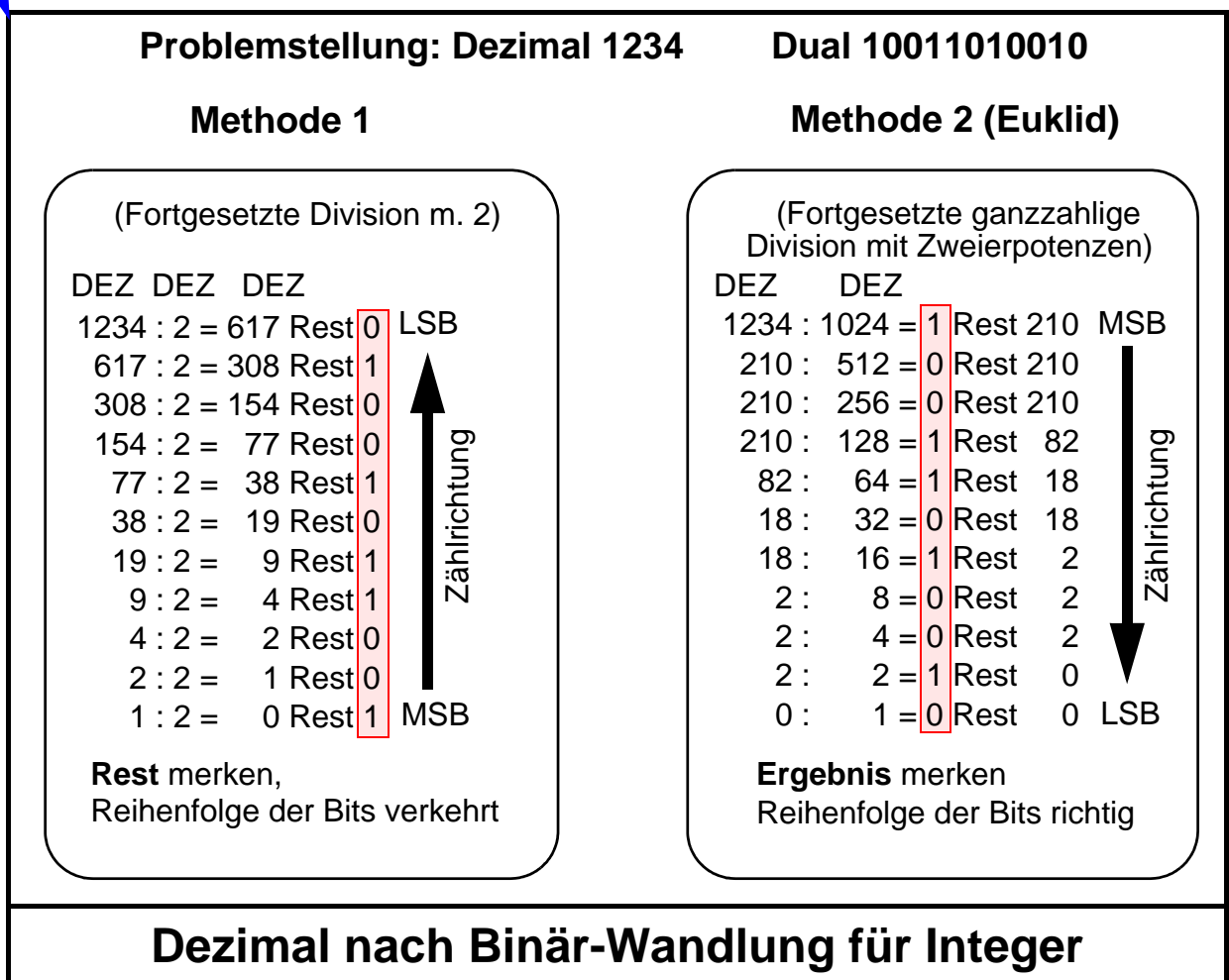
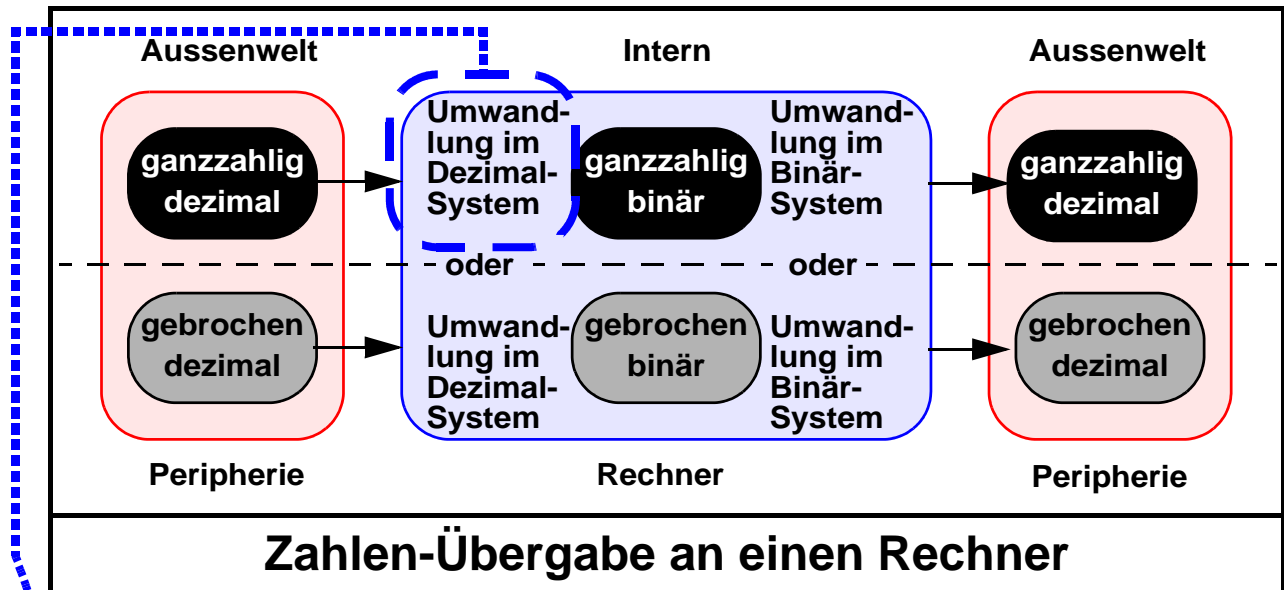
Wie zu sehen, wird in ein n-Substrat eine p-Wanne für den n-Kanal-FET eingebracht, da dies einfacher zu bewerkstelligen ist als eine n-Wanne in einem p-Substrat.

Die Versorgungsspannung $+U_B$ wird an die Source von P1 (p^+ -Insel) und an das n-Substrat über eine n^+ -Insel angelegt, wobei im letzteren Fall keine Gleichrichter-Wirkung entsteht.

Ebenso wird beim Bezugspotential verfahren (p^+ -Insel zur p-Wanne). Zusätzlich verbindet man die beiden **Gates** für die Eingangs-Variable und die beiden **Drains** für die Ausgangs-Variable.

Zwischen Drain und Source entsteht dann jeweils ein selbstsperrender Kanal (Enhancement Type), der wechselweise durchgeschaltet wird.

14.7 Anwendungen Inverter



14.8 Binär-Arithmetik

Nachfolgend sollen nur die **vier Grundrechenarten** für Ganzzahlen (Integer) besprochen werden. Fließkommazahlen bestehen aus Mantisse, Exponent und Vorzeichen und müssen daher zuvor auf ein einheitliches Format (Exponent normalisieren) gebracht werden.

Integer-Addition

Die binäre Addition gehorcht den folgenden, einfachen Rechenregeln:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 10, \quad 1 + 1 + 1 = 11, \quad \text{usw.}$$

Es sei nur kurz auf den Fall $1 + 1 + 1 = 11$ (Addition mit Übertrag) eingegangen. Wir spalten darin den Fall $1 + 1 = 10$ ab und addieren in die rechte Position unsere „1“, womit wir binär „11“ oder dezimal „3“ erhalten. (Binäres Stellenwertsystem)

Aus Hardwaresicht wird man nicht mehrere Additionsterme „auf einmal“ zusammenzählen, sondern es werden immer nur zwei Terme addiert, dann zum Ergebnis der dritte Term, usw. Damit gestaltet sich der **Übertrag** wesentlich einfacher, weil Hardware eingespart wird.

Integer-Subtraktion, Komplementbildung

Bei mechanischen Kurbelrechenmaschinen wird die Addition durch Kurbel-Vorwärtsdrehen, die Subtraktion durch Rückwärtsdrehen bewerkstelligt. Leider gibt es bei elektronischen Rechnern keine derartige Kurbel. Es liesse sich zwar technisch durchaus eine eigene Hardwareeinheit für die Subtraktion, bzw. Division herstellen, aber man versucht, auch die Subtraktion auf die Addition mit negativen Zahlen zurückzuführen und führt zu diesem Zweck das Komplement (konegative Zahlen) ein: In erster Näherung werden alle Bits invertiert, d.h. „Null“ wird zu „Eins“ und umgekehrt. Würde man mit diesem Komplement eine Subtraktion durchführen, so wäre das Ergebnis falsch. Es sind nun zwei Fälle zu diskutieren, wobei hier zunächst das Einerkomplement vorgestellt wird.

Einer-Komplement

Wir wollen im Fall einer fünfstelligen „Null“ von obiger Vorschrift der Bitumkehrung ausgehen. Weiterhin vereinbaren wir für das Vorzeichen: $+$ = 0, $-$ = 1. Einerseits

$\begin{array}{r} + 0 \rightarrow 0 \ 00000 \\ - 0 \rightarrow 1 \ 11111 \end{array}$	$\begin{array}{r} + 6 \rightarrow 0 \ 00110 \\ + 0 \rightarrow 0 \ 00000 \\ \hline + 6 \rightarrow 0 \ 00110 \end{array}$	$\begin{array}{r} + 6 \rightarrow 0 \ 00110 \\ - 0 \rightarrow 1 \ 11111 \\ \hline + 6 \rightarrow 10 \ 00101 \end{array}$

haben wir dann die Folge **0 00000**, andererseits für die Negation **1 11111**. Nun addieren wir diese vorzeichenbehafteten „Nullen“ jeweils zu binär „6“:

Wie zu sehen, erhalten wir zwei völlig verschiedene Resultate einer mathematisch doch wirklich trivialen Addition von Nullen. Dies zeigt, dass wir die Vorschrift der Bitumkehr modifizieren müssen. Wie ersichtlich, erhalten wir im Fall der negativen „0“ eine Additionsstelle zuviel (Übertrag ist Übertrag, bis zum bitteren Ende). Man hat nun vereinbart, das zuviel erhaltene, vorderste Übertragsbit an der letzten Stelle zu addieren: Als Ergebnis erhalten wir **0 00110** = +6, womit eine Identität der Additionen erreicht ist.

14.8.1 Binär-Multiplikation

Zweier-Komplement

Bei dieser Art der Bitumkehrung „weiss“ man schon im Voraus, dass ein Bit zuviel verwendet wird, daher wird hier das überschüssige Bit gleich hinzuaddiert.

Wir addieren die positive und die negative Null, sowie das „überschüssige“ Bit als echte „1“ in der letzten, rechten Binärstelle (als LSB). Das Ergebnis der Addition lautet dann 10 00000. Wir schneiden die erste '1' weg, da wir sie ohnehin schon „verbrauchen“ haben und erhalten 0 00000. Damit ist die Addition zweier Nullen mathematisch korrekt. Die beiden Komplemente werden auch „echtes“, bzw. „unechtes“ Komplement genannt.

+ 0	→	0	00000
- 0	→	1	11111
+ 1	→	0	00001 (als LSB)
- 0	→	10	00000

Kehren wir nun zum Ausgangspunkt zurück: Mit der Einführung des Zweierkomplements lässt sich auch die Subtraktion auf eine fortgesetzte Addition zurückführen, wir müssen in der Hardware nur einen zusätzlichen „Komplementbildner“ einsetzen, der vor der Addition das Zweierkomplement bildet, das dann wie ein „normaler“ Additionsterm ohne Vorzeichen behandelt wird. Ganz wichtig ist auch die Tatsache, dass man das Vorhandensein zweier verschiedener „Nullen“ in der Rechnerhardware nicht dulden kann.

Multiplikation

In der Schule wurde uns die Multiplikation „von Hand“ beigebracht unter Verwendung des kleinen Einmaleins. Wir werden uns auch hier zunächst auf ganze Zahlen beschränken. Wie nachfolgend dargestellt, wird mit der Einerstelle des Multiplikators in den Multiplikanden hineinmultipliziert, wobei das Ergebnis rechtsbündig unter Letzteren hingeschrieben wird. Sodann multiplizieren wir mit der Zehnerstelle und schieben (shiften) das Teilprodukt eine Stelle nach links. Die allgemeine Regel lautet:

Beim Multiplizieren mit Zehn wird der Multiplikand um eine Stelle nach links verschoben und an seiner Einerstelle eine '0' eingefügt.

Bei der binären Multiplikation enthält unser Einmaleins wesentlich weniger Vereinbarungen. Es gilt: **0*0=0, 0*1=0, 1*0=0, 1*1=1**, zusätzlich gelten die bei der Addition bereits eingeführten Vereinbarungen. Wie bei der Multiplikation zur Basis Zehn schreiben wir Multiplikand und Multiplikator in Binärform nebeneinander. Da der Multiplikator nur „0“ und „1“ enthält, gestaltet sich das Hinschreiben der Teilprodukte wesentlich einfacher als bei der dezimalen Multiplikation: Entweder schreiben wir den unveränderten Multiplikanden oder eine

Dezimal-System	Dual-System
Multiplikand*Multiplikator	Multiplikand*Multiplikator
$\begin{array}{r} 45 * 13 \\ \underline{135} \\ 45 - \\ \hline 585 \end{array}$ <p>Teilprodukte Ergebnis</p>	$\begin{array}{r} 101101 * 1101 \\ \underline{101101} \\ 000000 \\ 101101 - \\ \underline{101101 - -} \\ 1001001001 \end{array}$ <p>Teilprodukte Ergebnis</p>

Multiplikation als fortgesetzte Addition

14.8.2 Binär-Division

Multiplikanden oder eine entsprechende Zahl von Nullen in unser Schema, wobei wir wieder mit der Einerstelle beginnen und jeweils um eine Position nach links shiften. Sodann werden die Teilprodukte aufaddiert. Dies geschieht allerdings nicht, wie im Schema angeschrieben, dass man alle Teilprodukte errechnet und zusammen aufaddiert, sondern genau wie bei der o.a. Addition: Bei der Multiplikation wird das erste Teilprodukt zum zweiten Teilprodukt addiert, dann zum Ergebnis das dritte Teilprodukt, usw.

Ein Sonderfall soll nicht unerwähnt bleiben, denn hier geht man vor wie im Dezimalbereich: Beim Multiplizieren mit „2“ wird dem Multiplikanden eine „0“ angehängt, wodurch sich jeweils seine Stellenwertigkeiten um ein Bit nach links verschieben.

Soll mit anderen Zweierpotenzen multipliziert werden, so gilt Entsprechendes. (Kommen in einem Programm viele solcher Multiplikationen vor, so sollte ein „schneller“ Compiler bei der Übersetzung solche Fälle erkennen, da sie unwahrscheinlich viel Rechenzeit ersparen).

Wie man sieht, lässt sich auch die Multiplikation auf die **fortgesetzte Addition** zurückführen, es fehlt uns nur noch die Division.

Division

Im Fall der Division ganzer Zahlen fragt man sich natürlich, wie sich das auf eine fortgesetzte Addition zurückführen lässt. Wir haben zwar in der Schule im Dezimalsystem die Division „von Hand“ ebenso eingepfiff bekommen (nur, wer kann das noch im heutigen Zeitalter der Taschenrechner), aber das war ja eine mühsame Probiererei, welches Vielfache des Divisors noch kleiner ist als die entsprechende Zahlenfolge des Dividenden. Folglich werden wir hier so nicht vorgehen, sondern die genannte Probiererei in Einzelschritte zerlegen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Algorithmus im Dezimalsystem vorgestellt. Als eifriger Student kann man sich gerne der Mühe unterziehen, ein einfaches Beispiel im Binärsystem durchzuspielen, es ist nur wesentlich mehr Schreibarbeit.

Dividend : Divisor = Quotient (evtl. mit Rest)

+673 : 32 = 21

+673	: 32	= 21
-32		
=+35		
-32		
= +03		
-32		
= -29		
+32		
= +033		
-032		
= +001		

Bereichs-
Abgrenzung
(>0 und <32)

+ Rest 1

1. Subtraktion (Ergebnis noch positiv)
2. Subtraktion (Ergebnis ist noch positiv, aber . .)
3. Subtraktion (Kontrolle) (. . nicht gross genug, nun negativ)

Korrektur-Addition (dann nächste Stelle holen)
(Ergebnis ist wieder positiv = obiger Wert 3)

1. Subtraktion (1x = 2. Quotientenstelle)
(Rest = +1)

2x (Zehnerstelle)

Dezimale Division als fortgesetzte Subtraktion

14.8.3 Binär-Division

Leider ergibt sich bei der Division ganzer Zahlen ein Rest, mit dessen Ermittlung wir unseren Algorithmus abschliessen wollen. Nachfolgend beginnen wir, den **negativen Divisor** unter die Hunderter-, bzw. Zehnerstelle zu schreiben. (Sinnge-
mäss wäre dies im Binärsystem das Zweierkomplement). Als Ergebnis der ersten Subtraktion erhalten wir ein positives Ergebnis. Wir wissen aus Rechner-
sicht aber nicht, ob wir nochmals den Divisor subtrahieren dürfen, um ein posi-
tives Ergebnis grösser als den Divisor zu erhalten (wie man sieht, lassen sich diese Schritte sehr schön algorithmieren).

In der nun folgenden dritten Subtraktion erhalten wir ein negatives Ergebnis, wir sind einen Schritt zu weit gegangen (es geht aber nur so). Somit erfolgt nun eine Korrektur-Addition, die dasselbe Ergebnis liefert wie ein Schritt weiter oben im Feld der Bereichsabgrenzung. Zu unserem Ergebnis „03“ wird nun „passend“ (in der Einerstellenposition) die Einerstelle des Dividenden hinzugefügt. Die durch diese Aktion erhaltene Zahlenfolge „033“ ist grösser als der Divisor, somit kann er subtrahiert werden und es verbleibt der Rest „1“. Vom Ablauf her war eine zweimalige erfolgreiche Subtraktion des Divisors möglich, wir haben uns also in der Zehnerstelle eine „2“ zu merken, in der Einerstelle konnte nur einmal subtra-
hiert werden. Somit lautet das Ergebnis unserer langatmigen Division durch fort-
gesetzte negative Addition: 21 + Rest 1.

Gehen wir nun zurück ins Binärsystem, so ergibt sich auch hier für ganze Zahlen zunächst die folgende einfache Regel:

Division durch '2' bedeutet ein Shiften nach rechts um eine Stelle.

Stand dort eine „1“, so ist diese entweder durch die Operation verloren, oder muss als Rest „aufgesammelt“ werden. Entsprechendes weiteres Verschieben nach rechts ergibt sich für die höheren Zweierpotenzen. Auf eine ins Einzelne gehende Diskussion der Division beliebiger binärer Zahlen soll hier verzichtet werden, das Prinzip ist aus obiger Dezimaldarstellung ableitbar.

Ergänzend sei noch angemerkt, dass man die Division auch nach einem Algo-
rithmus mit iterativer Multiplikation lösen kann. Darauf soll hier aus Platzgründen verzichtet werden.

Nach diesem Ausflug dürfte die Notwendigkeit der Anwendung von Invertern im Rechner plausibel erscheinen. Das grosse Gebiet der logischen Schaltungen kann nun fortgesetzt werden mit einfachen Verknüpfungen von Grössen durch UND und ODER, sowie deren Verneinung mit einem Inverter.

14.9 Boole'sches

- Die Negation einer Eingangsgrösse

Im einfachsten Fall ist $y = L$ wenn $x = 0$

und $y = 0$ wenn $x = L$

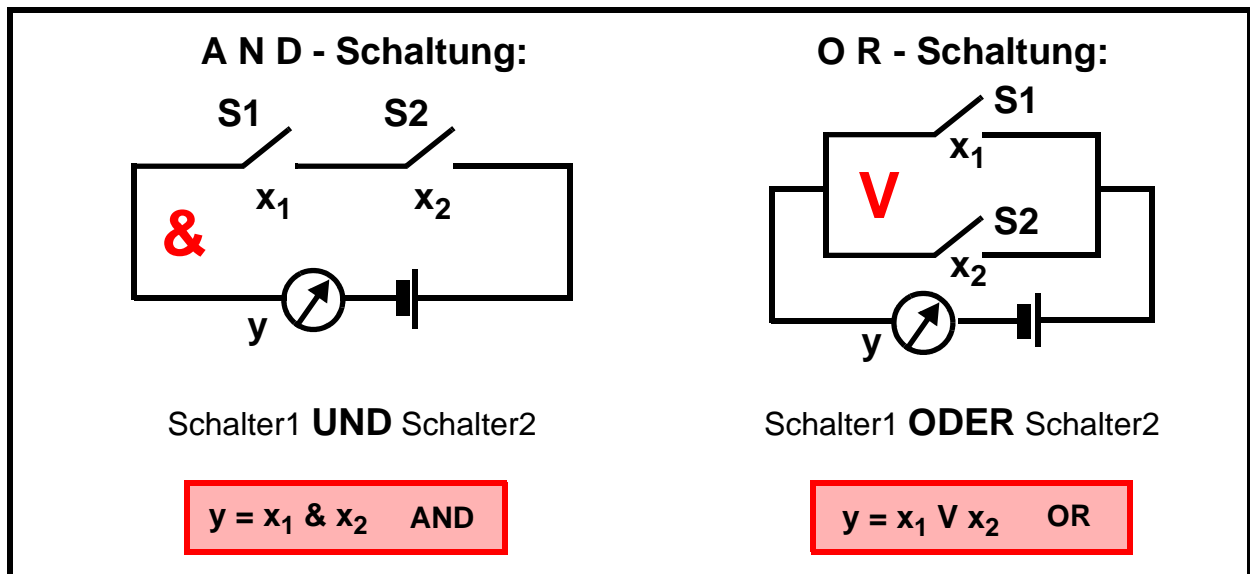
(Sprich: y ist gleich x nicht)

$$y = \bar{x}$$

Negation

Verifikation erfolgt durch einen Inverter

- Die AND- und OR-Funktion für zwei Eingangsgrössen



Aus dem ED-Inverter lassen sich zwei einfache Grundgatter ableiten, das **NAND** (Nicht-UND) und das **NOR** (Nicht-ODER)

- Die NAND-Funktion

Die NAND-Funktion entsteht durch Negation der AND-Funktion. Sie ist von grösster Bedeutung für die technische Realisierung mit Transistoren beim Aufbau höchstintegrierter Bauteile.

$$y = \overline{x_1 \& x_2}$$

NAND

- Die NOR-Funktion

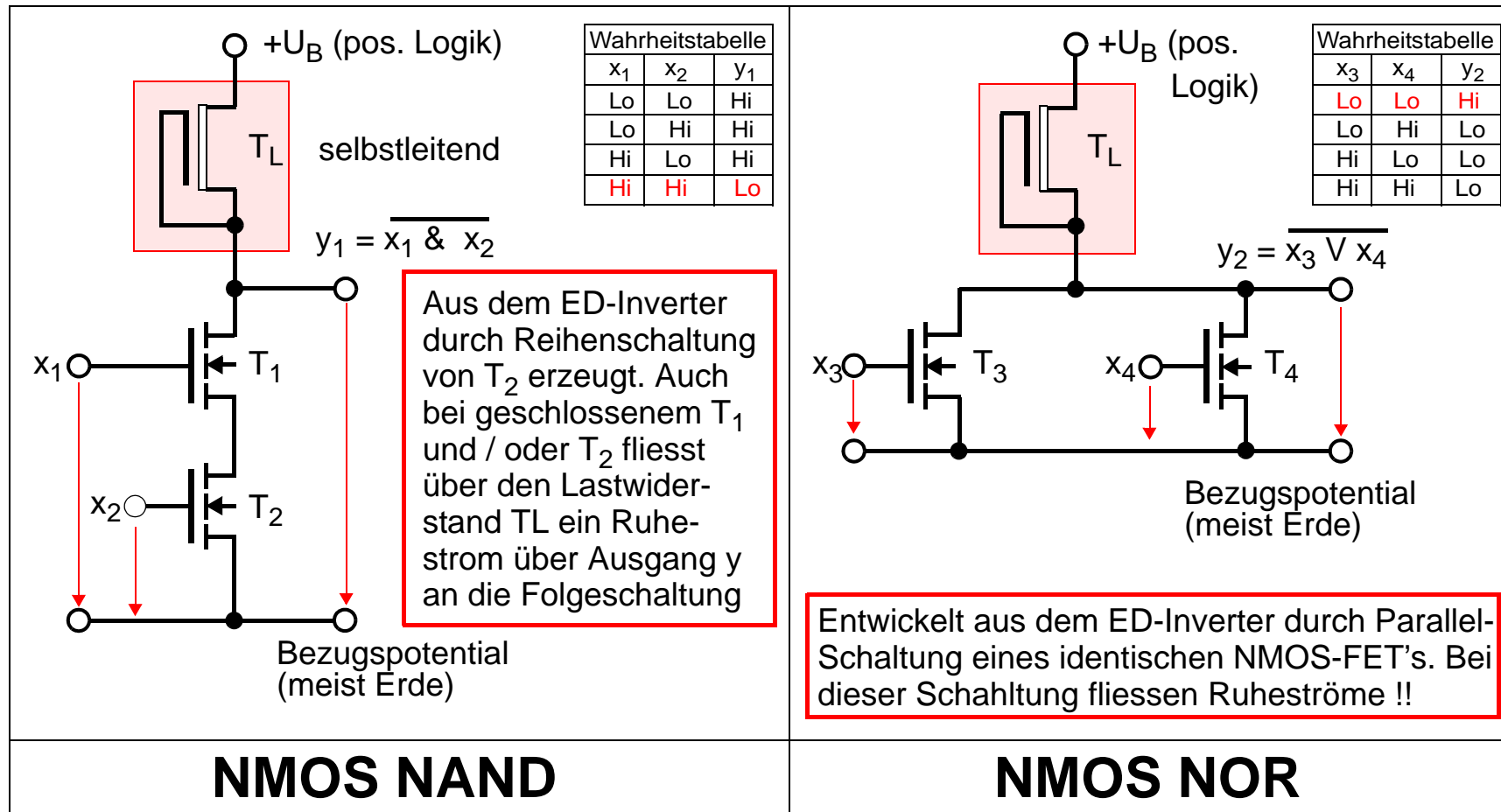
Diese entsteht durch Negation der OR-Funktion. Durch Anwendung des **Morgan'schen Theorems** lässt sich die NOR-Funktion umformen und gleichzeitig nachweisen, dass sich alles aus NAND's aufbauen lässt.

$$y = \overline{x_1 \vee x_2}$$

NOR

$$y = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \& \overline{x_2}$$

14.10 Die NMOS-Gatter NAND und NOR



Die entsprechenden PMOS-Gatter können durch Polumkehr konstruiert werden.

14.10.1 Legende zu NMOS-Gattern

Logische Gatter dienen zur Verknüpfung von mindesten zwei Eingangsgrößen x_i zu einer neuen Ausgangsgröße y . Es werden hier nur die beiden technisch wichtigsten Fälle des **NAND** und des **NOR** besprochen.

1. NAND in positiver Logik und NMOS-Technik. Wir können dann folgende vier Fälle (Permutation von 2 Pegeln) unterscheiden:

- Am Gate von T_1 liegt keine Spannung an ($x_1 = \text{Lo}$), daher ist dieser MOSFET gesperrt, dasselbe gilt für T_2 . Somit fließt über T_L ein vernachlässigbar kleiner Strom und am Ausgang y_1 steht die Spannung $+U_B - U_{TO} = \text{Hi}$
- Es liegt nur am Gate von T_1 ein Lo-Pegel, der FET sperrt. Unabhängig von T_2 steht am Ausgang wieder näherungsweise $+U_B = \text{Hi}$
- An T_2 liegt Lo und an T_1 liegt Hi, trotzdem wird der Abfluss nach Erde gesperrt und auch hier ist die Ausgangsgröße $y_1 = \text{Hi}$.
- Nur wenn $x_1 = \text{Hi}$ und $x_2 = \text{Hi}$ (beide FETs leiten, entspricht jeweils einem offenen Schalter), dann fließt ein von den Widerständen in T_L , T_1 und T_2 bestimmter Strom nach Erde. Da der Lastwiderstand (Dimensionierung auch hier lang und schmal) wesentlich grösser ist als die beiden MOSFET-Durchgangswiderstände (Dimensionierung kurz und breit), fällt U_B fast ganz an R_{Last} ab, dadurch entsteht am Ausgang $y_1 = \text{Lo}$. **Es müssen also beide Eingangswerte $x_i = \text{Hi}$ sein, damit $y_1 = \text{Lo}$ entsteht**, bei den anderen drei Permutationen ist immer $y_1 = \text{Hi}$. Dies ist in der obigen Wahrheitstabelle dargestellt.

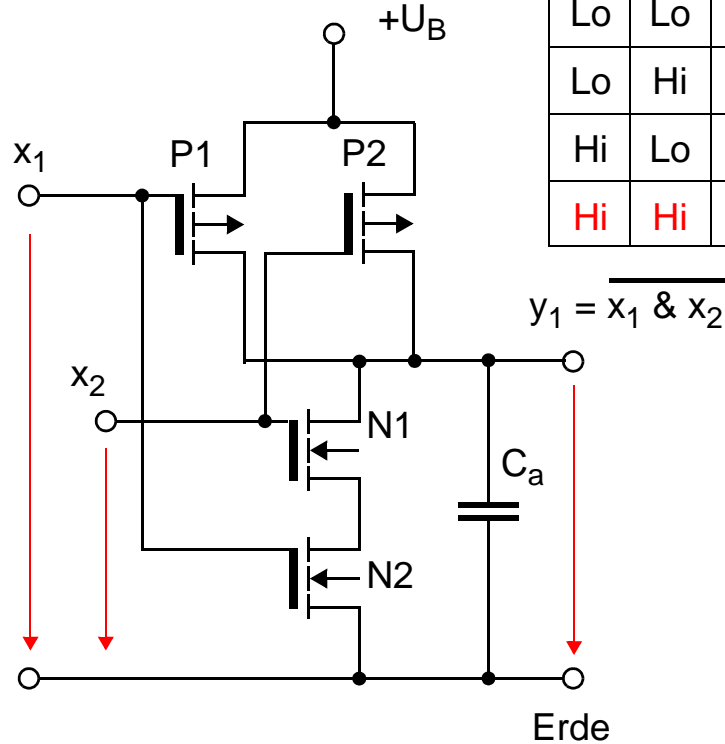
1. NOR in positiver Logik und NMOS-Technik. Wir können auch hier folgende vier Fälle unterscheiden:

- An den Gates von T_3 und T_4 liegt jeweils der Pegel Lo, somit sind beide FET's gesperrt und am Ausgang steht der Pegel $y_2 = \text{Hi}$.
- Ist der Pegel von T_3 im Zustand $x_3 = \text{Hi}$ und T_4 im Zustand $x_4 = \text{Lo}$, so fließt ein Strom nach Erde und am Ausgang entsteht $y_2 = \text{Lo}$.
- Bei der Vertauschung von T_3 und T_4 ist der Weg zum Potential-Ausgleich für $+U_B$ ebenfalls vorhanden, also ist auch hier $y_2 = \text{Lo}$.
- Sind die Gates beider MOSFETs im Zustand Hi, dann fließt der Strom von der Spannungsversorgung jeweils zur Hälfte über T_3 und T_4 und am Ausgang herrscht der Pegel $y_2 = \text{Lo}$. Man kann also den **Pegel $y_2 = \text{Lo}$** nur dadurch erhalten, dass man **beide Eingangsgrößen auf Hi** legt.

Insgesamt ergeben sich vier Familien von Schaltungen: Je zwei für positive und negative Logik und je zwei für NMOS und PMOS. Dabei kehrt sich jeweils beim Wechsel von einer Logik-Polarität zur konträren auch die Zuordnung zum Ausgang um: Aus NAND wird NOR, usw.

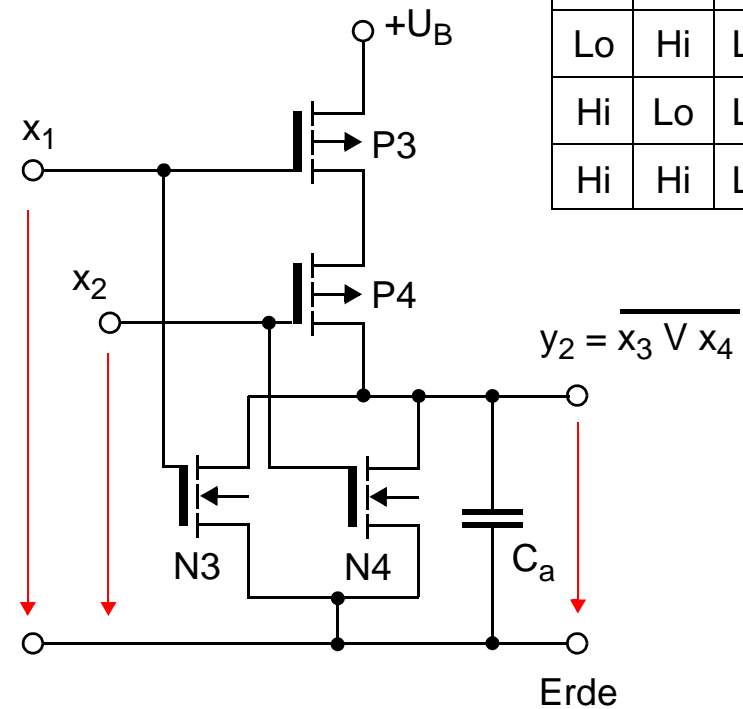
14.11 CMOS-Gatter

Positive Logik



x_1	x_2	y_2
Lo	Lo	Hi
Lo	Hi	Hi
Hi	Lo	Hi
Hi	Hi	Lo

CMOS NAND-Gatter



x_3	x_4	y_2
Lo	Lo	Hi
Lo	Hi	Lo
Hi	Lo	Lo
Hi	Hi	Lo

CMOS NOR-Gatter

14.11.1 Legende zu CMOS

Wie im nachfolgenden sichtbar werden wird, besitzen CMOS (complementary MOS) die Funktion eines schnellen Wechselschalters, d.h. man hat äusserst schnelle Gatter mit sehr niedriger Verlustleistung je Gatter. Dazu werden wie beim CMOS-Inverter immer **Paare von selbstsperrenden NMOS und PMOS-FETs** zusammen geschaltet. Diese FETs werden zur Unterscheidung mit N_i und P_i bezeichnet.

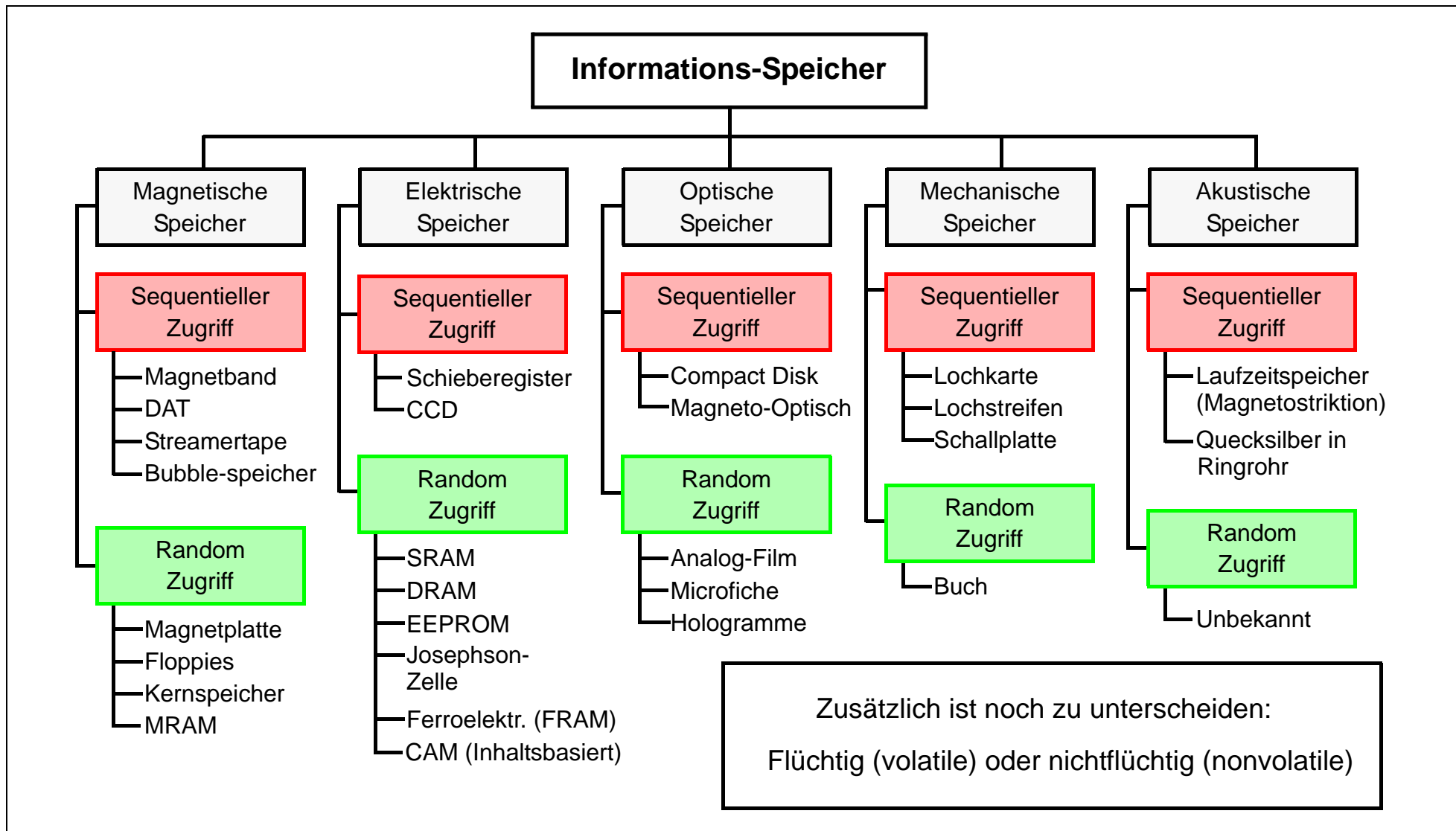
Nachfolgend soll nur das CMOS NAND-Gatter besprochen werden, das NOR kann als selbsterklärend betrachtet werden.

Wie aus der Leitungsführung ersichtlich, ist immer das Gate eines PMOS-NMOS-Paares gemeinsam an einen der Eingänge x_i gelegt. Wie schon beim CMOS-Inverter besprochen, ist unabhängig vom Eingangspegel immer ein FET leitend und der Andere sperrt.

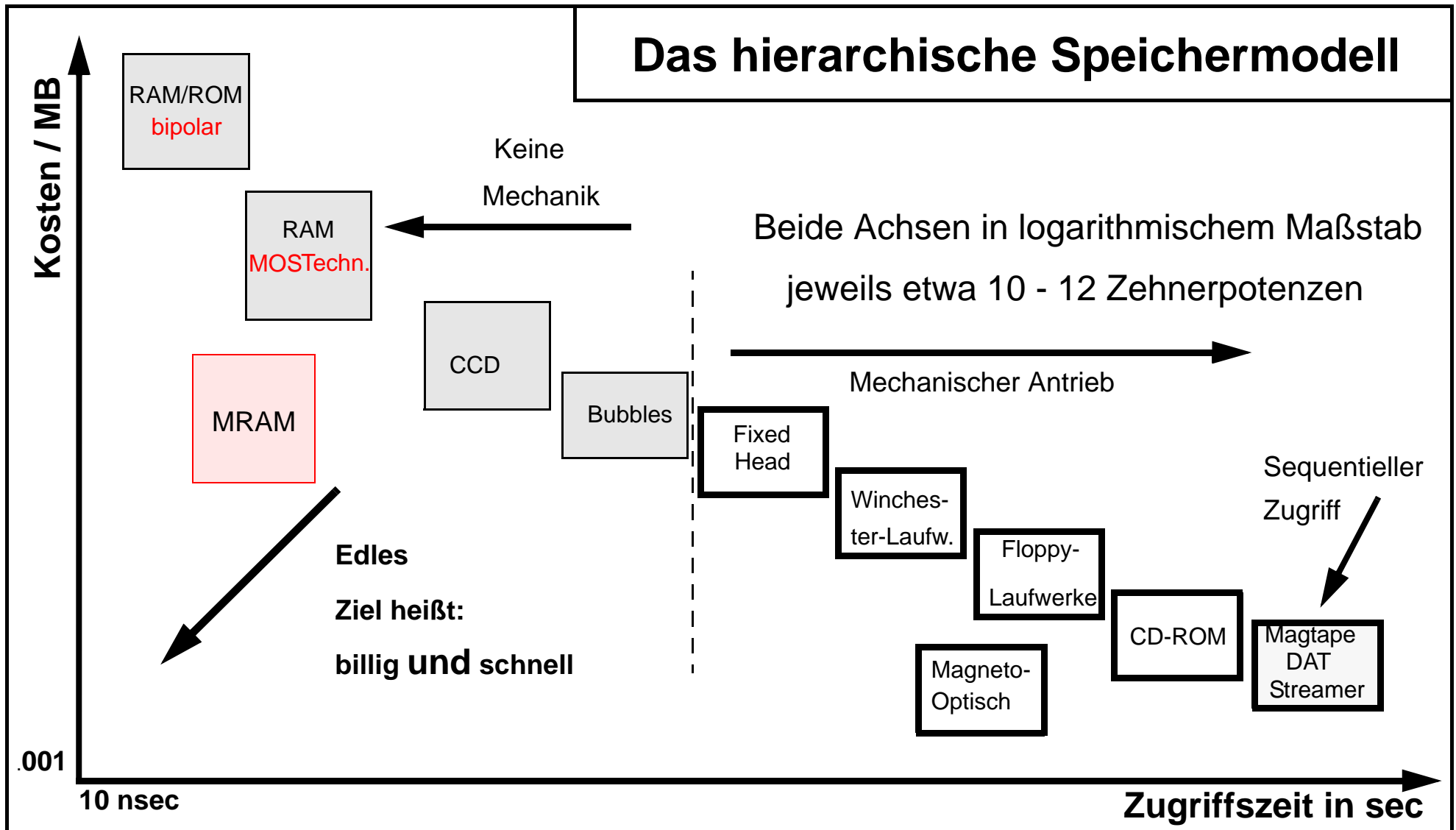
- Es sei $x_1 = x_2 = \text{Lo}$, dann leiten P_1 und P_2 , während N_1 und N_2 sperren. Damit wird der Schaltweg zum Ausgang y_1 mit der Spannung $+U_B$ versorgt, da der Abfluss nach Erde gesperrt ist. **Aus $x_1 = x_2 = \text{Lo}$ folgt $y_1 = \text{Hi}$.**
- Legt man $x_1 = \text{Lo}$ und $x_2 = \text{Hi}$, dann leitet P_1 und N_2 sperrt, wegen P_2 sperrt und N_1 leitet. Somit ist ein Pfad zum Ausgang y_1 geschaltet und der Weg nach Erde wegen der Hintereinanderschaltung von N_1 und N_2 gesperrt. **Aus $x_1 = \text{Lo}$ und $x_2 = \text{Hi}$ folgt $y_1 = \text{Hi}$.**
- Vertauscht man die Indizes der FETs, so ändert sich nichts an den vorigen Überlegungen.
- Nur wenn $x_1 = x_2 = \text{Hi}$, dann sperren P_1 und P_2 den Pfad, obwohl N_1 und N_2 leiten wird am Ausgang keine Spannung (**$y_1 = \text{Lo}$**) gemessen. Sollte am Kondensator C_a noch eine kleine Ladung Q_a vorhanden sein, dann fliesst diese über N_1 und N_2 nach Erde ab

Weitere Komponenten finden sich in den nachfolgenden Kapiteln als Einzel-Beispiele für die Anwendung des bisher Besprochenen.

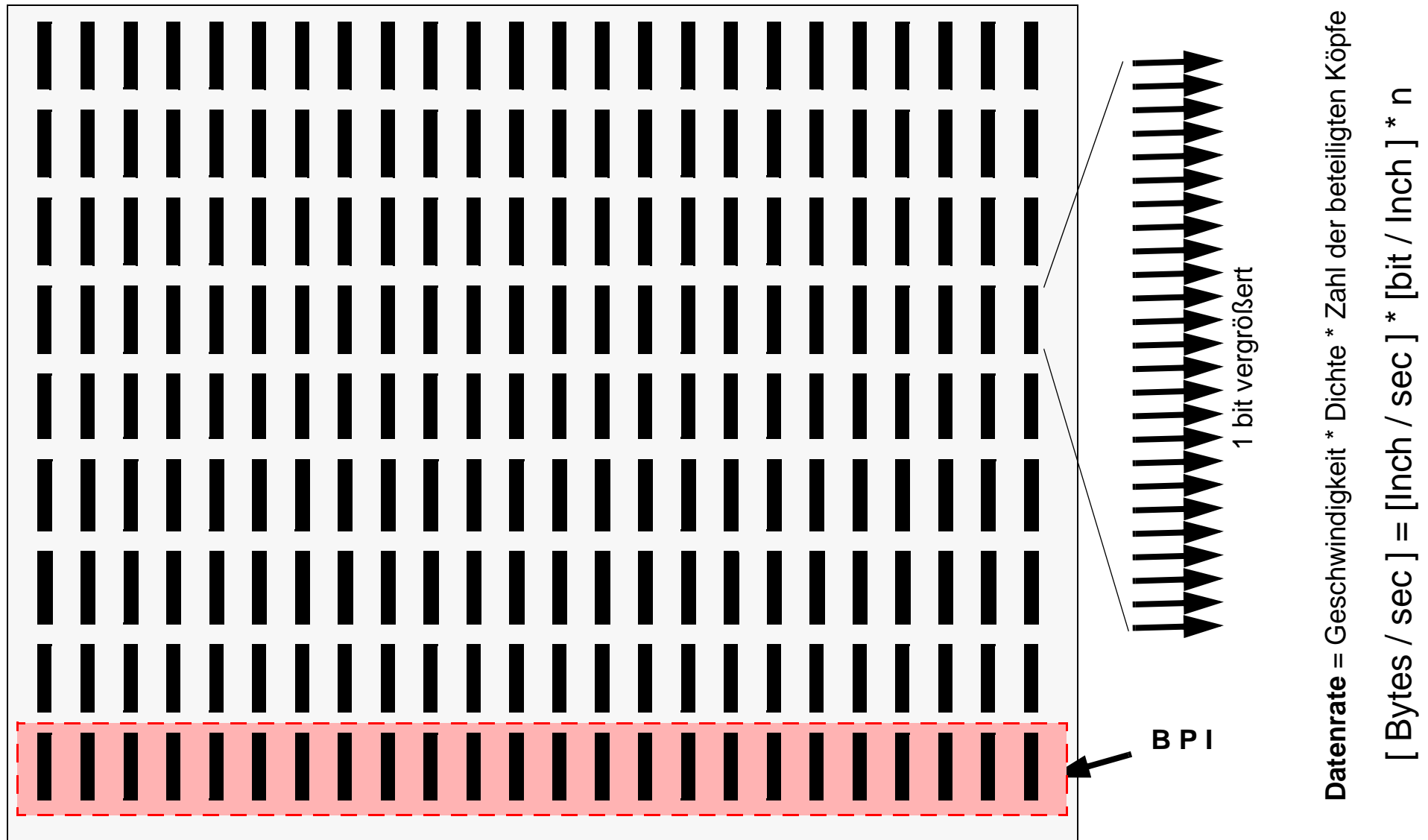
15. Speicherprinzipien



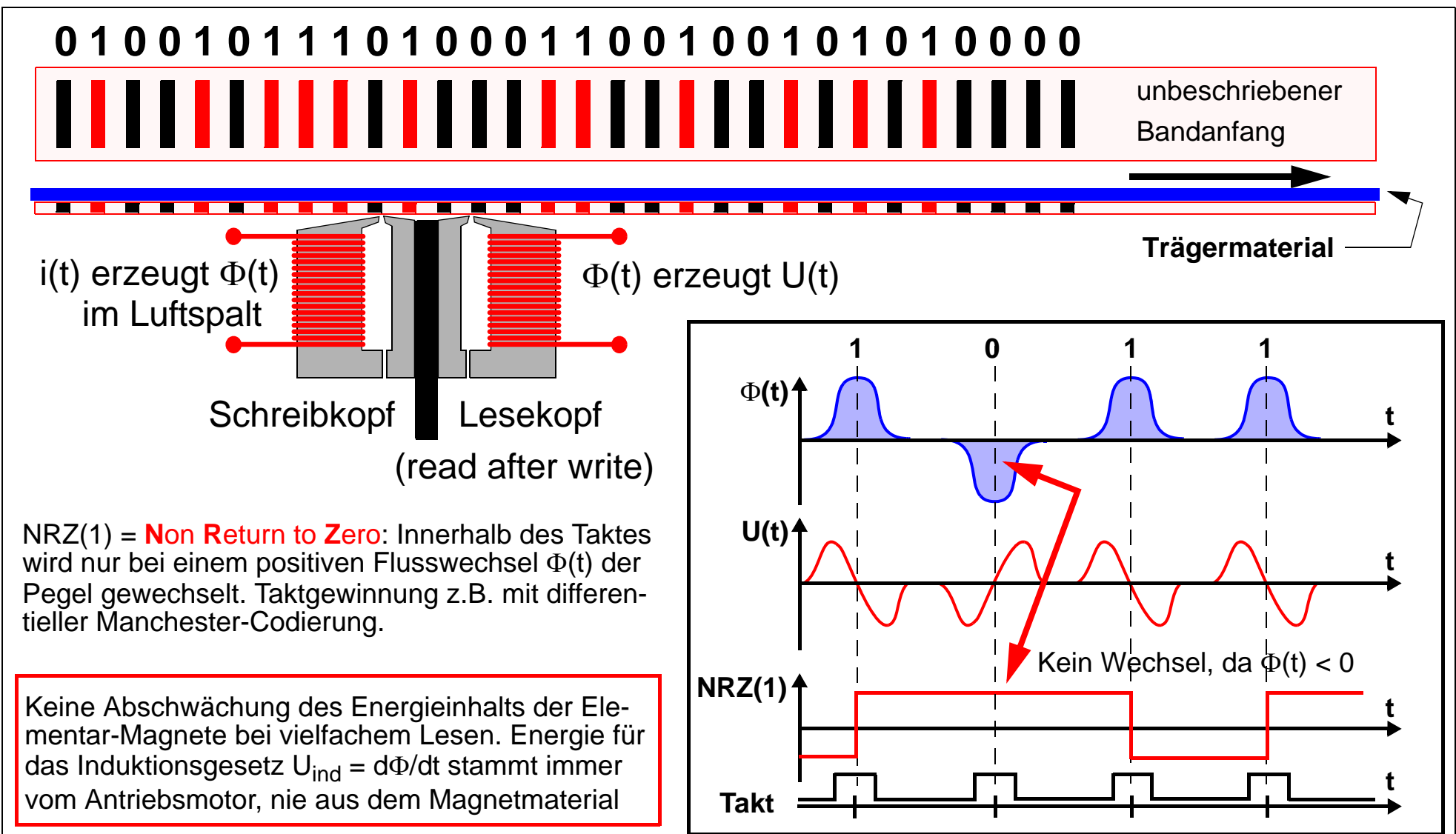
15.1 Magnetische Informations-Speicherung



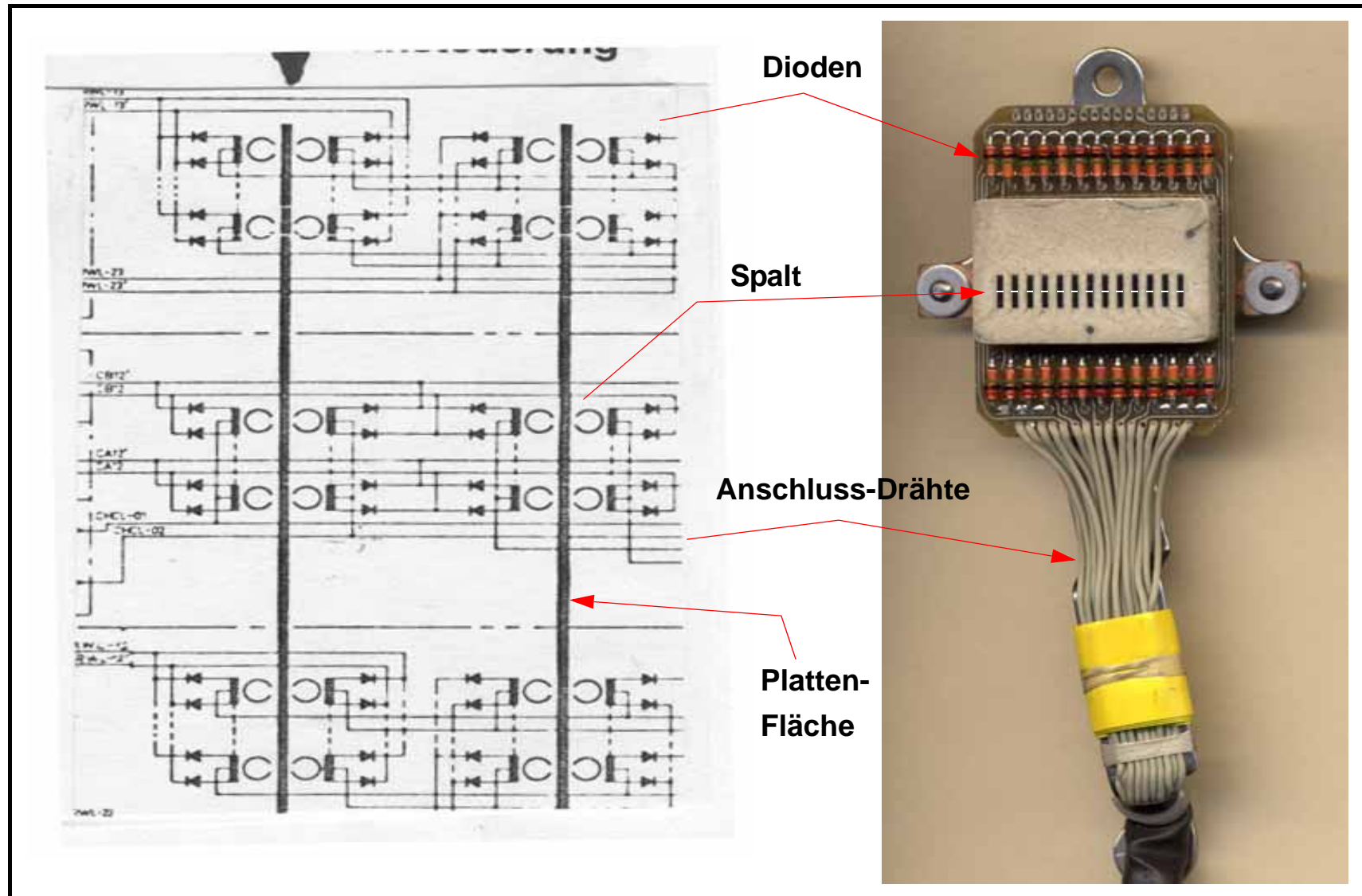
15.1.1 Neun-Spur-Band (auch Streamer-Tape)



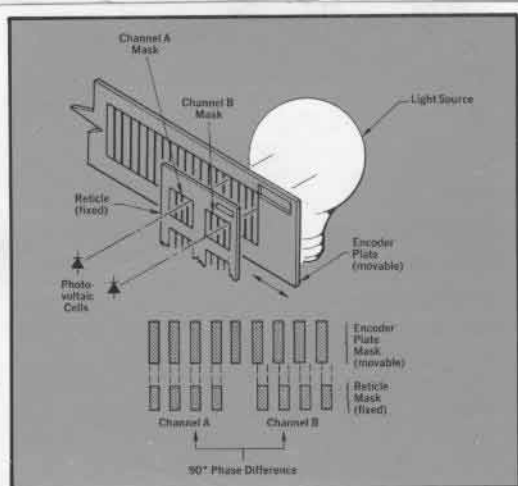
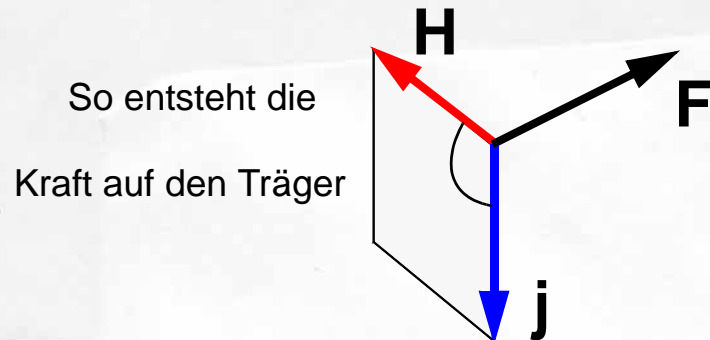
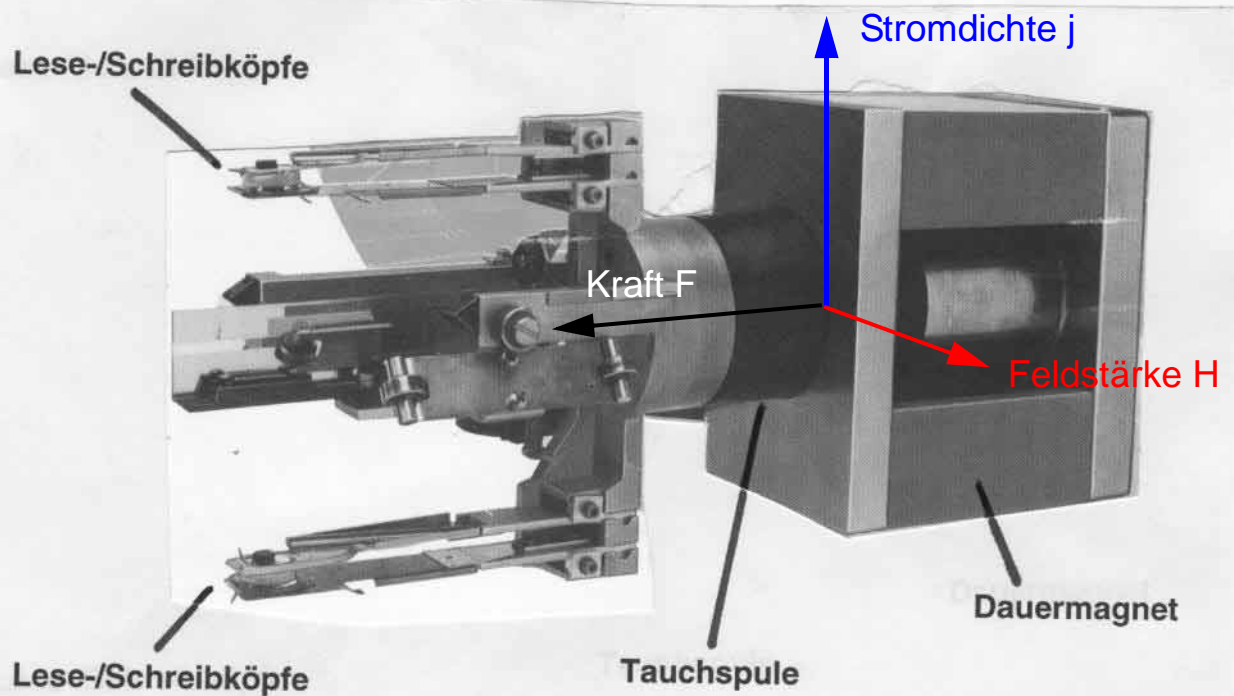
15.1.2 So wird magn. gelesen und geschrieben



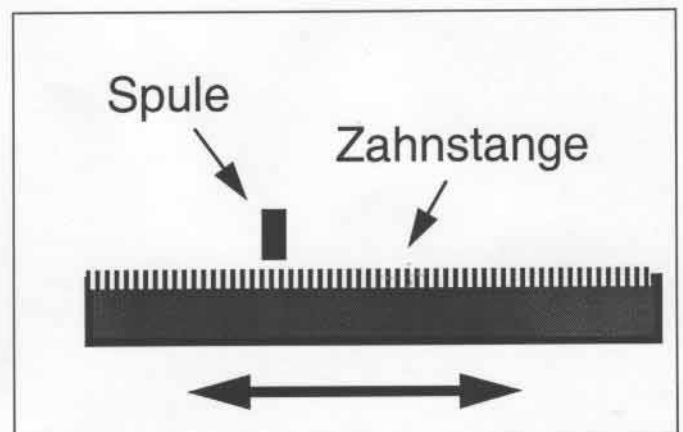
15.1.3 Plattenkopf von „innen“



15.1.4 Linearmotor

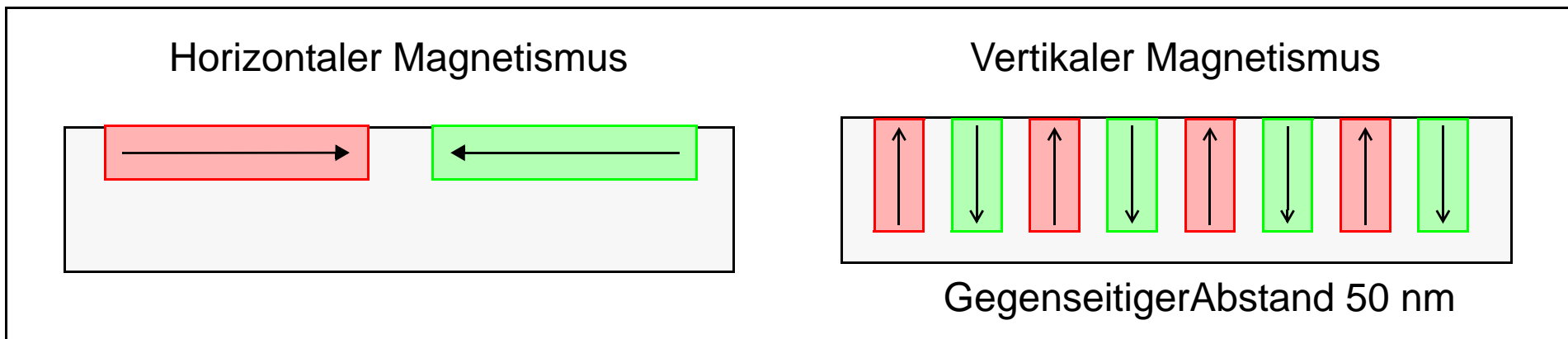
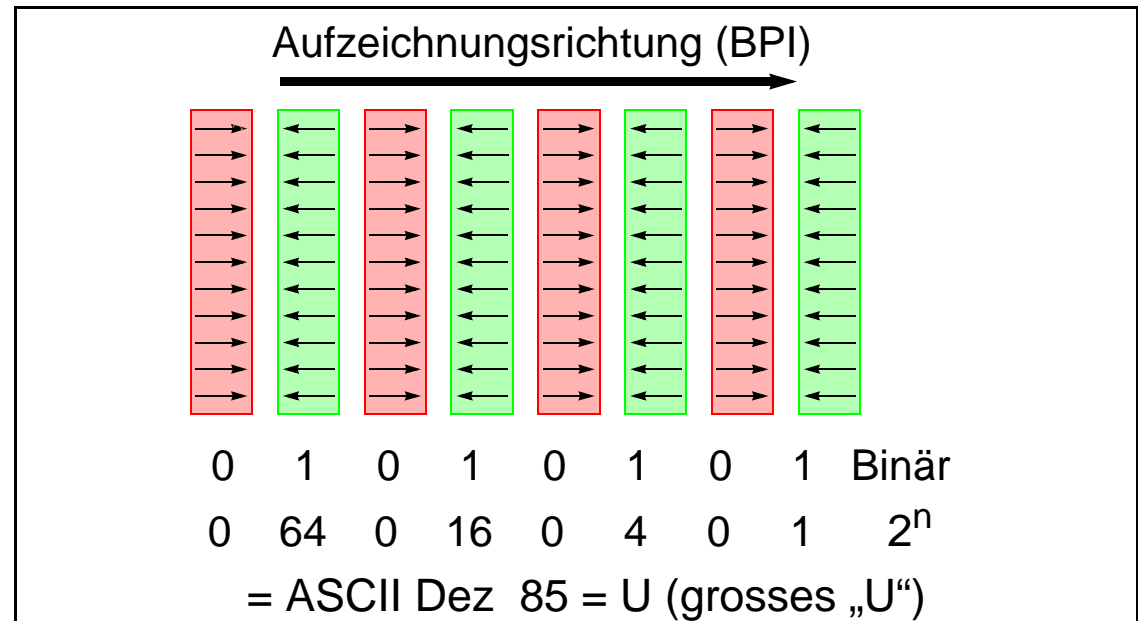
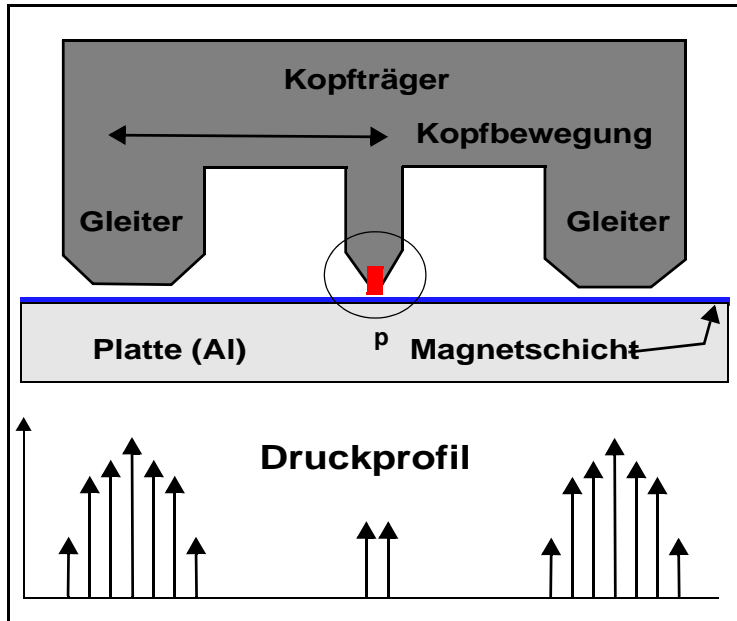


Optischer Encoder (Moiré-Effekt)



Magnetischer Encoder

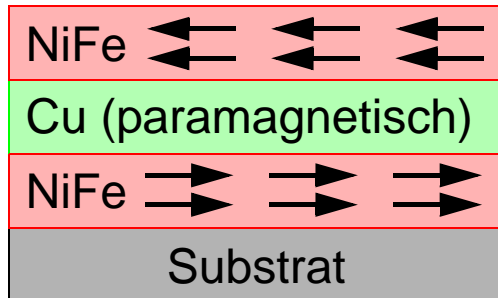
15.1.5 Horizontale / Vertikale Magnetisierung



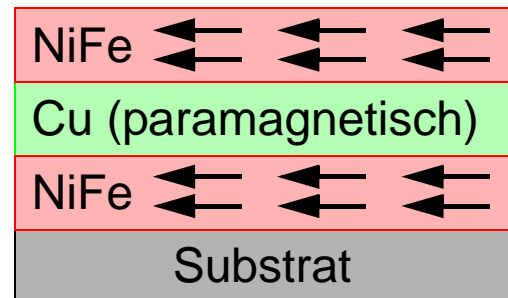
15.2 Magnetoresistanz

Magnetoresistance = **Änderung des spezifischen elektrischen Widerstands im Magnetfeld.**

Bei Metallen und Legierungen klein, sonst „Giant MR“;
Entdeckung 1988 durch Baibich et al.: „Giant Magnetoresistance of (001)Fe/(001)Cr Magnetic Superlattices“, Phys.Rev.Letters, vol. 61, p.2472, Nov. 1988

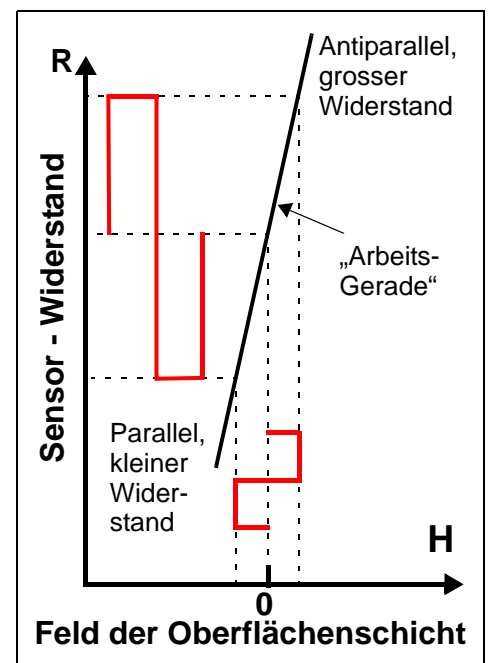
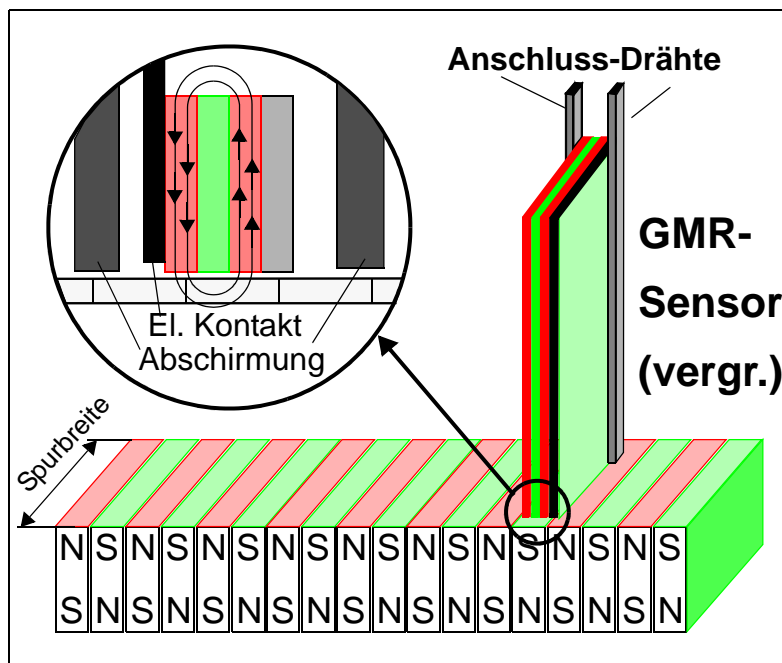


Kein Magnetfeld: Hoher Widerstand



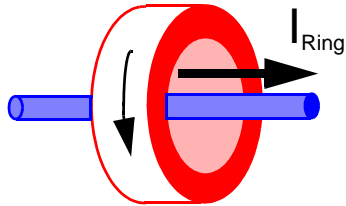
Hohes Magnetfeld: Kleiner Widerstand

Ursache der MR ist die parallele oder antiparallele Ausrichtung von Elektronenspins zum äusseren angelegten Feld (= Platte) an den dünnen aufgedampften Schichten

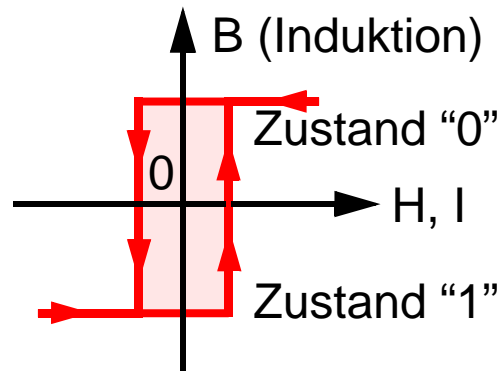


Trotz der eingezeichneten „Arbeitsgeraden“ beträgt die Widerstandsänderung $\Delta R/R = 8 - 110\%$, \rightarrow Spinpolarisation

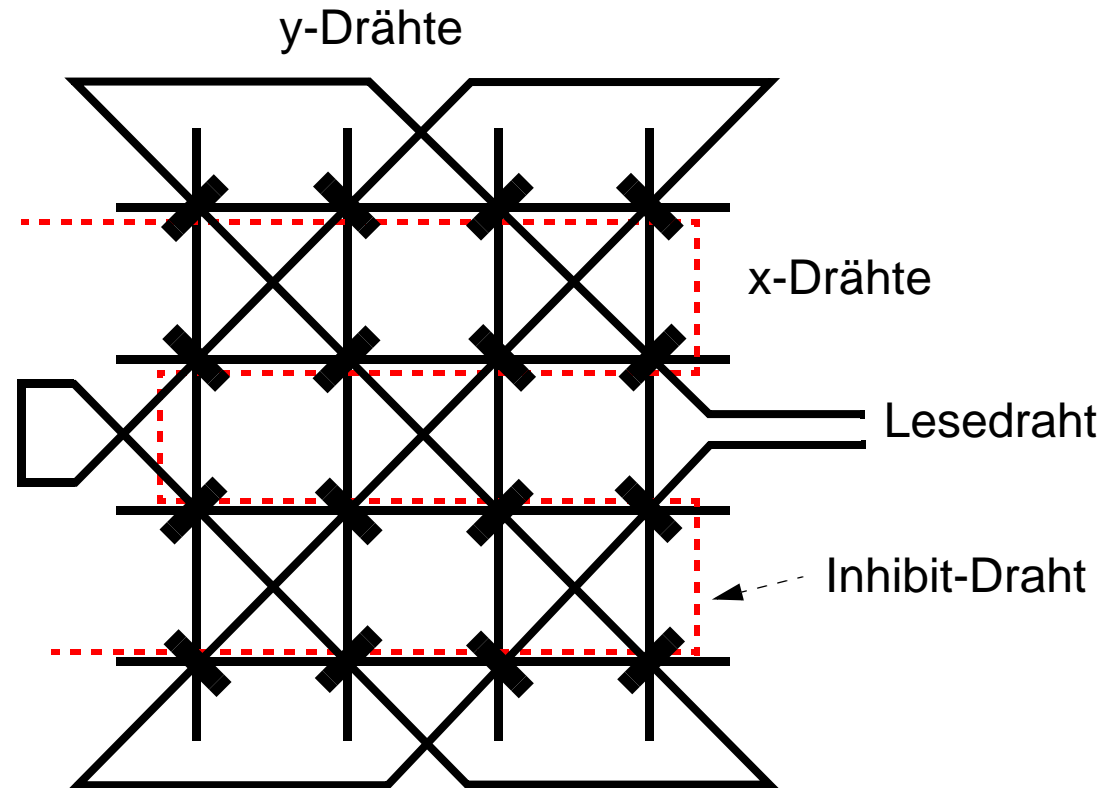
15.3 Kernspeicher



Magnetfeld eines
stromführenden Drahts



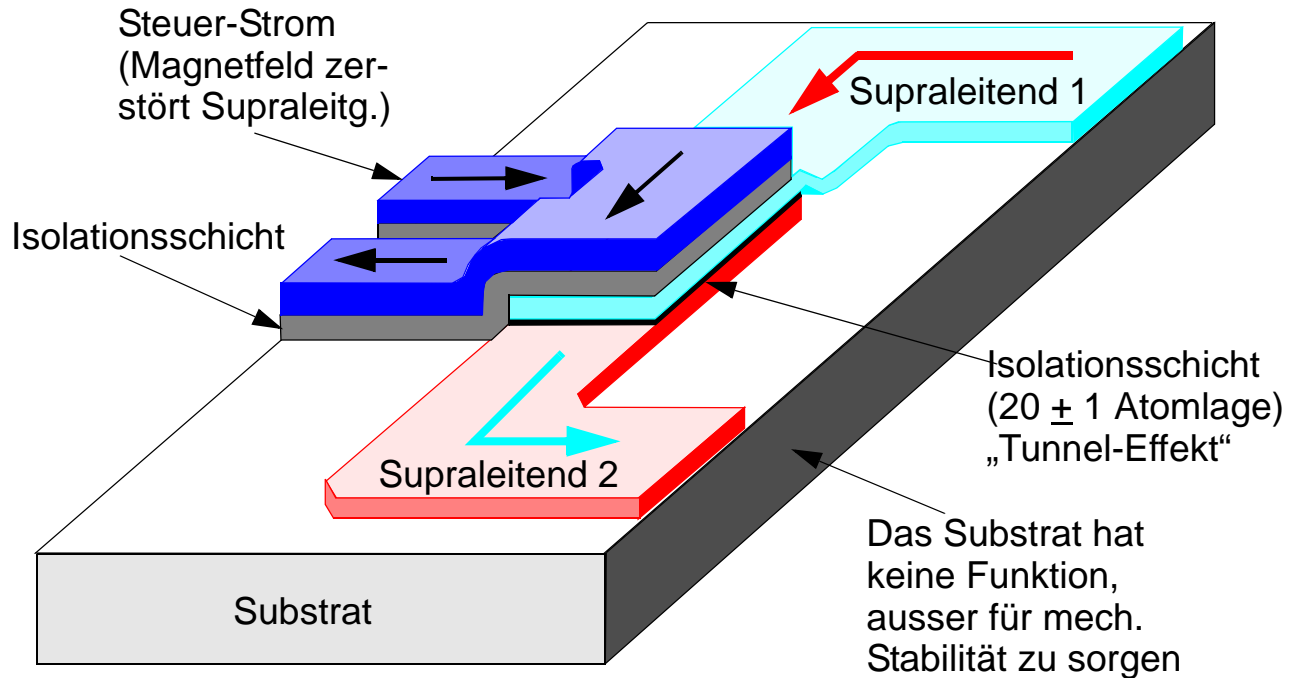
Hysteresis zur Speicherung
(zwei magnetische Zustände)



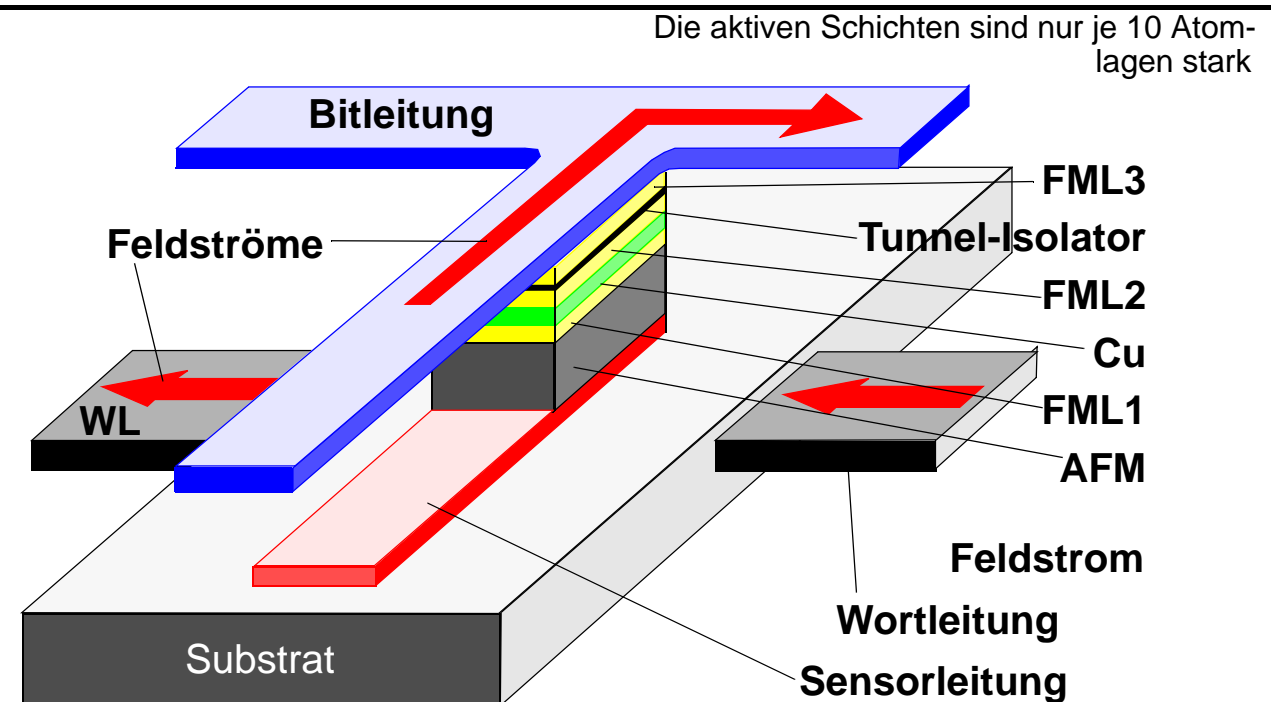
Ausführungsbeispiel für Lesen und
Schreiben (Inhibit-Draht für "1" -> "0" nach
der Stromumkehr in x- und y-Draht)

15.4 MRAM vs. SQUID

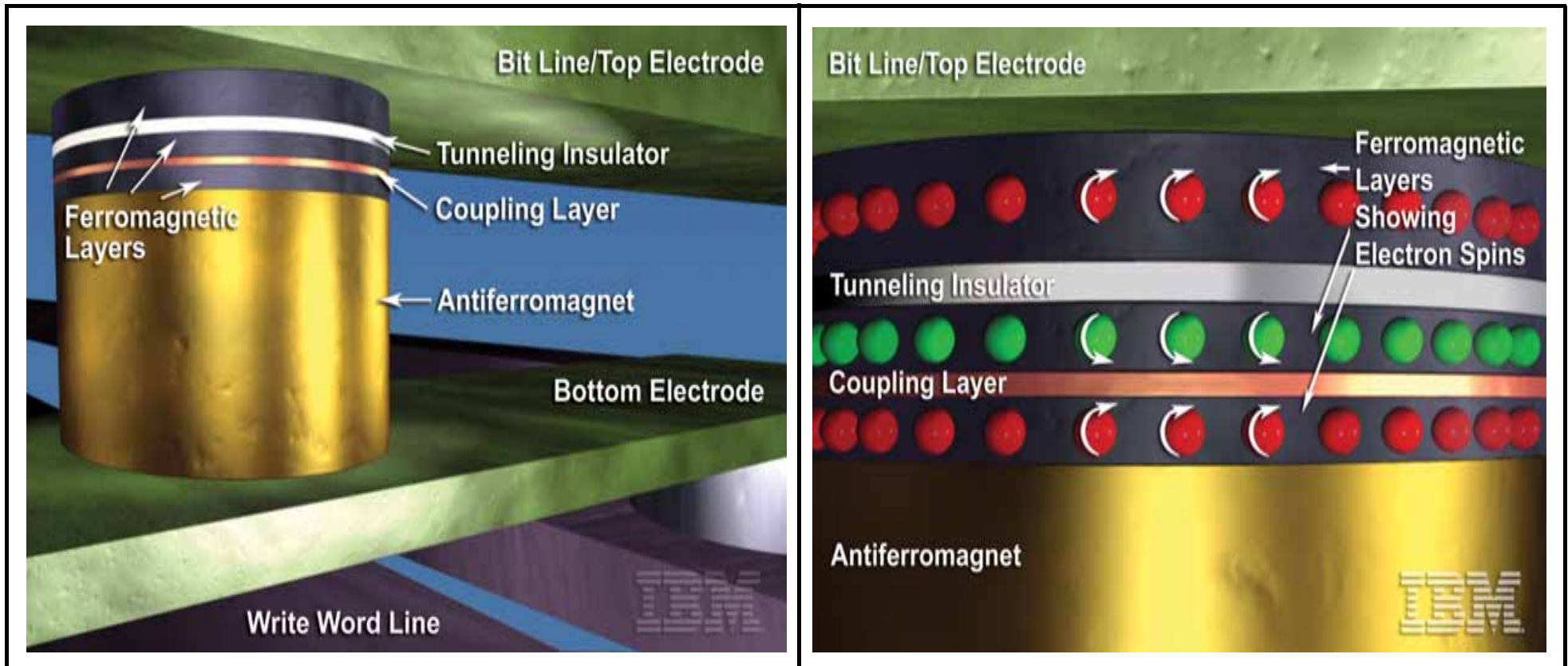
SQID Superconducting Quantum Interference Device (Josephson Junction)



MRAM = Magnetoresistive Random Access Memory



15.4.1 MRAM



Tunneleffekte ([Animation bei www.research.ibm.com/resources/news/20030610_mram.shtml](http://www.research.ibm.com/resources/news/20030610_mram.shtml))

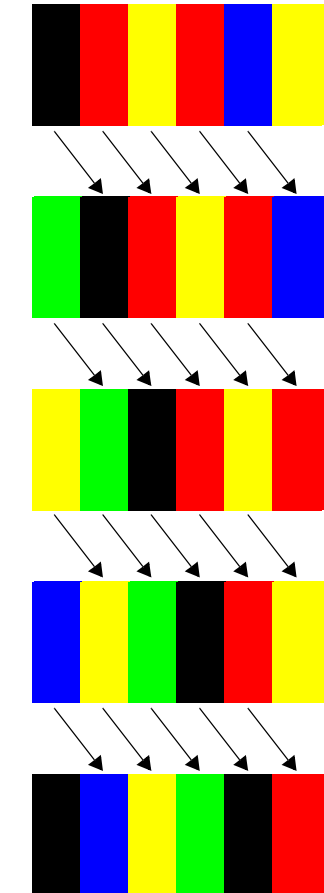
Spinpolarisation: Es tunneln einzelne, entsprechend ausgerichtete (spinpolarisierte) Elektronen

Supra-Leitung: Es tunneln Elektronenzwillinge (Cooper-Paare) mit Spin up / Spin down

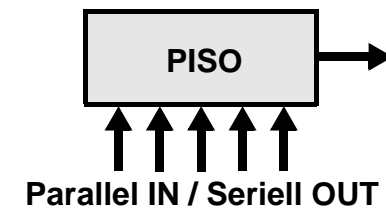
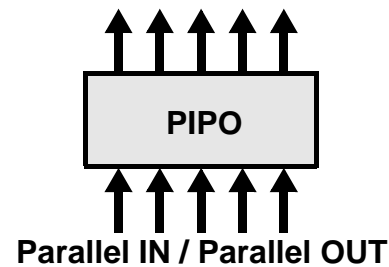
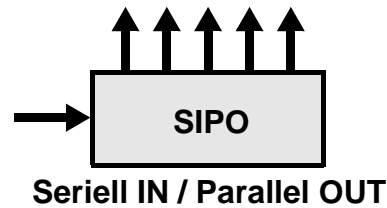
MRAM jetzt auch zum Rechnen, da dynamisch als AND, NAND, OR, und NOR schaltbar
(= Chamäleon-Prozessor) mit zwei zusätzlichen Leitungen

16. Elektrische Informations-Speicherung

Schieberegister, Organisationsformen

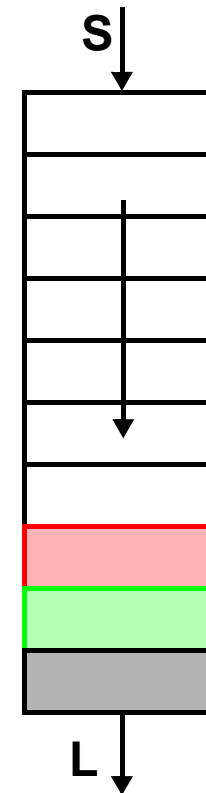


Wirkungsweise

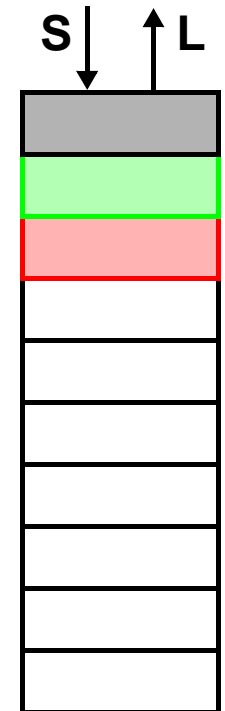


Ausführungsformen

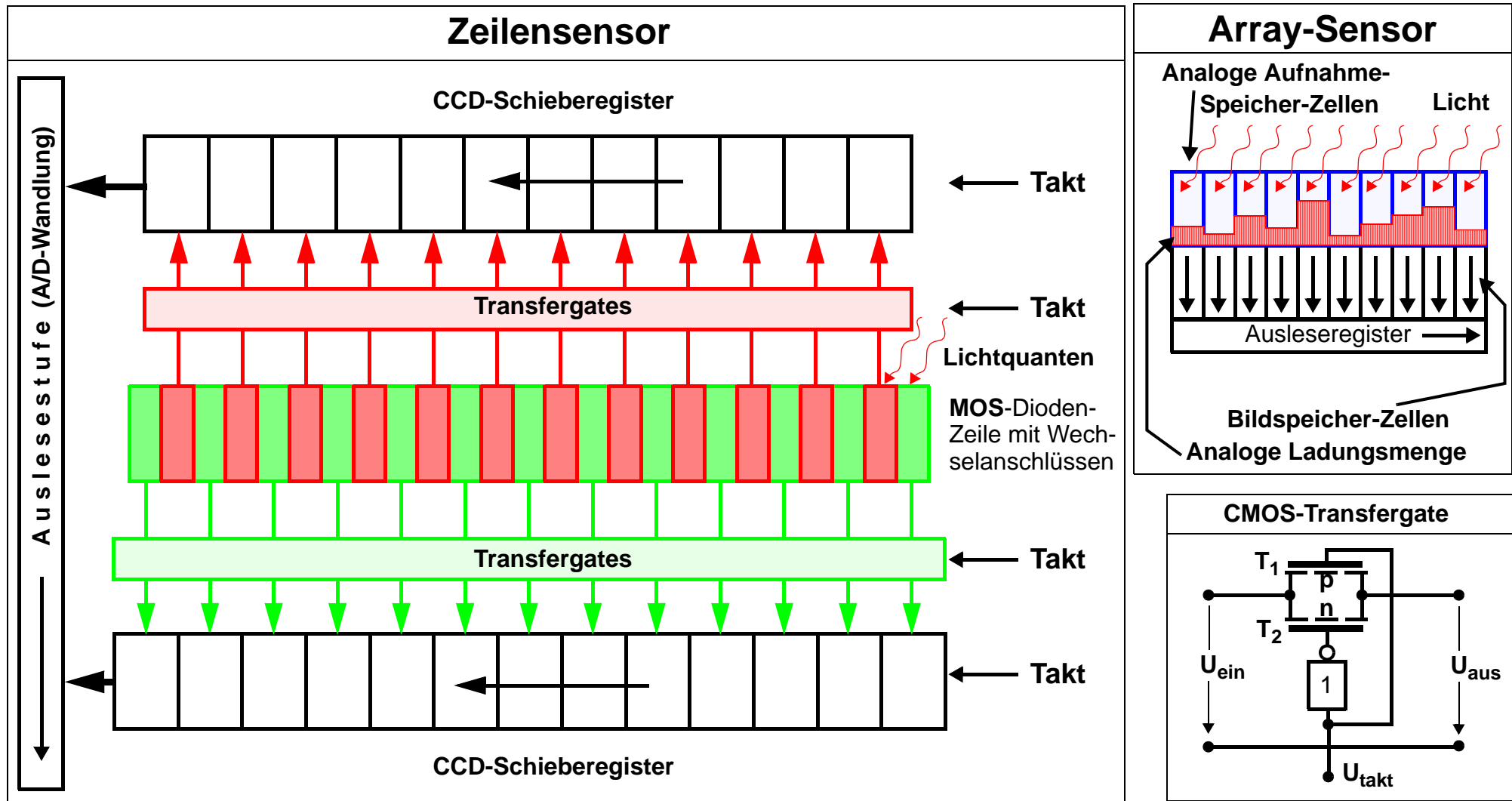
FIFO



LIFO

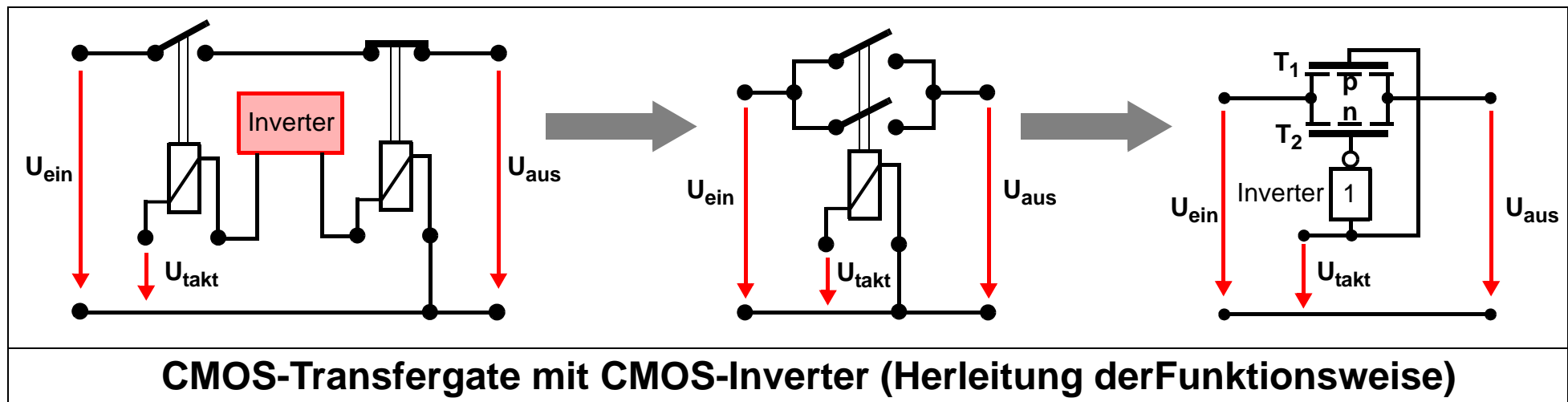


16.1 CCD (Ladungstransfer-Speicher)



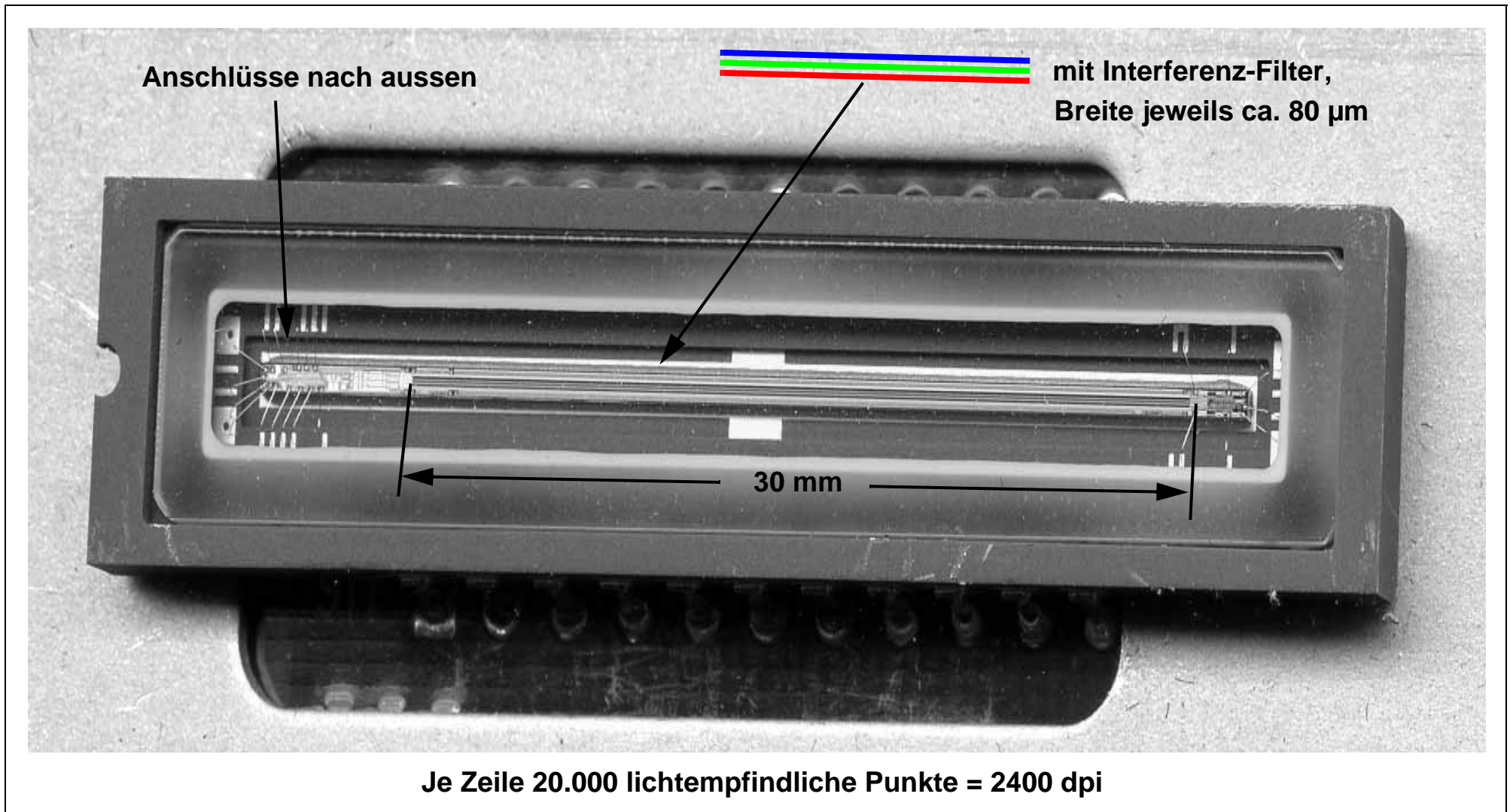
16.1 Legende zum CMOS-Transfergate

Bildspeicher-Zellen: Hier werden MOS-Kondensatoren als analoge Fotosensoren eingesetzt, wobei die gespeicherte Ladungsmenge streng proportional zur Strahlungsintensität ist. Man verschränkt die Sensoren kammartig und liest parallel und taktgesteuert nach zwei Seiten in ein jeweiliges CCD-Schieberegister aus. Die Taktsteuerung öffnet zwischenliegende MOS-Transfergates. In der Auslesestufe werden die seriell ankommenden Analog-Signal in ihr digitales Äquivalent gewandelt und weiter verarbeitet.

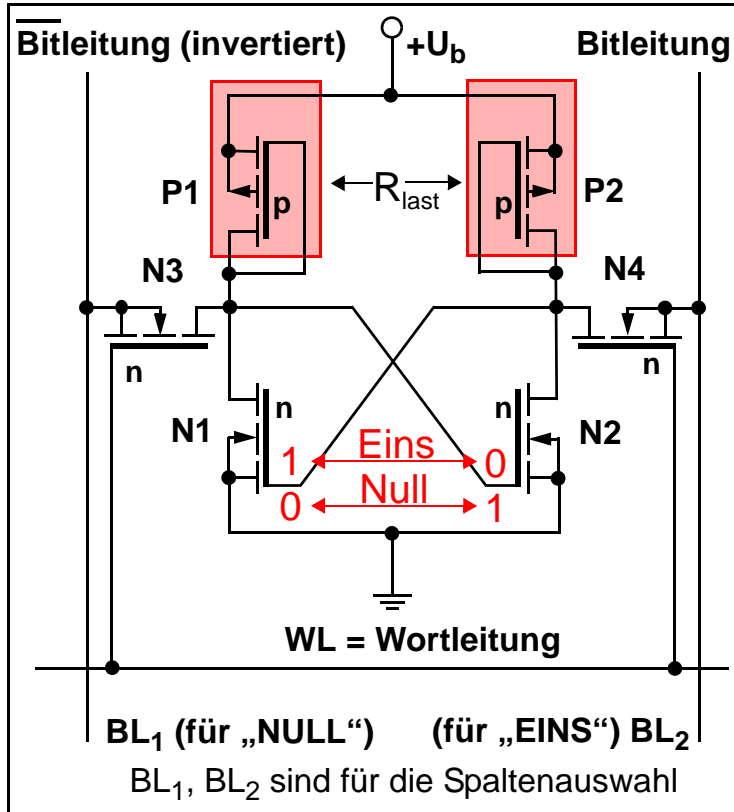


Transfergate: Dieses besteht aus einem parallel-geschalteten n- und p-Kanal MOSFET vom D-Typ (also einem Inverter, selbstsperrender). Wegen des unterschiedlichen Schaltverhaltens wird ein Inverter in die untere Gate-Zuleitung geschaltet, sodass beide MOSFETs im Tranfergate nicht mehr als Wechsel-schalter, sondern als Doppelschalter fungieren.

16.1.1 CCD-Zeilensensor

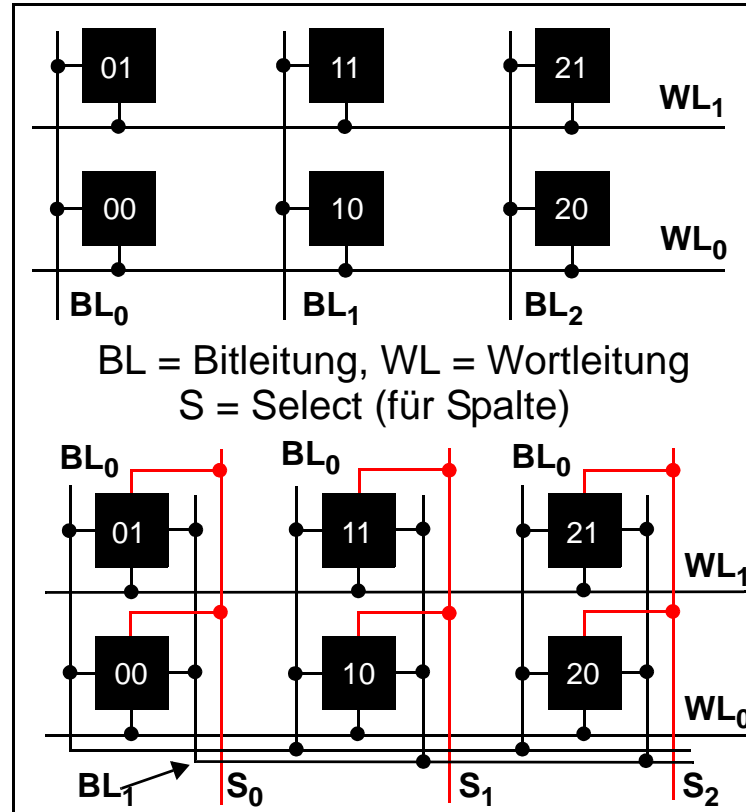


16.2 SRAM und DRAM

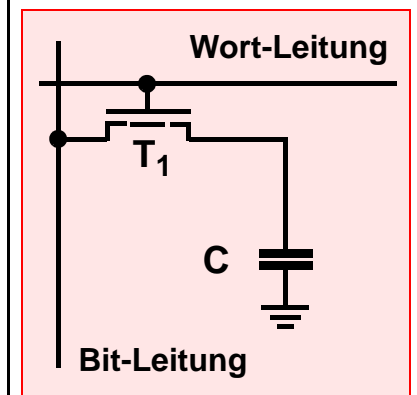


Statische CMOS-Zelle, P1 und P2
(selbstleitend) sind Last-Transistoren.

Grundidee: Flip-Flop als kreuzgeschaltete Inverter



Anschluss als Black Boxes
mit Kreuzschienen-Verteiler



Dynamische
Ein-Transistor
MOS-Zelle

Information wird
im Kondensator
gespeichert

16.2.1 Legende SRAM, DRAM

Schaltverhalten der Sechstransistor-Zelle (Statisches MOS-RAM):

Die oben links gezeigte, statische CMOS-Zelle heisst nach ihrem Einsatz als Speicherzelle **SRAM** (**S**tatic **R**andom **A**ccess **M**emory). Der elektrische Schaltungsaufbau wird als Flip-Flop ausgebildet und besteht je Speicherzelle aus 6 Transistoren mit einer Lesezeit von 7...45 ns.

Schreiben: Wortleitung WL auf Hi, dadurch wird N3 und N4 leitend. BL1 wird auf Lo gelegt, dadurch wird über den leitenden N3 das Gate von N2 auf Lo gezogen, wodurch dieser sperrt. Legt man nun BL2 auf Hi, dann wird über N4 (ist leitend wegen WL = Hi) ein Hi am Gate von N1 erzeugt, dieser leitet die Spannung $+U_B$ über P1 und sich selbst nach Masse ab und verbleibt im Zustand Hi. Wir haben links 1 = Hi und rechts 0 = Lo gespeichert.

Schaltet man bei WL = Hi die Bitleitung BL1 = Hi und BL2 = Lo, so wird die Information umgekehrt eingeschrieben, also N1 = 1 = Lo und N2 = 1 = Hi. Für eine sichere Speicherung im Flip-Flop werden die Bitleitungen zum Schreiben immer gegenseitig invertiert betrieben.

Lesen: Beide Leseleitungen auf Lo, Wortleitung auf Hi, dadurch wird N3 und N4 leitend. War nun z.B. N1 = Lo und N2 = Hi, dann fliesst von der Bitleitung BL2 ein Strom über N4 und N2 nach Masse. (Die Widerstände von N3 und N4 sind wesentlich grösser als die von N1 und N2). Der Abfluss aus der Bitleitung kann als Spannungsabfall über einen zwischen BL1 und BL2 liegenden Lese-Verstärker detektiert werden. Da N1 = Lo, fliesst aus BL1 kein Strom nach Masse unter gleichzeitiger Stabilisierung des Hi-Zustandes von N2, da auch BL1 = Hi.

Der geschilderte Schaltungsaufbau weist den Vorteil auf, dass die Transistoren N1 und N2 als Ladungsspeicher fungieren und die Information „dauerhaft“ halten, solange die Versorgungsspannung anliegt (kein „refreshment“) und bei Auslesen der Information kein Rückschreiben erforderlich ist. Der Nachteil ist allerdings der vierfache Flächenbedarf auf dem Chip. Dieser Speichertyp gehört damit zur Familie der [nichtflüchtigen](#) (engl. nonvolatile) Speicher, dies allerdings [nur, solange die Versorgungsspannung anliegt](#).

Kreuzschienenverteiler: Es gibt zwei Arten von Adress-Ansteuerung, je nach Zahl der Anschlüsse je Zelle. Select dient zur Anwahl der betreffenden Spalte.

Schaltverhalten der Eintransistor-Zelle (Dynamisches MOS-RAM):

Lesen: Selektieren über Bit- und Wort-Leitung = Hi. War die Kapazität C geladen, dann ist die gespeicherte Information = 1, ansonsten = 0. Da der Kondensator beim Lesen entladen wird, muss sofort ein „Refresh“ durchgeführt werden, somit haben wir [zerstörendes Lesen](#) vor uns.

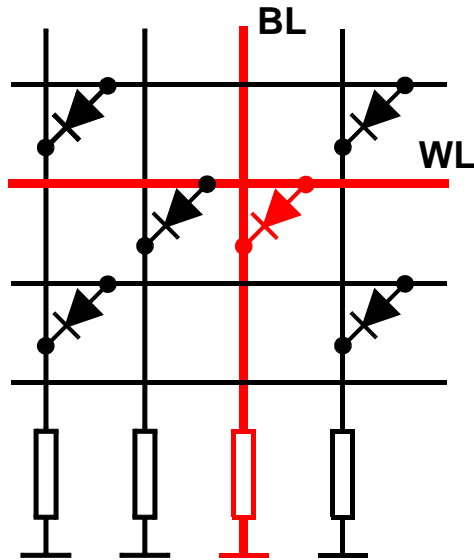
Schreiben: Auch hier wird die betreffende Zelle über die Wortleitung mit Hi angewählt und über die Bitleitung der Kondensator geladen (BL = Hi) oder entladen (BL = Lo).

Echte nichtflüchtige Speicher sind dagegen der Kernspeicher (12.2), das MRAM (12.3) und das FRAM (13.4), die alle drei ohne Versorgungsspannung die eingespeicherte Information über Jahre halten können.

16.3 ROM, PROM, EPROM

EEPROM ist eine Weiterentwicklung des EPROM's

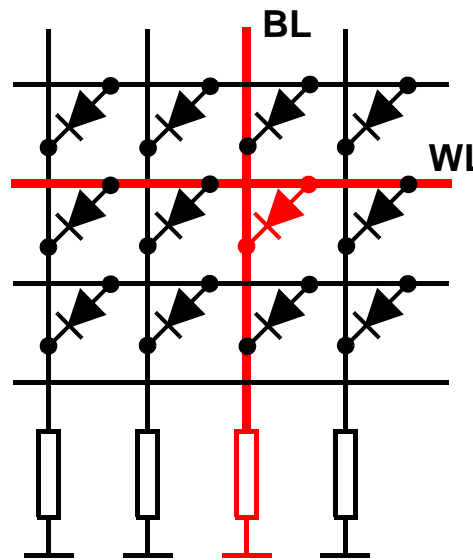
ROM (Festwertspeicher)



„EINS“ = Diode zw. BL und WL

„NULL“ = Nichts zw. BL und WL

PROM (Programmierbar)

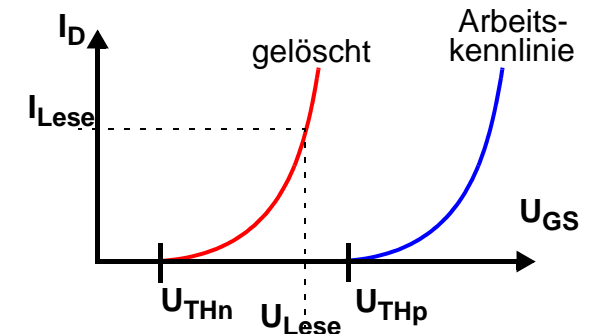
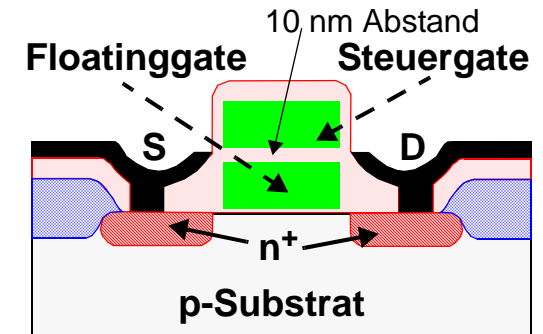


Jeder Kreuzungspunkt zwischen

Bitleitung und Wortleitung hat
eine schmelzbare Verbindung

EPROM = Erasable programmable ROM, entspricht in der Funktion dem PROM

EPROM



MOSFET mit Floatinggate. Schreiben mit $U = 10 \dots 25 \text{ V}$, dadurch tunneln Elektronen zum Floatinggate und werden dort festgehalten (mehrere Jahre). Löschen und Neuprogrammieren mit UV (Fenster auf) mit $\text{ca. } 10 \text{ mW/cm}^2$

16.4 Josephson-Zelle

Bisher gab es nur einen (1983) abgebrochenen LTS-Prototyp (**L**ow **T**emperature **S**uperconductor) der IBM in Rüschlikon

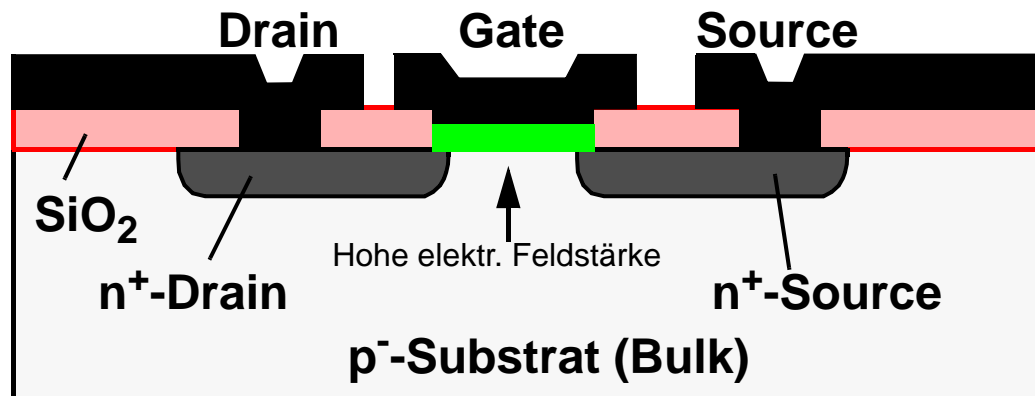
- Zykluszeit: 1 nsec mit Josephson-Kontakten
- 4096-Bit-Chip mit 20.000 Josephson-Kontakten auf $6 \times 6 \text{ mm}^2$. Problem war, dass die Dicke der Isolationsschicht (Tunnelschicht für Elektronen) **genauer als eine Atomlage** hätte gefertigt werden müssen!
- Energiedissipation im „Rechnertopf“ = Kryostat lag bei 4 Watt
- Energieverbrauch zur Kühlung auf 4 Grad Kelvin: 16 KWatt
- Projektaufwand: Jährlich 20 Mio Dollar, 100 Wissenschaftler (nicht die schlechtesten)

Die gemachten Erfahrungen haben zur Entwicklung (nicht Erfindung oder Entdeckung) der HTS (**H**igh **T**emperature **S**uperconductor) geführt.

- Zwei ehemalige Projektmitglieder haben den Nobelpreis für neuartige HTS erhalten

16.4 FRAM (Ferroelektrisches RAM)

FRAM mit Ferroelektrikum



$\text{Pb}(\text{ZrTi})\text{O}_3$

BaTiO_3

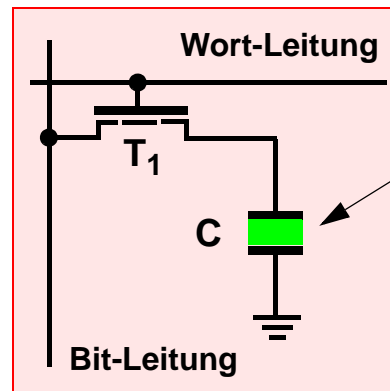
Ferroelektrikum mit hohem $\epsilon_r = 10^3$ - 10^4

Lesevorgang zerstört Information, Zurückschreiben,

ähnelt eher dem Kernspeicher

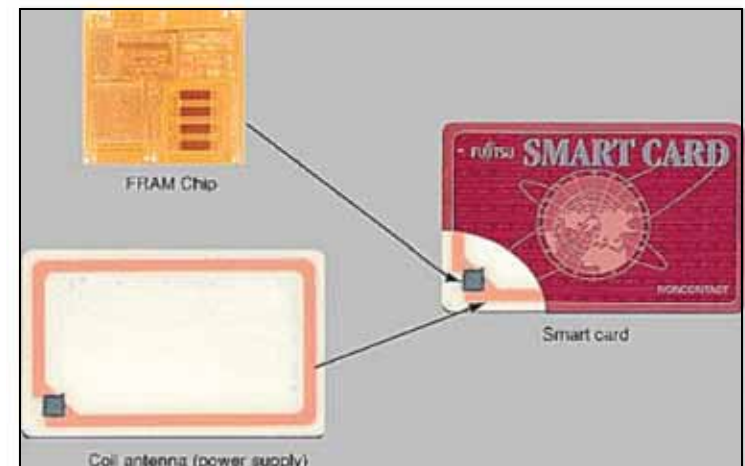
Wenn keine Abfrage, dann nonvolatile bis zu 10 Jahre

Dynamische
Ein-Transistor
FRAM-Zelle



Gespeicherte
Ladungsmenge Q
ist 10^4 -fach gegen
Silizium als Dielek-
trikum angestiegen

Eines der Einsatzgebiete



16.6 CAM (Content Adressable Memory)

Assoziativ-Speicher, anders organisiert, aber von der Sache her auch nur ein SRAM oder DRAM.

Allerdings ist die Suche streng parallel.

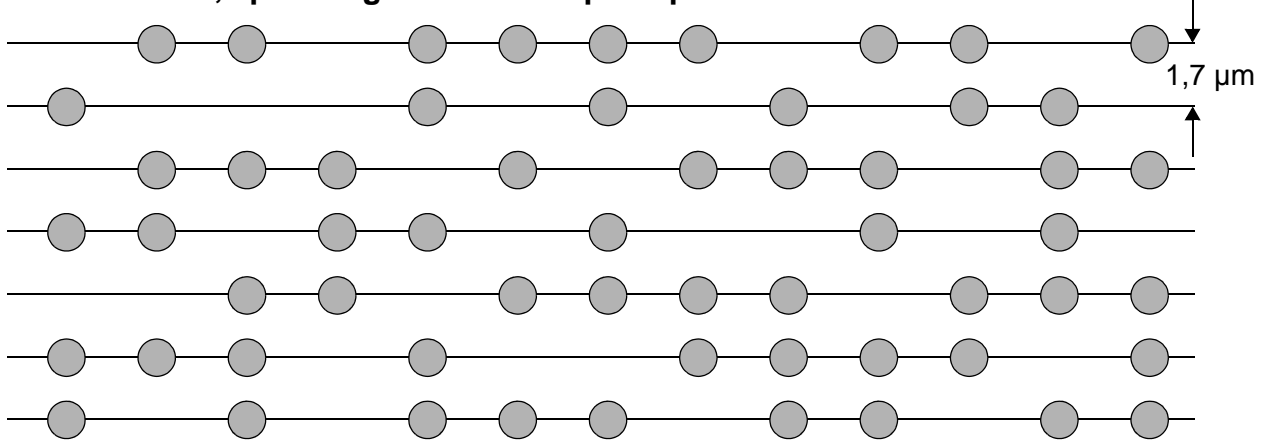
Es gibt nicht nur digitale Assoziativ-Speicher, sondern auch analoge (vergl. CCD). Diese werden in neuronalen Netzen eingesetzt und sind dann offensichtlich wesentlich leistungsfähiger als ihr digitales Pendant.

17. Optische Informations-Speicherung

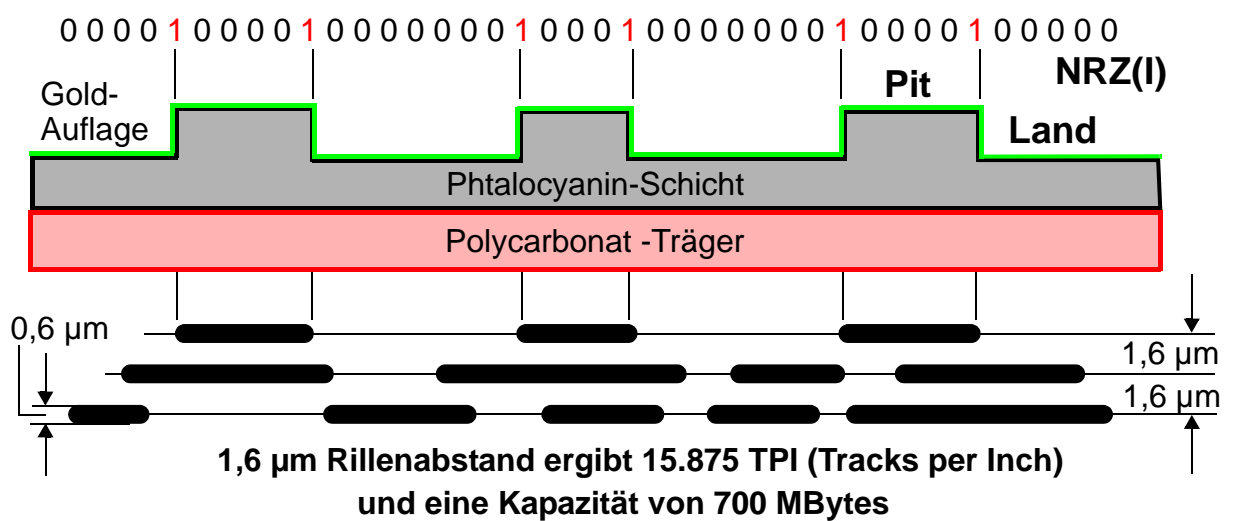
Meistens sind hier Laser beteiligt
dann auch Verstärker
und etwas Optik

17.1 CD-ROM

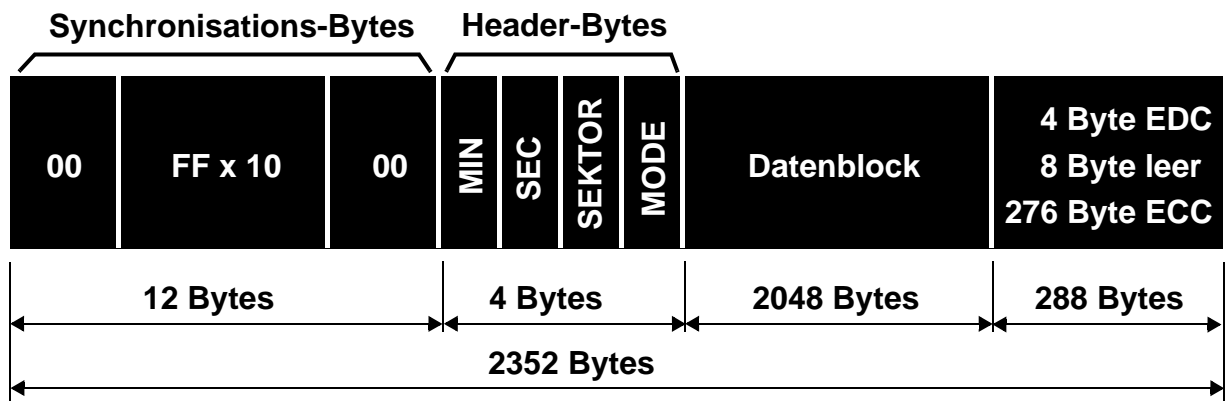
Oberfläche einer CD-ROM mit Löchern, Spurabstand etwa $1,7 \mu\text{m}$, Lochdurchmesser ca. $0,9 \mu\text{m}$. Es gibt nur eine Spiralspur von aussen nach innen.



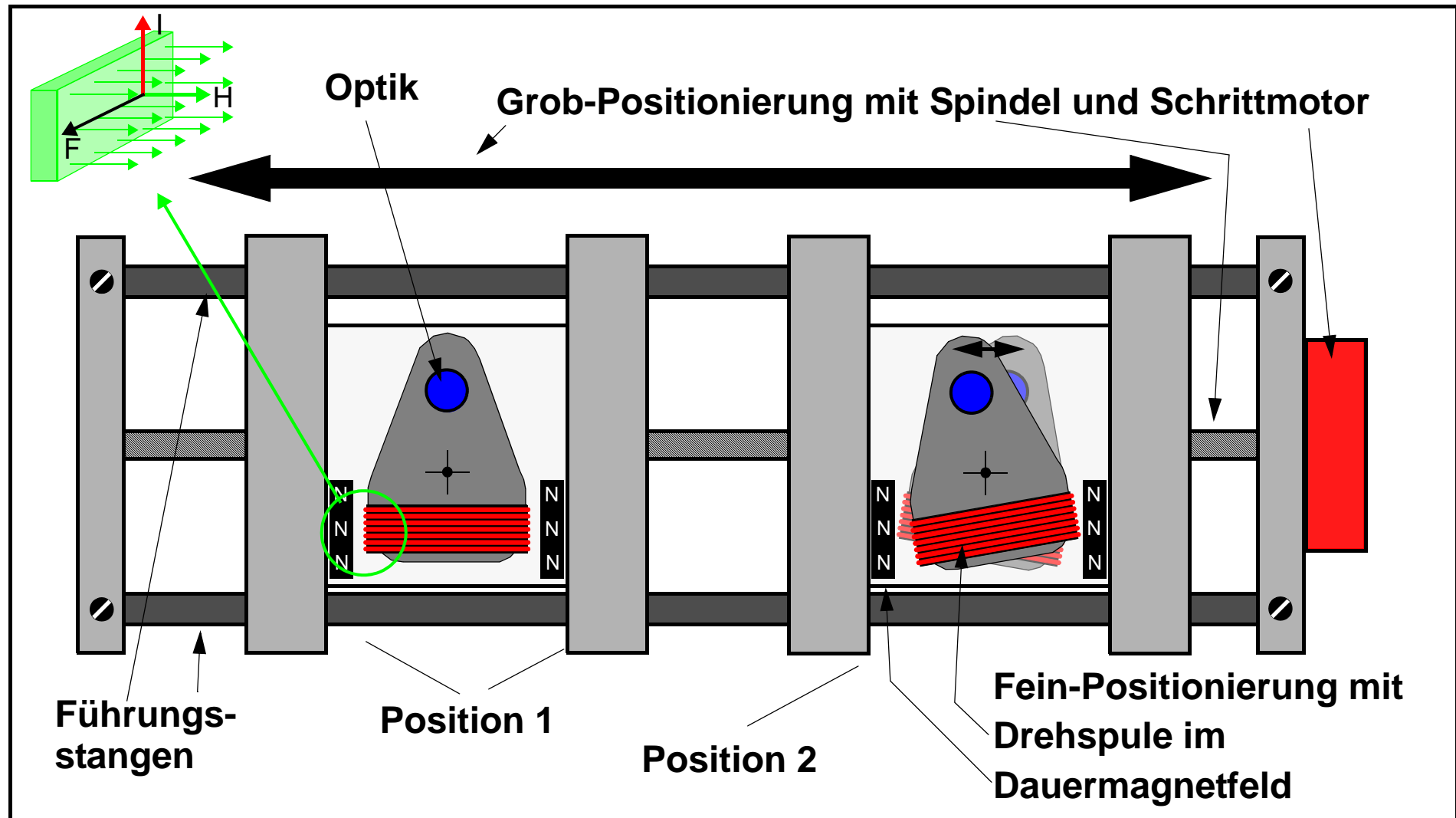
CD-ROM mit Pits und Lands, Sprung jeweils eine „1“



Sektor-Informationen für ein CD-ROM (Mode 1)



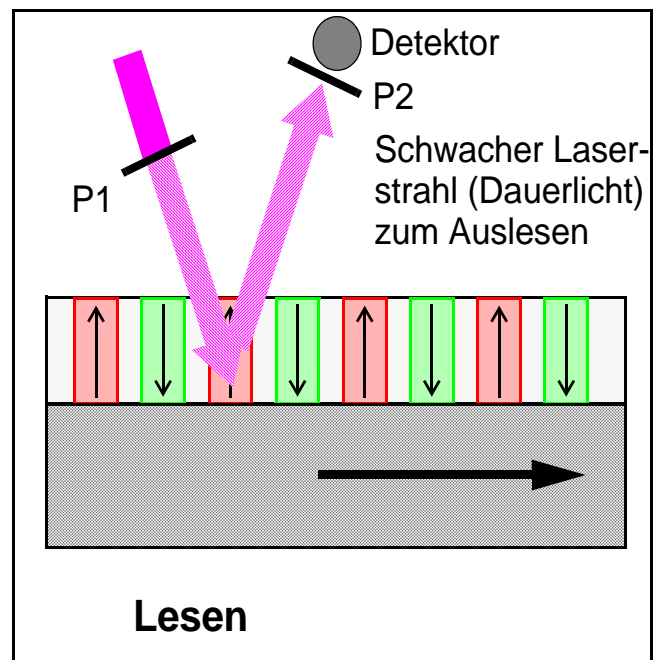
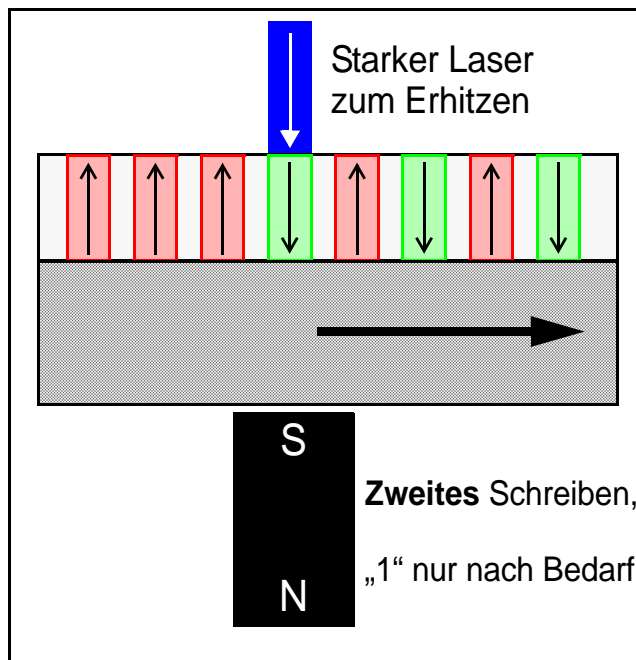
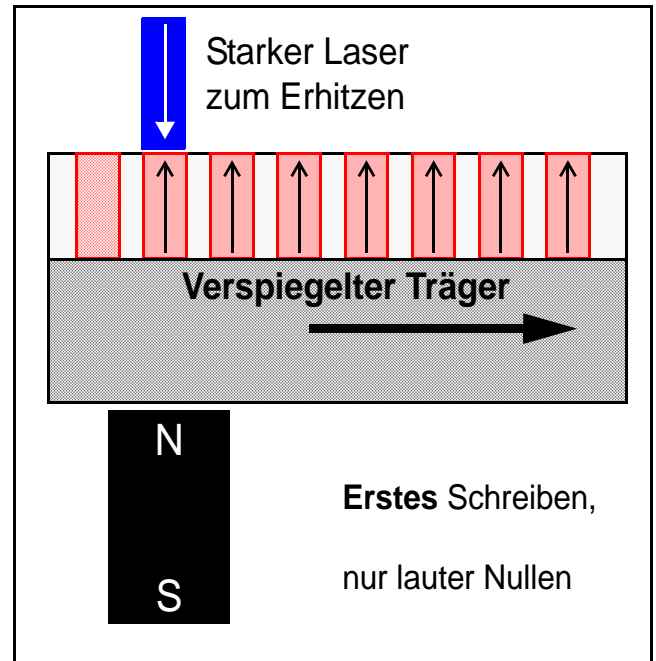
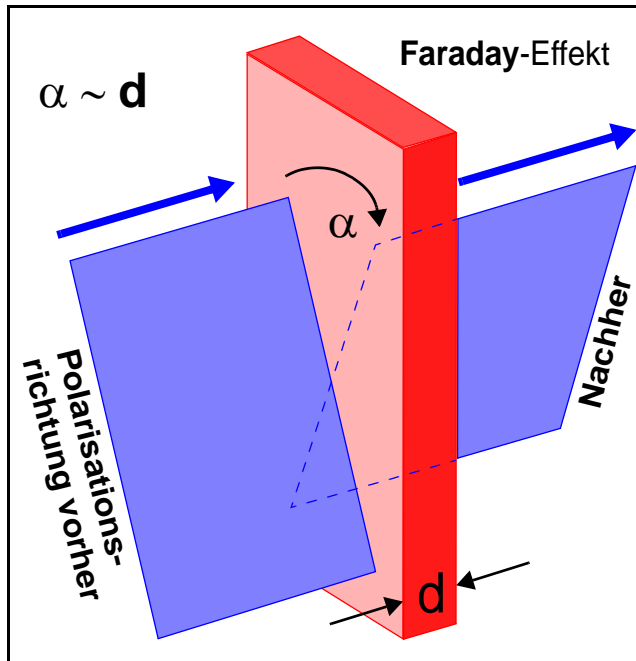
17.1.1 Grob- und Feinjustierung der Optik



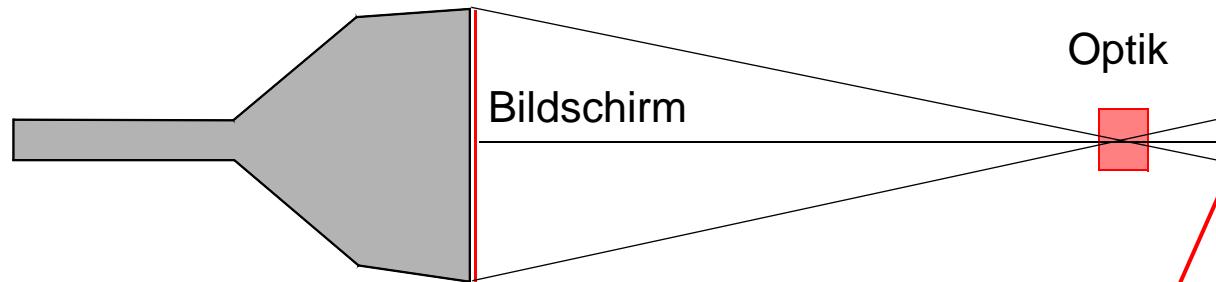
17.2 Magneto-Optik

Kerr-Effekt: Drehung an der Oberfläche

Faraday-Effekt: Drehung im Volumen

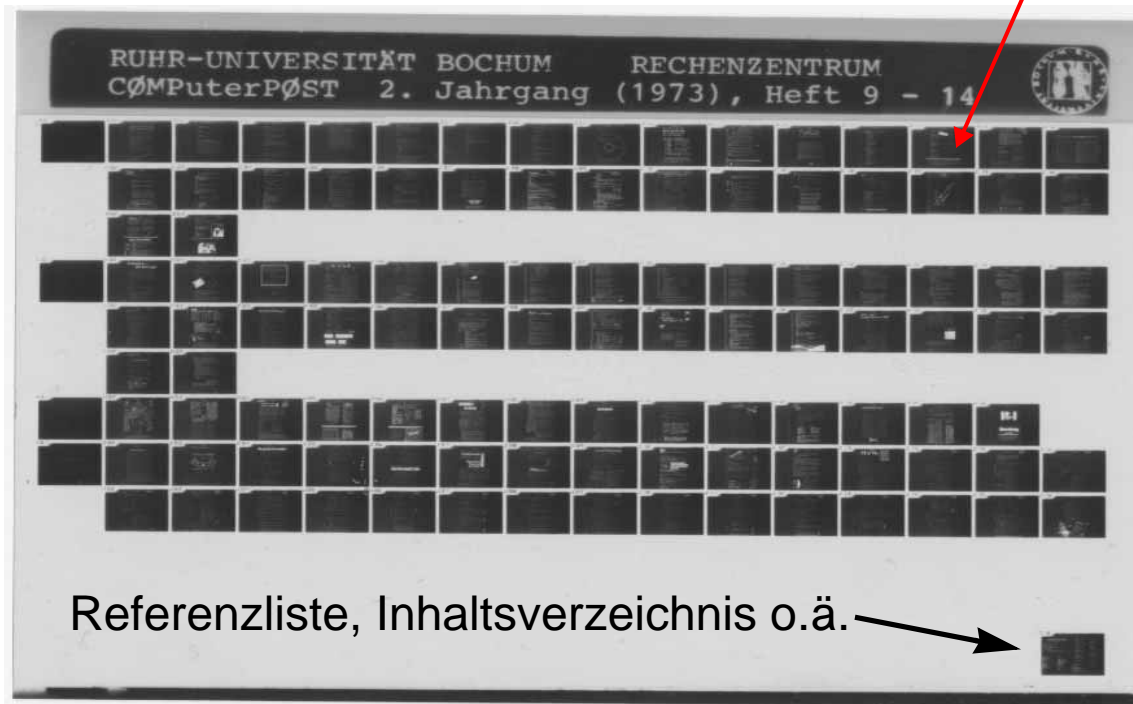


17.3 Analog-Film, Microfiche



Schirmbild wird stark verkleinert

600 Linienpaare / mm



COM (Computer Output on **Microfilm**)

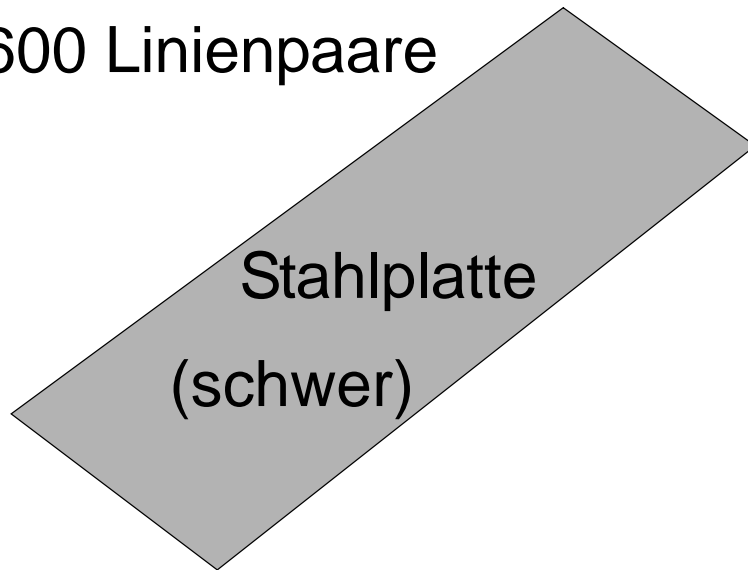
Aufbau eines MicroFiches:

Etwa 130 Seiten zu je

132 * 60 Zeichen

17.4 Holographische Speicher

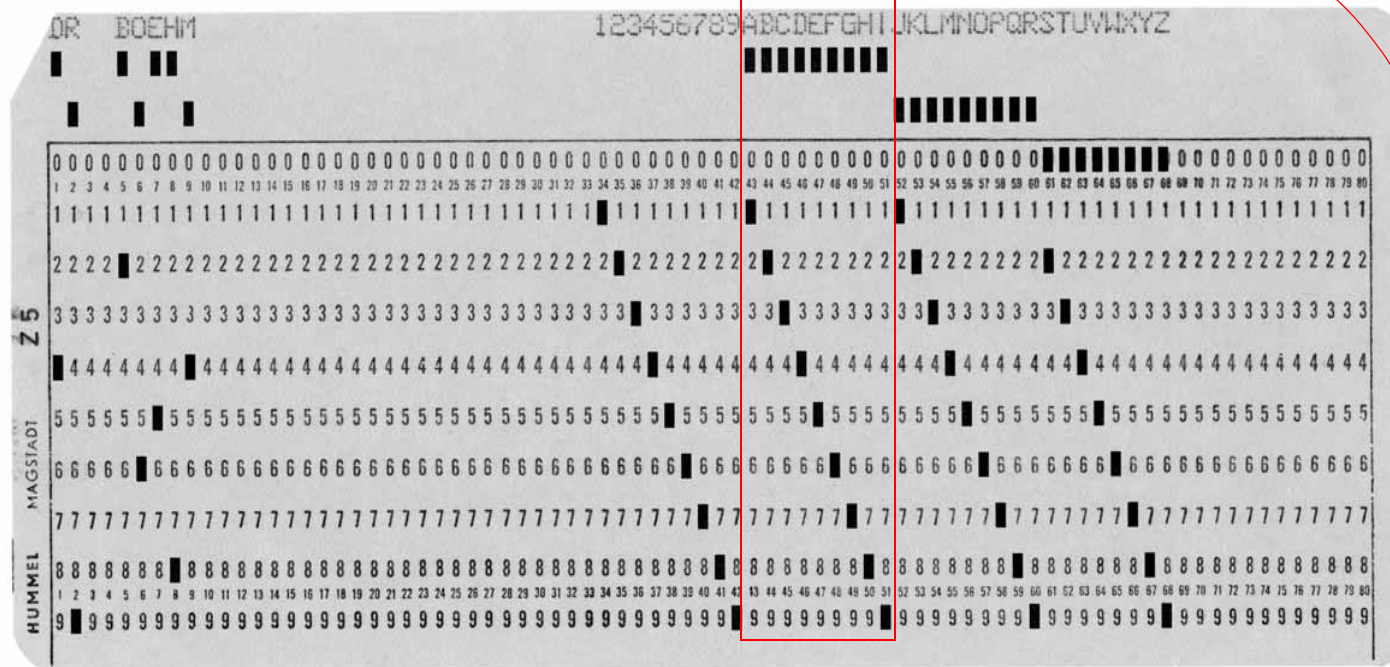
Hier sind es mehr als
600 Linienpaare



Denisjuk-Hologramme
Transmissions-Hologramme
Regenbogen-Hologramme
Bildebenen-Hologramme
Multiplex-Hologramme
Präge-Hologramme
Computergenerierte Hologramme
Mater-Hologramme

alle Hologramme basieren auf Interferenz (hoch-
parallele optische Speicherung)

17.5 Mechanische Informations-Speicherung



Lochkarten-Code:

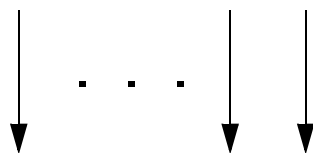
0 ... 9: 1 aus 10, 0 = 0 in
Reihe mit den Nullen,
5 = 5 in der 5'er Reihe

A ... I: erste Reihe oben
und 1 aus 9

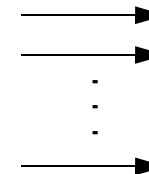
J... R: zweite Reihe oben
und 1 aus 9

S ... Z: dritte Reihe oben (0)
und 1 aus 9

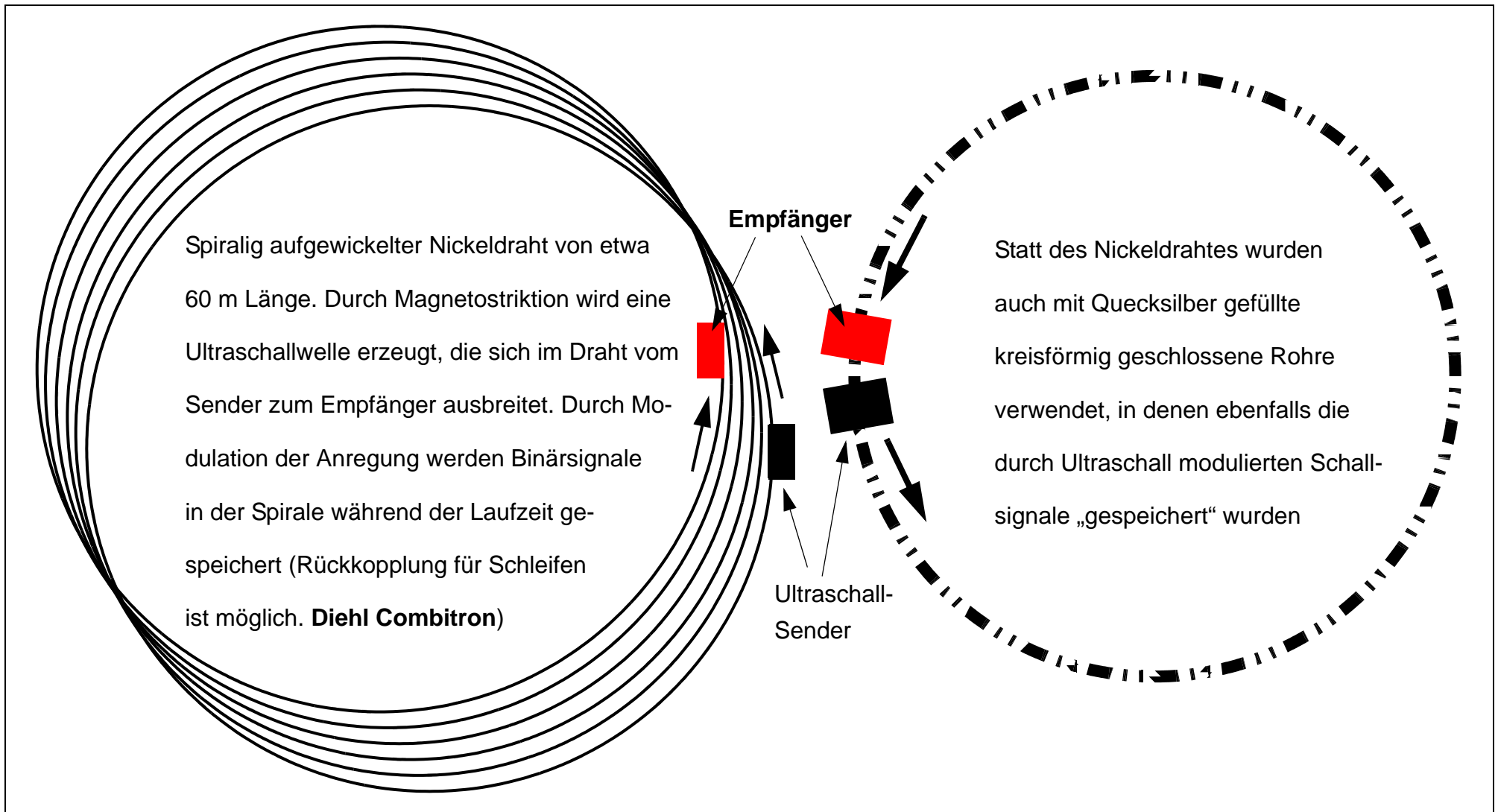
Sonderzeichen: 2 oder 3
aus 12



Maschinell Lesen / Manuell stanzen



17.6 Akustische Informations-Speicherung



18. Anzeigen

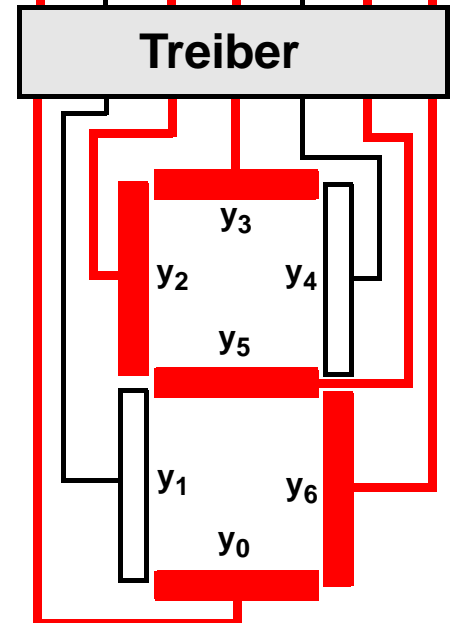
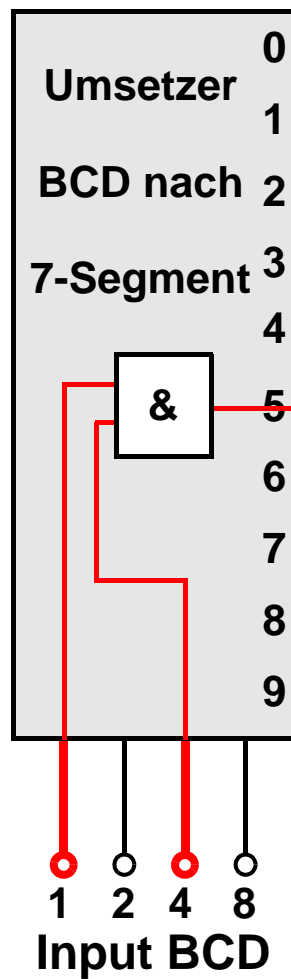
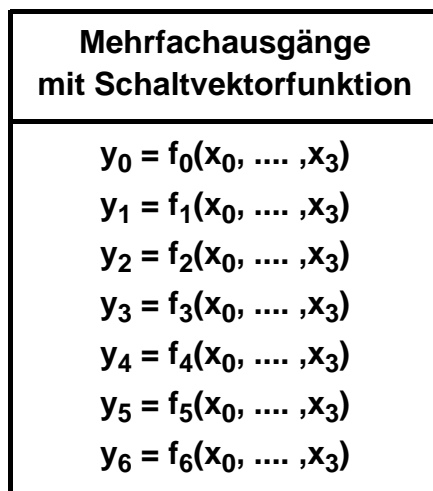
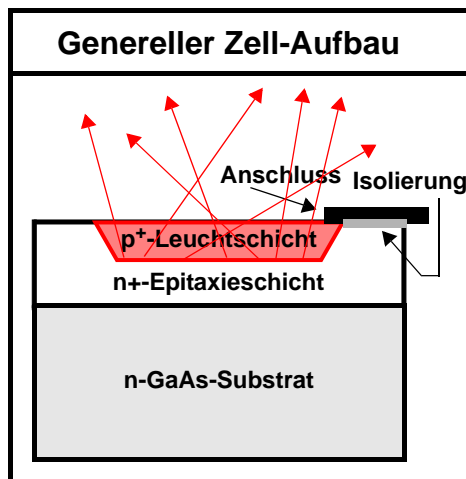
Was gibt es alles:

Uhren, Computer, Auto

Siebensegment (Dauerbetrieb)

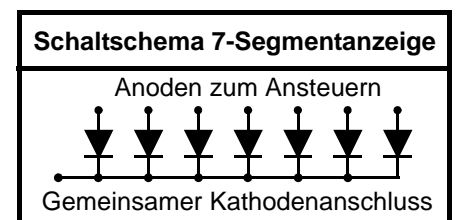
5x7 Punktanzeige (zeilenweise, Energie!!)

18.1 Sieben-Segment-Anzeige

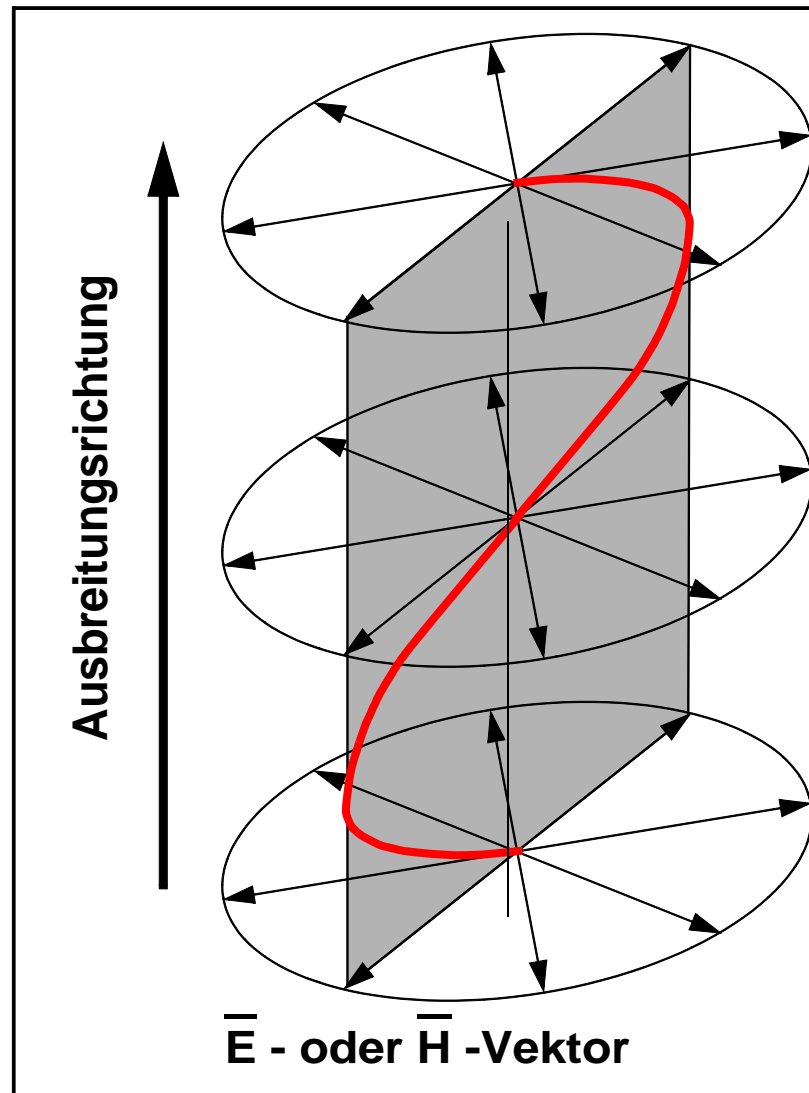


x	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	y ₀	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0
3	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
7	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1

Wertetabelle für 4 Eingangs- und 7 Ausgangsvariablen



18.2 Flüssig-Kristalle: Polarisiertes Licht

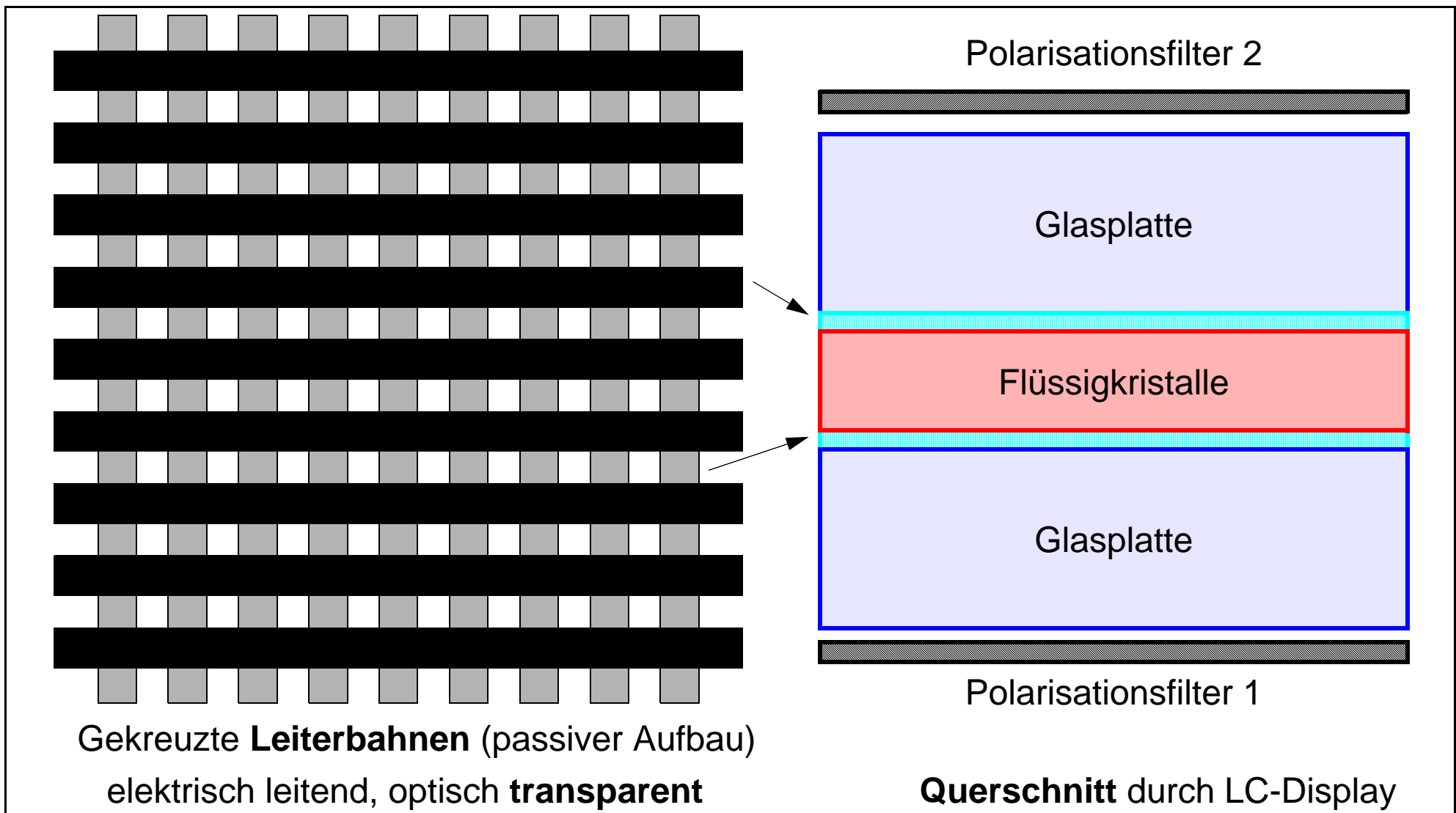


Aus allen möglichen Richtungen wurde eine Ebene der elektromagnetischen Schwingung jeweils am Schwingungsknoten herausgegriffen (\vec{E} - oder \vec{H} -Vektor).

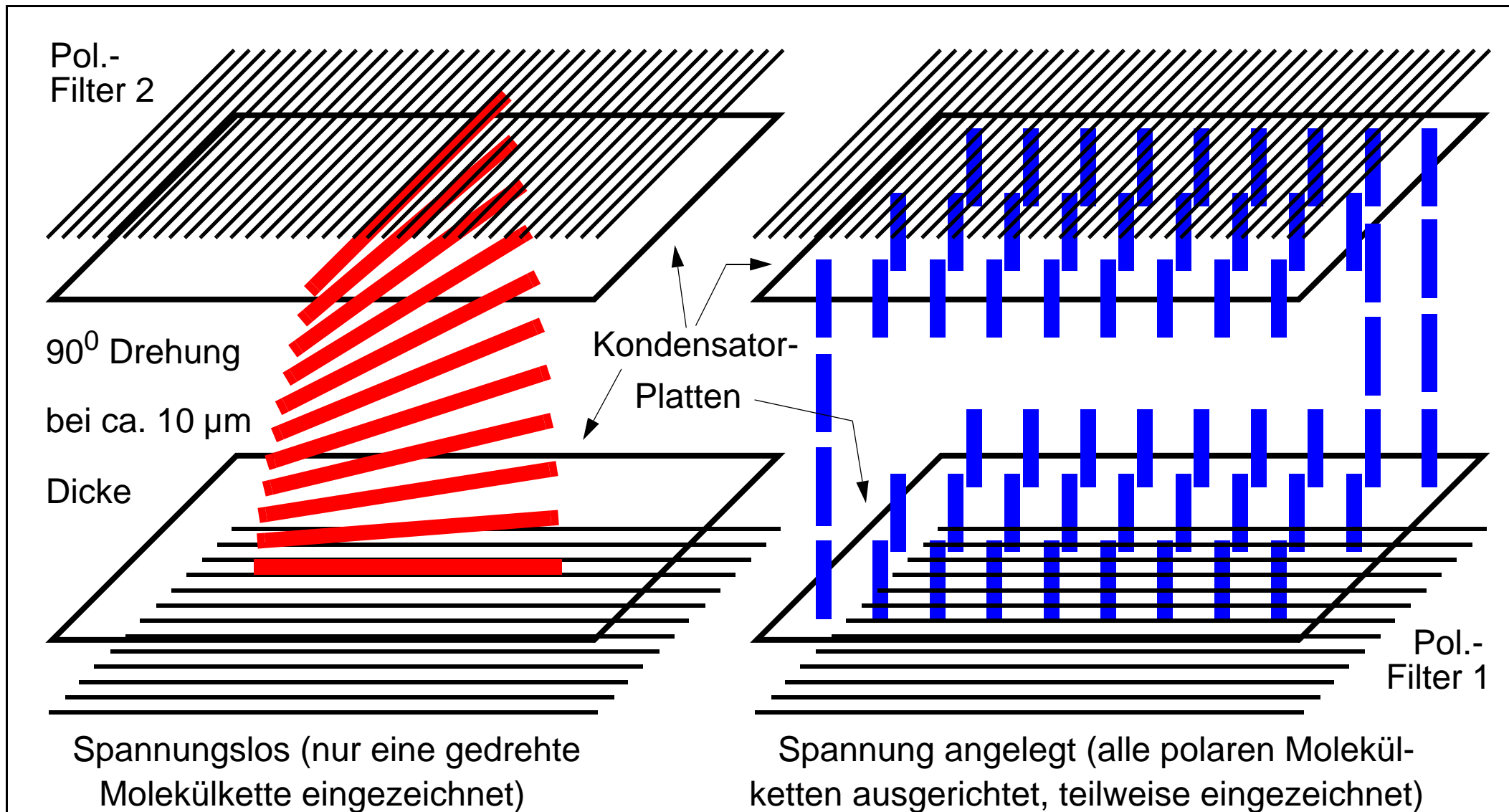
Linear polarisiertes Licht dreht seine Schwingungs-Ebene nicht.

Gegensatz: Zirkulare Polarisation, hier verwindet sich die Schwingungsebene um einen bestimmten Winkel in Richtung der Ausbreitungsrichtung

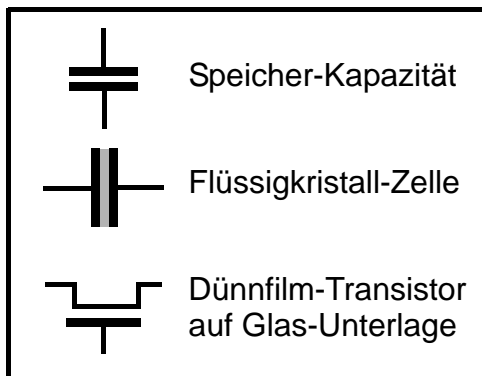
18.2.1 Schematischer Aufbau LCD



18.2.2 LCD: Querschnitt Kondensator-Zelle (1 Pixel)



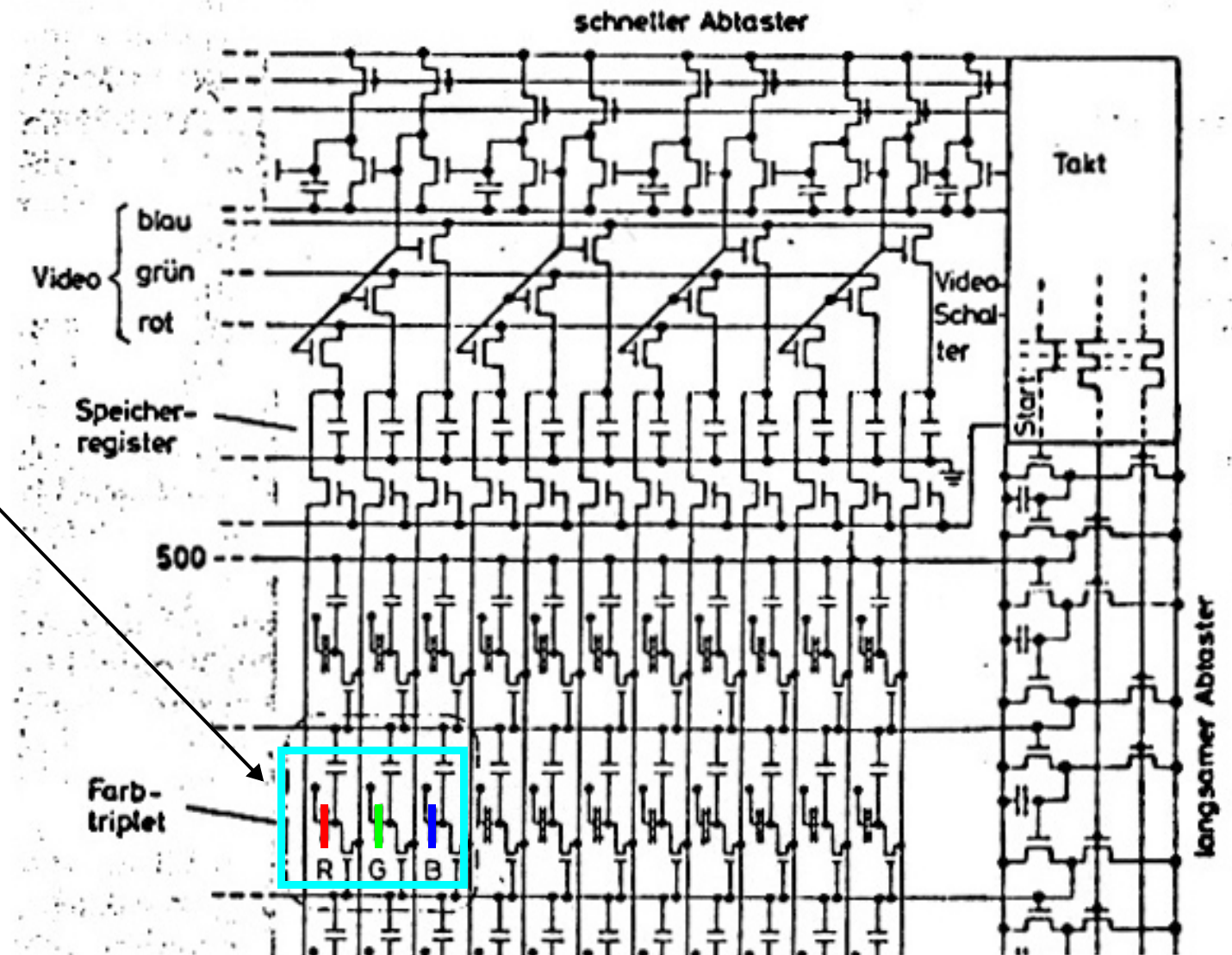
18.2.3 TFT-Bildschirm mit Farbe



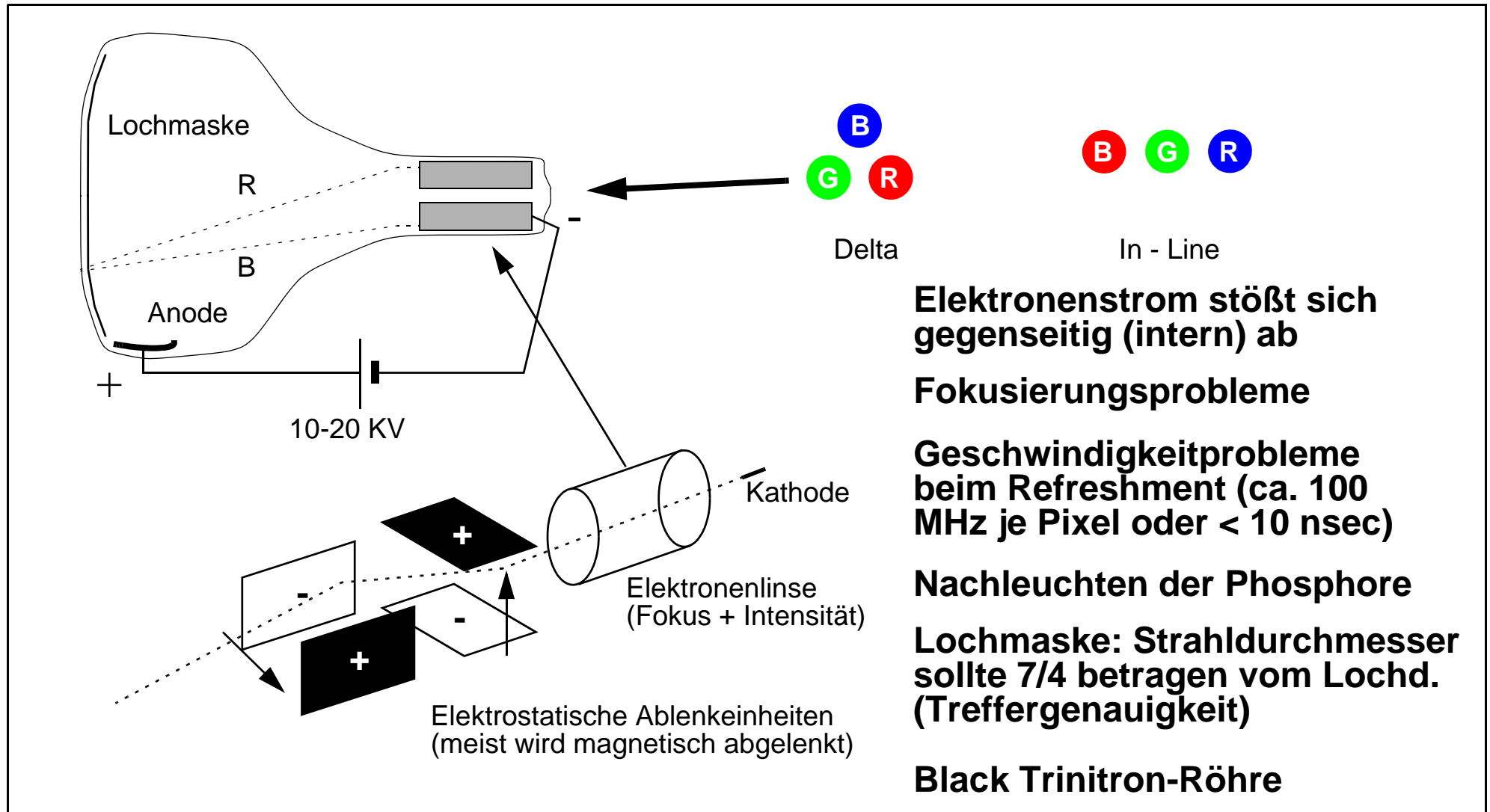
Farbtriplett entspricht je einem Bildpunkt (Erzeugung der Farbe mit einem additiven Farbmodell)

Einschreiben erfolgt Zeile für Zeile (alle Zeilenpixel parallel)

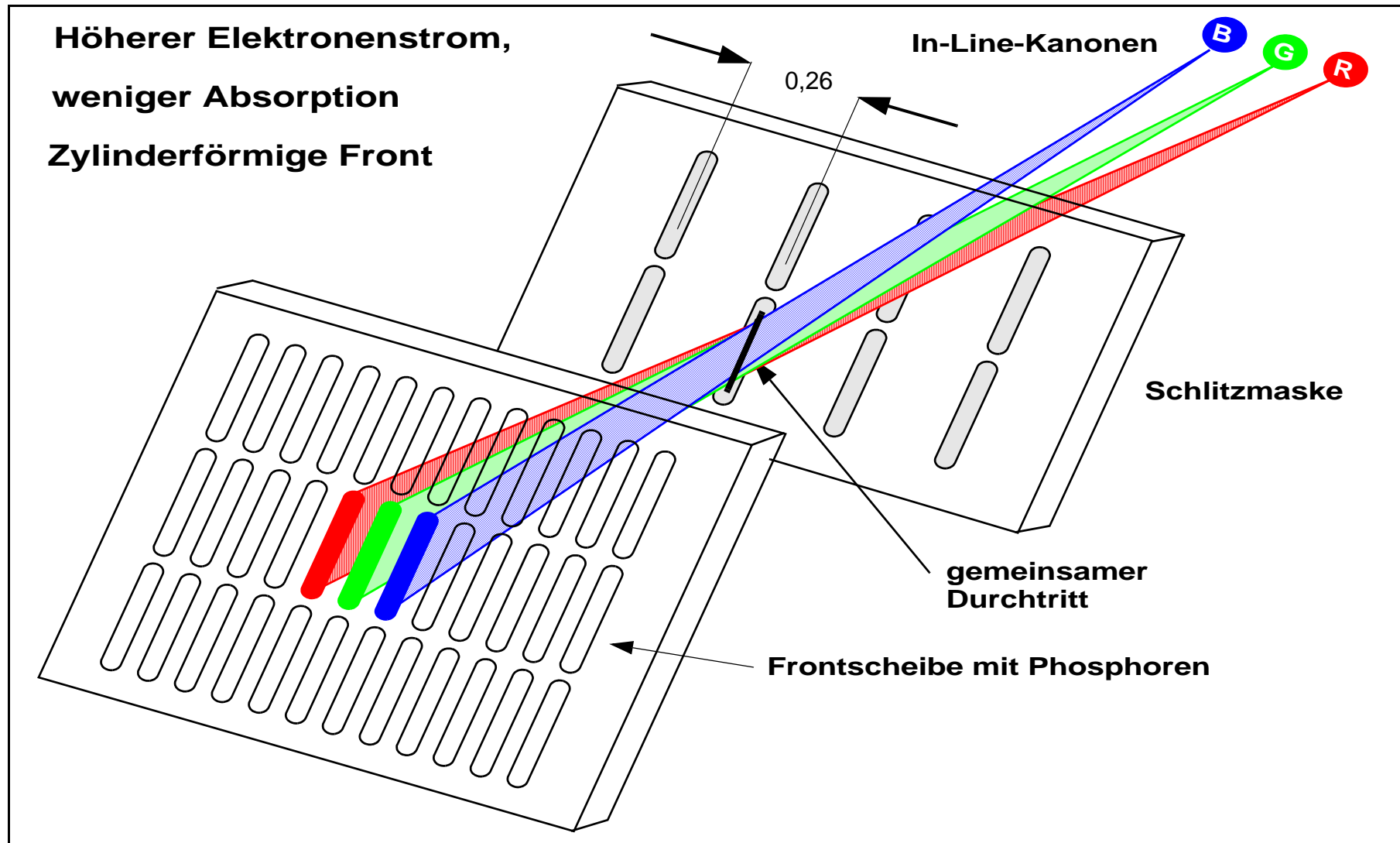
Leiterbahnen und **TFT** (Thinfilm Transistor) sind transparent



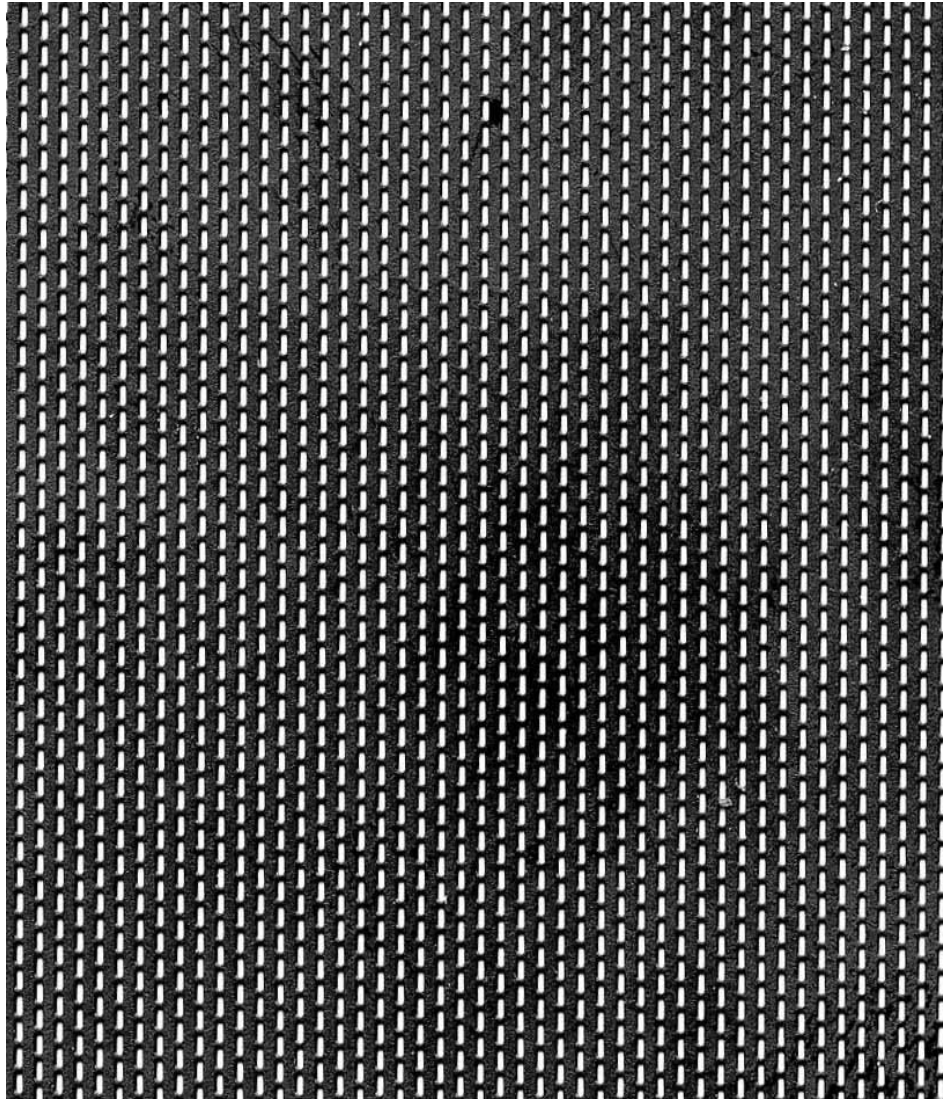
18.3 Elektronenstrahl-Bildschirm



18.3.1 Strahlengang mit Lochmaske



18.3.2 Schlitzmaske



Abstand der Schlitzreihen

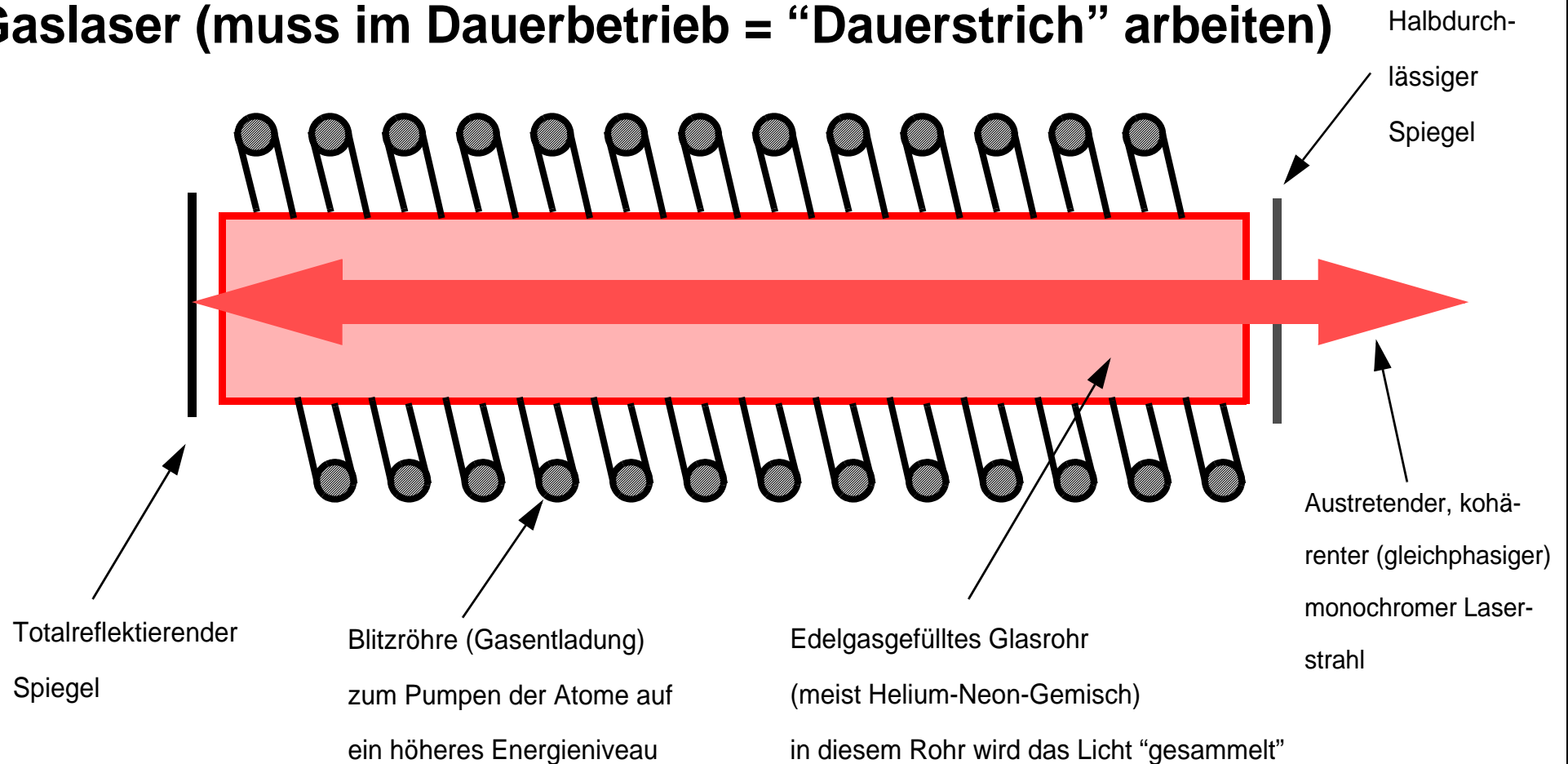
ca. 0,26 mm (breiter Steg).

Diese werden mit

dem Laser geschnitten

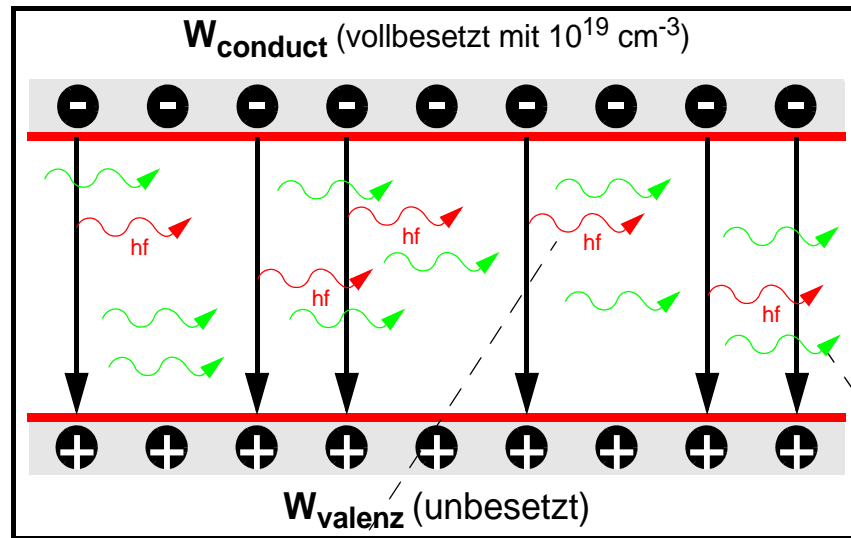
19. Sender: Gas-Laser: Physikalischer Aufbau

Gaslaser (muss im Dauerbetrieb = “Dauerstrich” arbeiten)



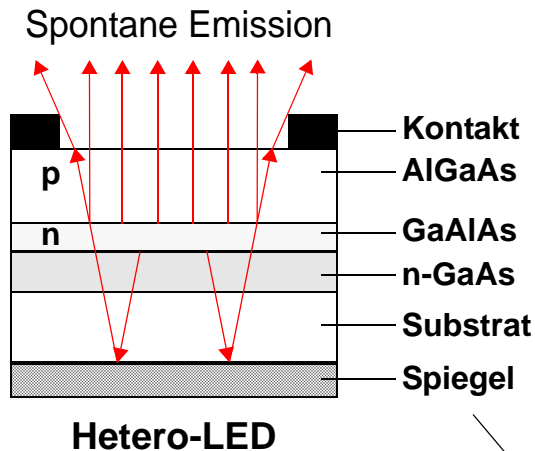
Pumpen siehe 21.15 Erbium-dotierte-Faser (EDFA)

19.1 Laserdioden, LED: Atomares

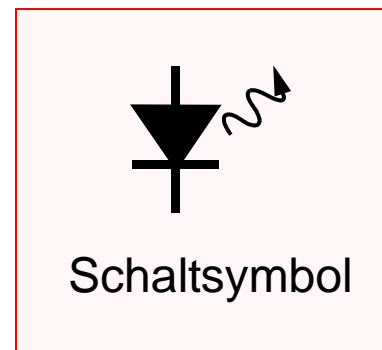


Stimulierte Emission durch
Rekombination (+ -) aus dem
Leitungsband ins Valenzband
(nur in der Sperrschicht)

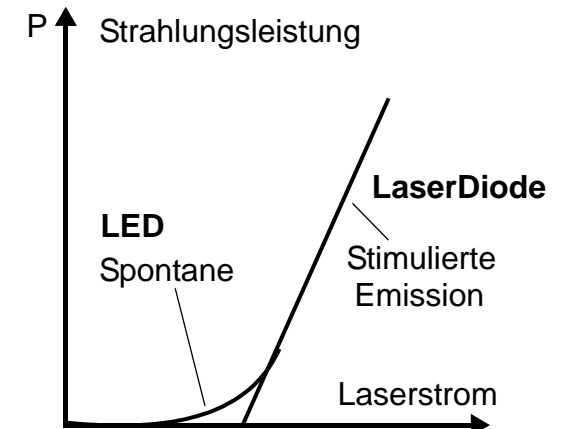
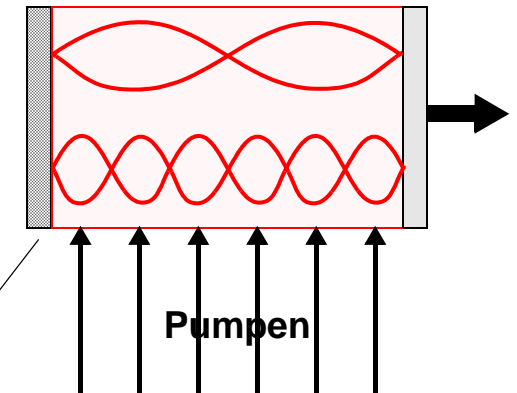
Siehe auch 21.13 Basis-Charakteristika



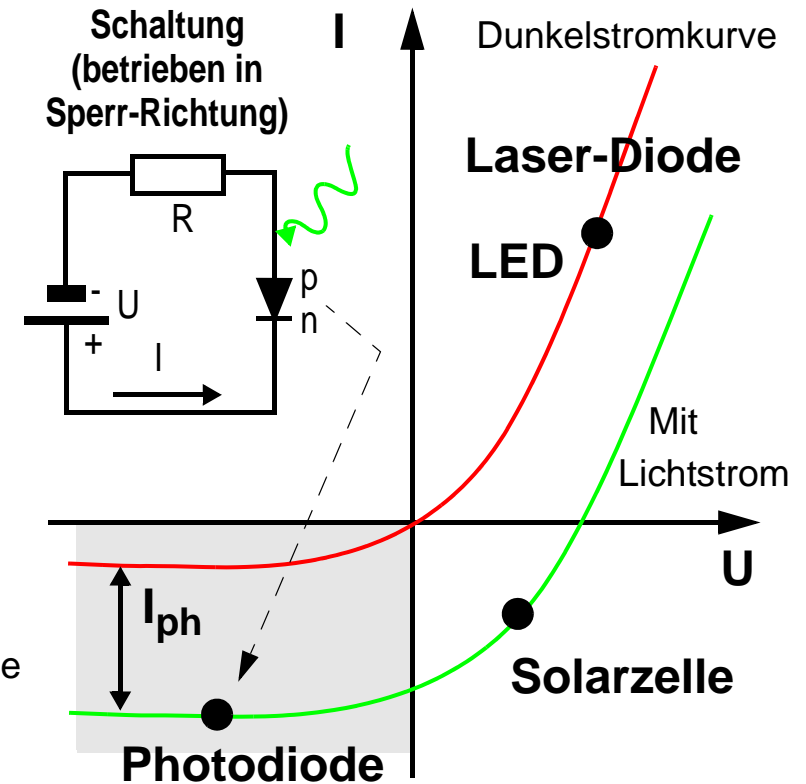
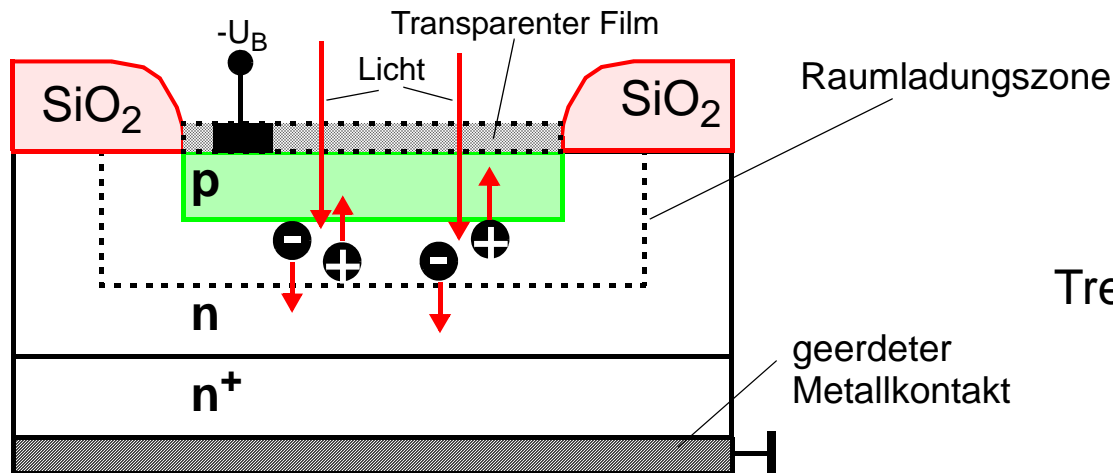
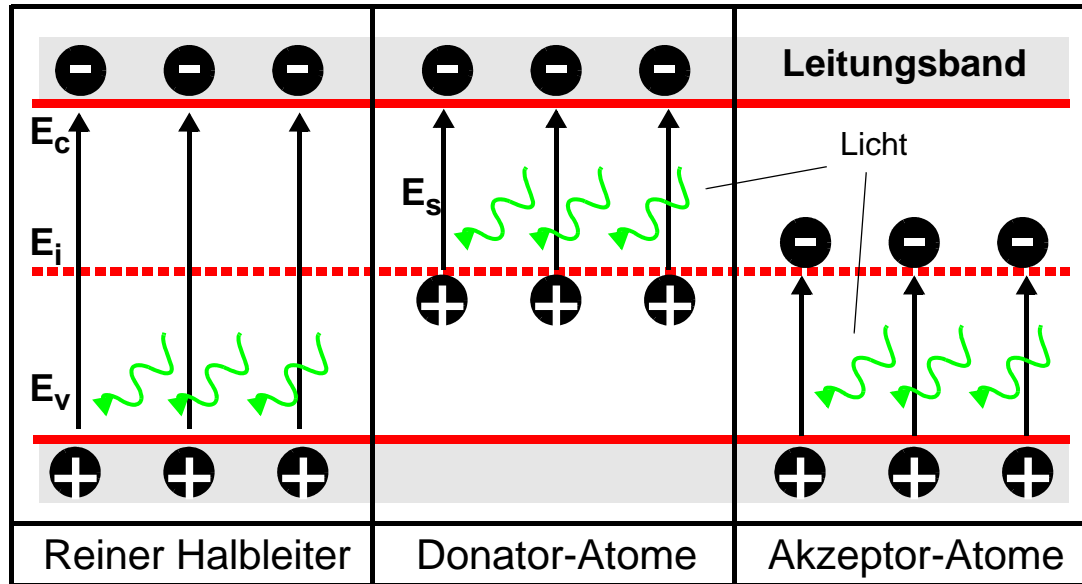
Anregende
Photonen



**Optischer Resonator
mit Moden (LaserDiode)**

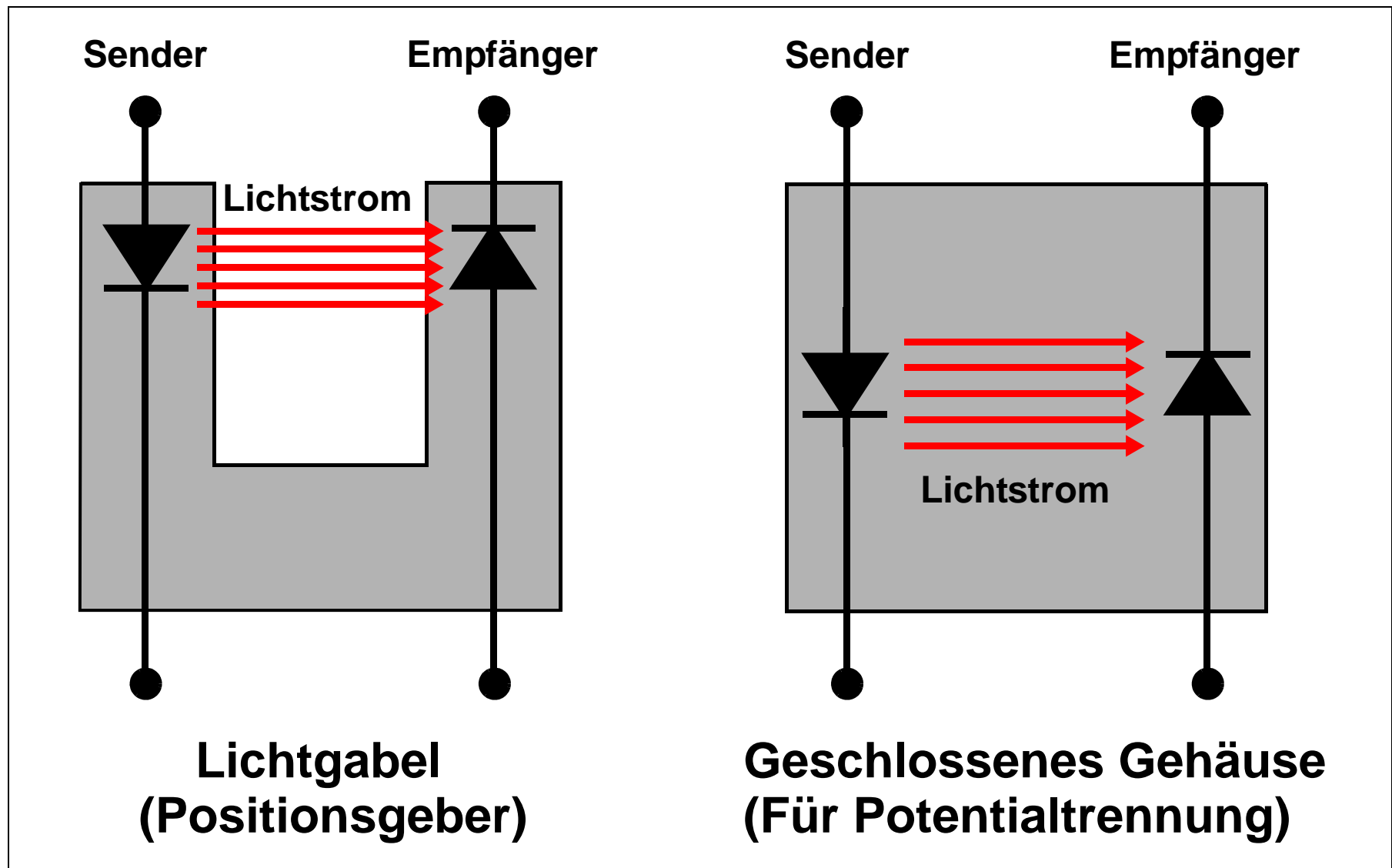


19.2 Empfänger: Photodiode, Solarzelle

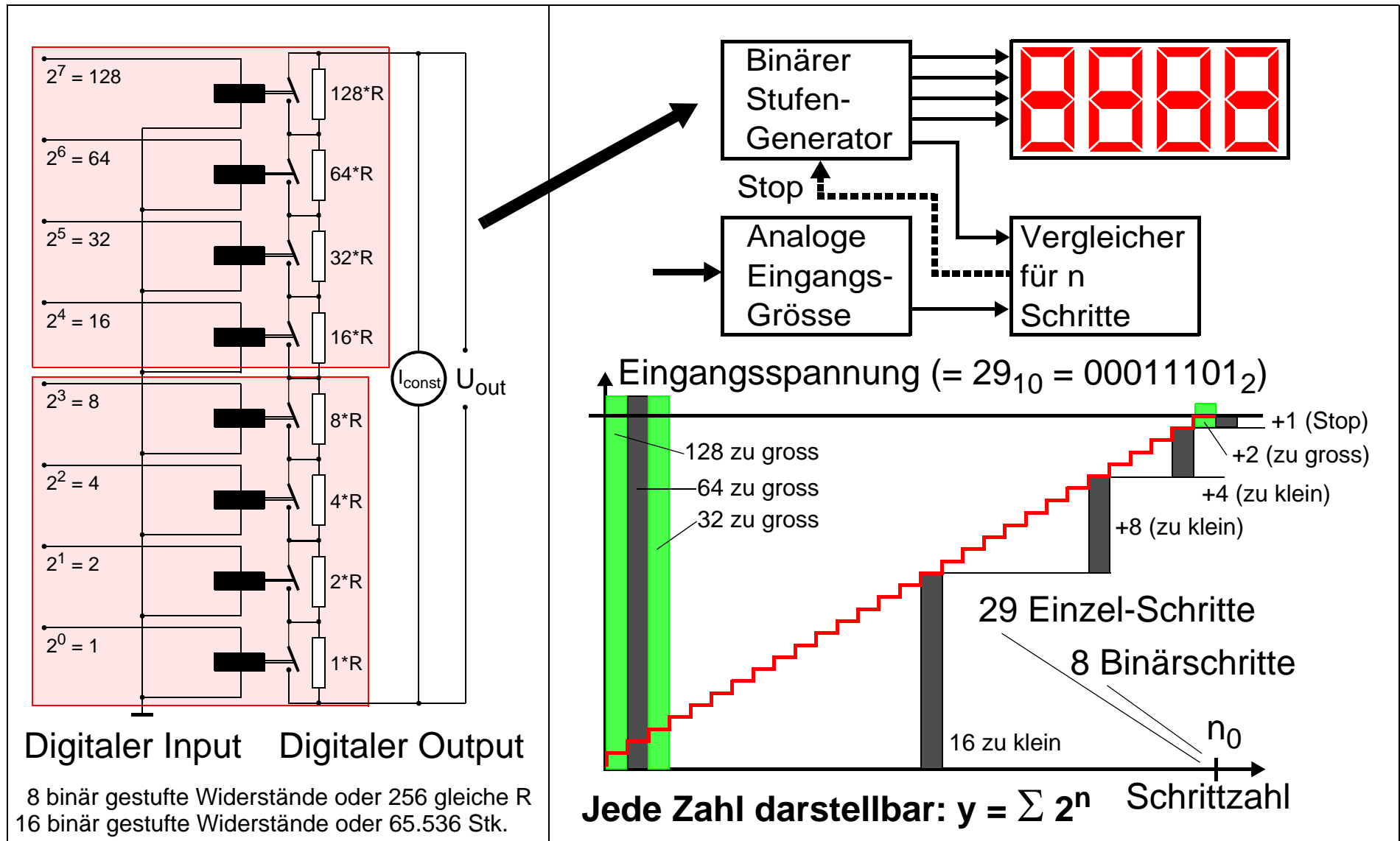


Trennung der Loch-Elektronenpaare
durch Licht ($h \cdot f$), daraus wird
der Photostrom I_{ph}

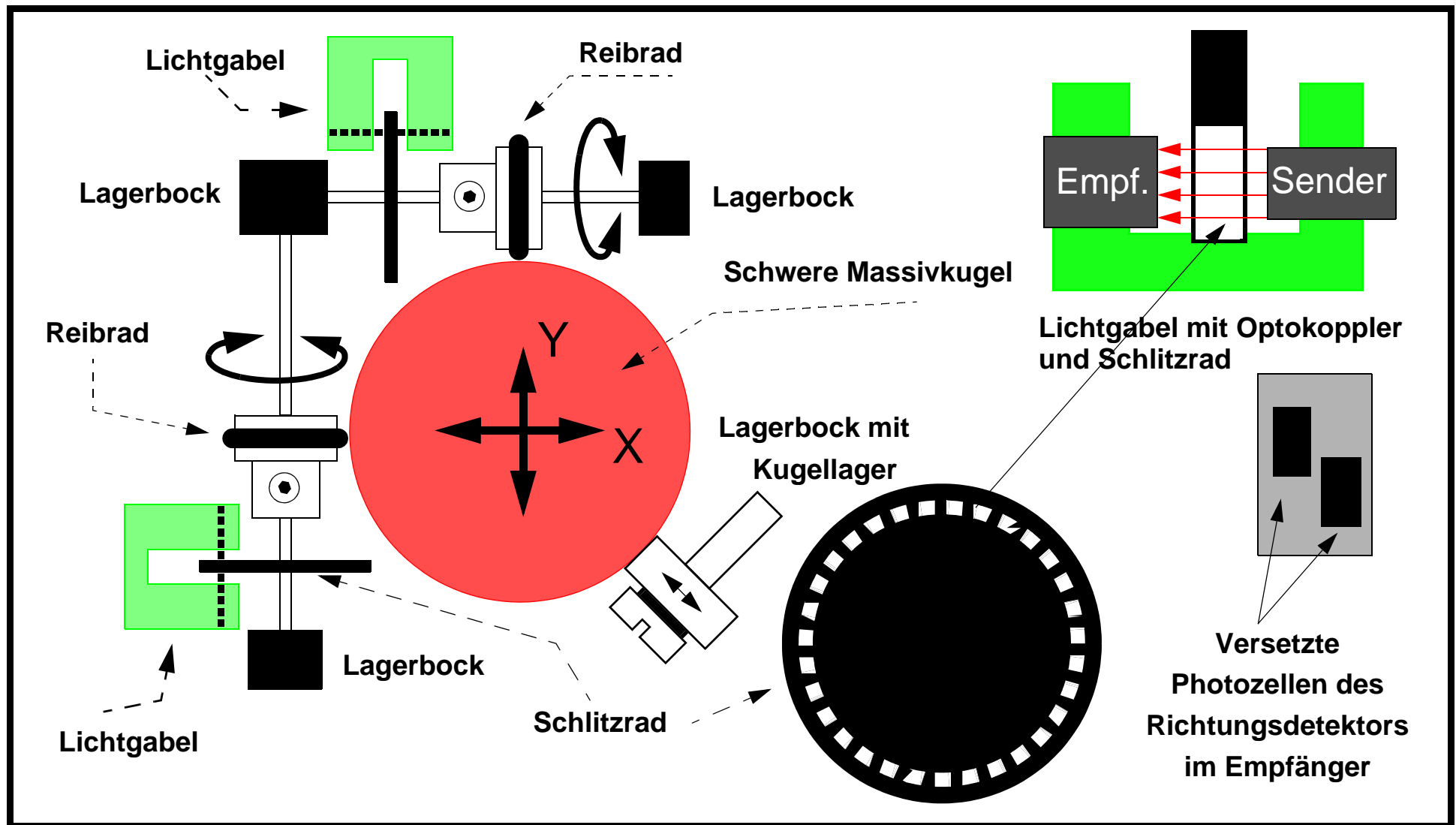
19.2.1 Opto-Koppler



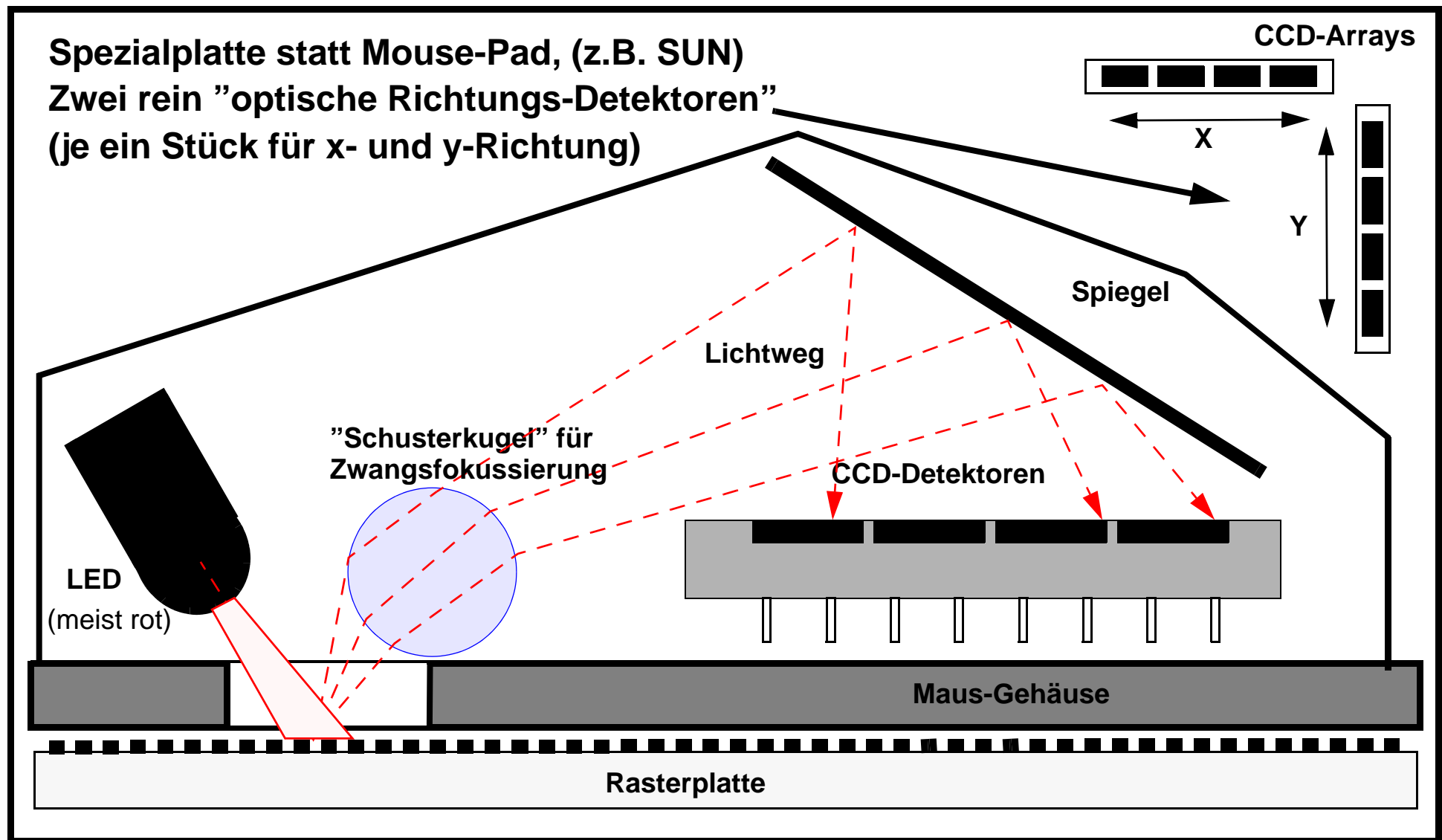
19.3 Analog-Digital-Wandler und umgekehrt



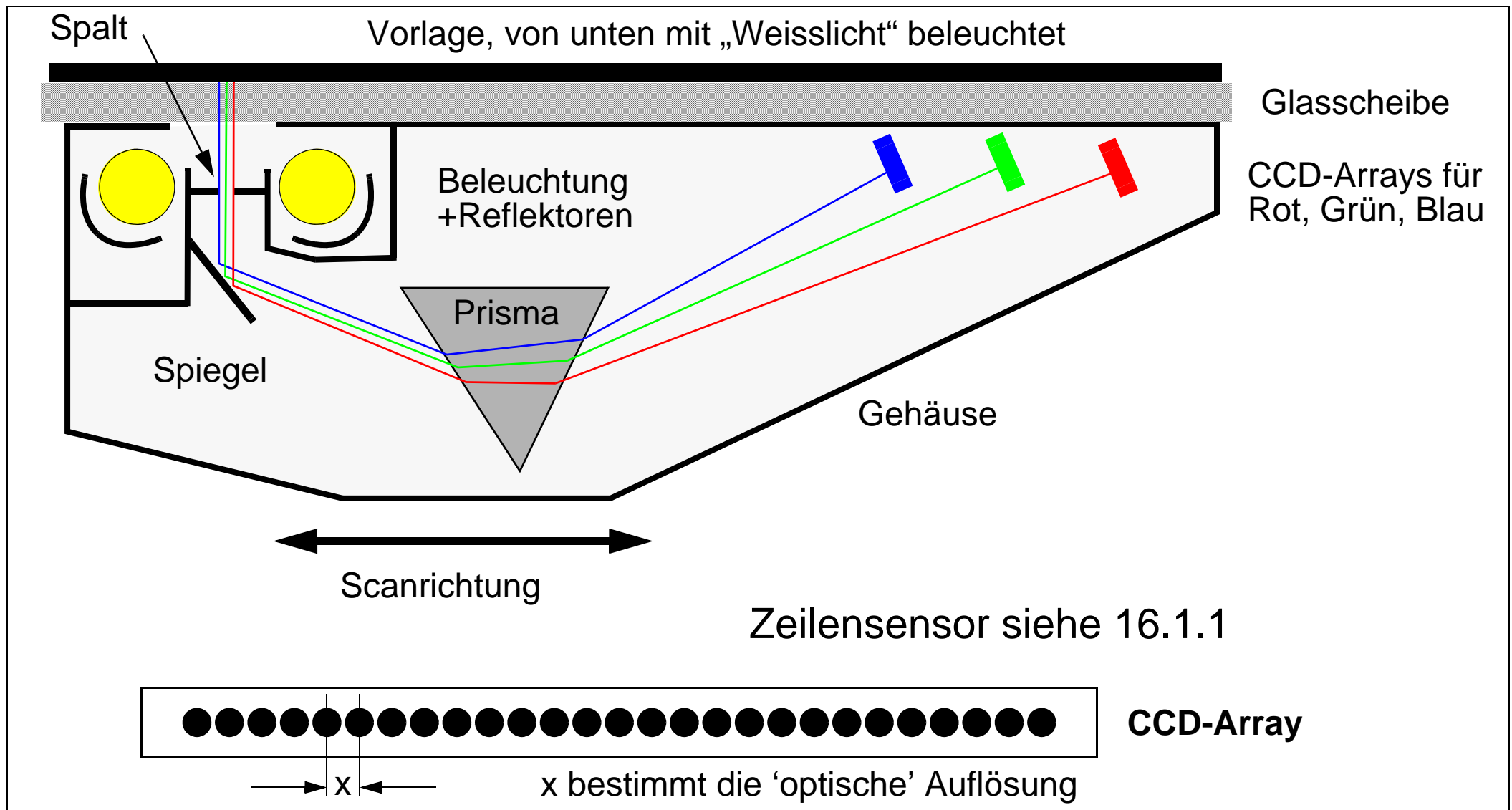
19.4 Mäuse: Opto-mechanische Maus



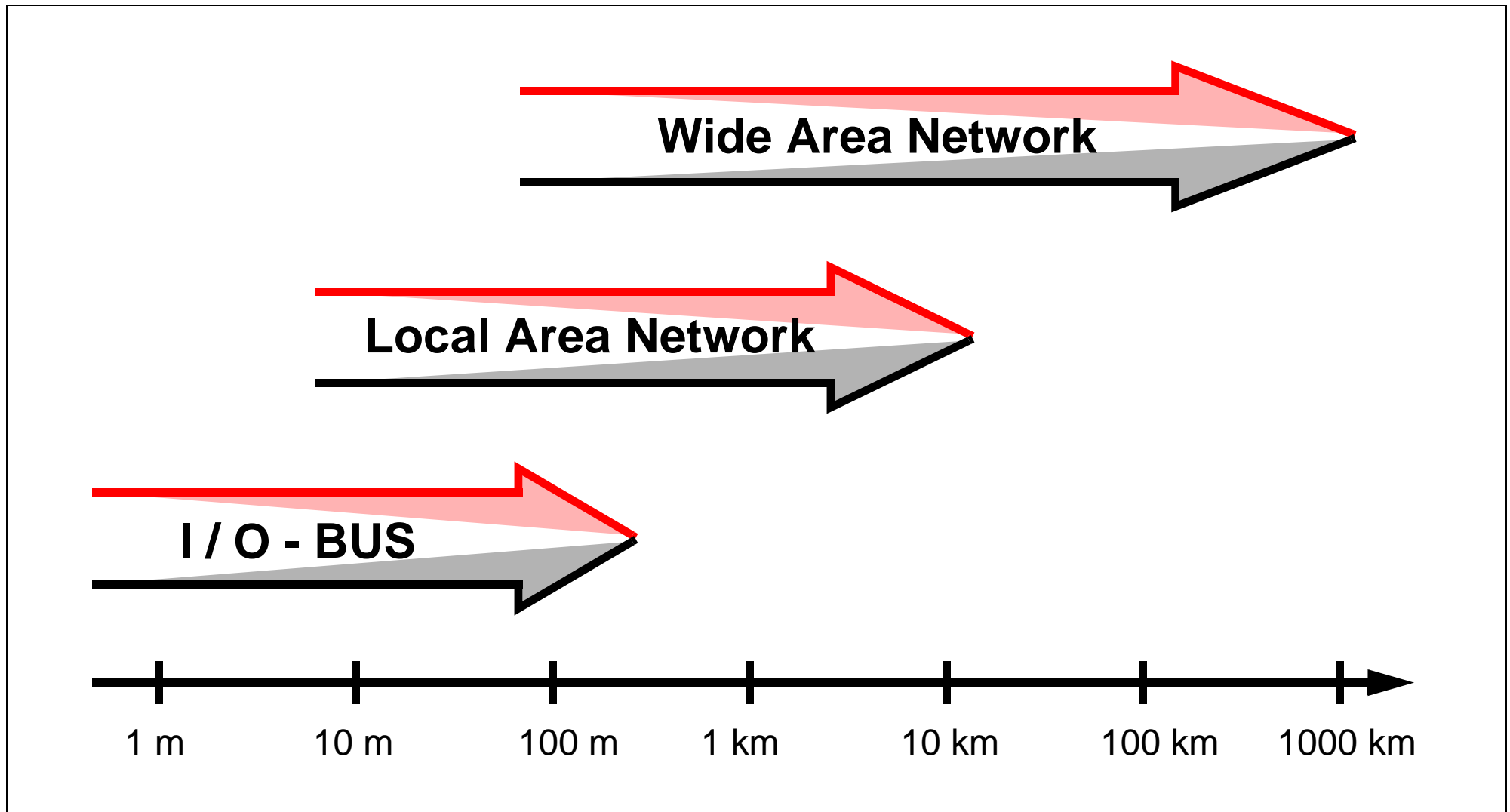
19.5 Mäuse: Optische Maus



19.6 Einpass-Scanner

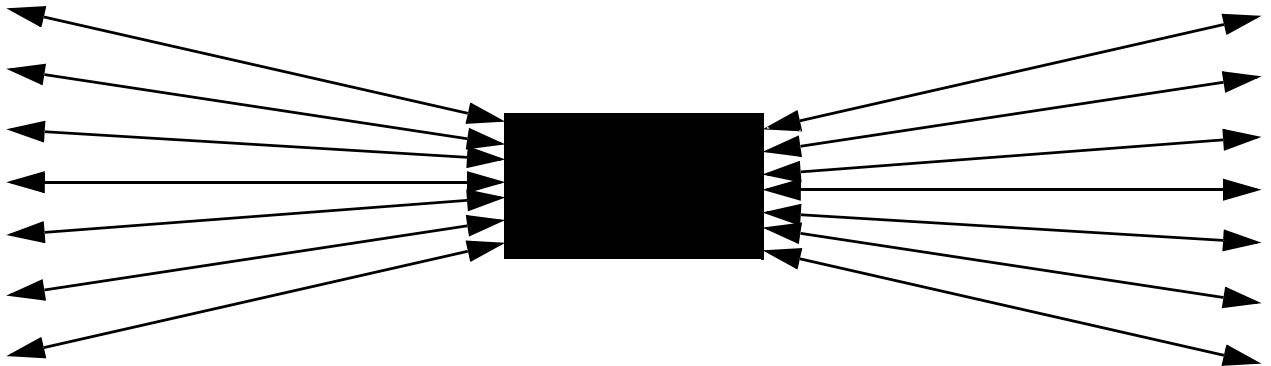


20. Leitungskonzepte für Informationen

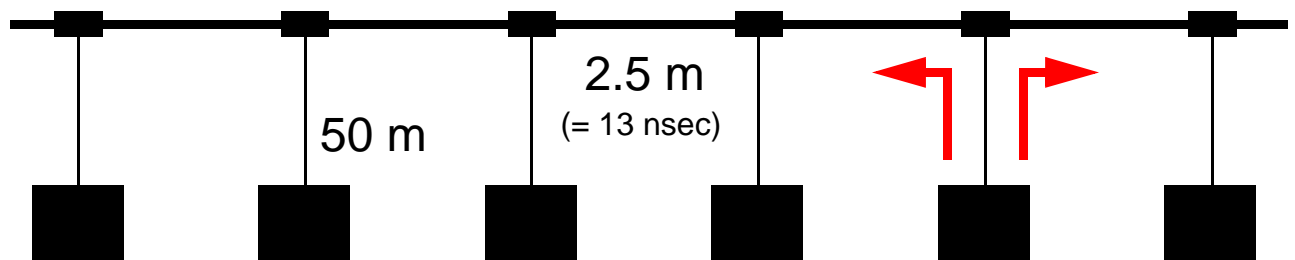


20.1 Basisband-Konzepte

Stichleitung: Leitungslänge gering (10-100m), Bandbreite gering, meist asynchron



Bus-Strukturen (Ethernet Thick LAN): Leitungslänge (max 500m/Segment), Bandbreite besser, Zahl der Teilnehmer begrenzt (Abstand auf der Leitung vorgegeben, 100 Anschlüsse/Segment)



Ringleitung (Token Ring): Leitungslänge vorgegeben, Bandbreite, Zahl der Stationen begrenzt



20.2 Leitungskonzepte

- **Sequentiell:** meist CCITT V.24 (EIA RS-232C), Spannungs- oder Stromschleifentechnik, synchron oder asynchron, Protokoll: X-On / X-OFF, Datenrate liegt zwischen 110 Baud (bit/s) und 19.2 KBd
- **Twisted Pairs** als Sonderfall zur Steigerung der Datenrate, angestrebt ist 64 KBd, manchmal auch bis 4 MBd (IEEE 802.3, IBM Token Ring), CDDI (Copper Distributed Data Interface, 100 MBd)
- **Coax-Kupfer:** Ethernet (IEEE 802.3, $Z_r = 50 \Omega$, 10 MBd), Token Ring (IEEE 802.3, $Z_r = 92 \Omega$, 1 - 16 MBd), Protokolle: CSMA/CD, TCP/IP
- **Parallel-Kupfer:** HP-IB (IEEE 488.2-1987), Spezialprotokoll, Steuerleitungen, Datenraten: 1 MBd / parallel (16 adrig) und 25 KBd / seriell (2-adrig)
- **Glasfaser:** Ethernet (oft in Verbindung mit Cu), FDDI (IEEE 802.5, als Token Ring, Fiber Distributed Data Interface 100 MBd, zwei gegenläufige Ringe), ATM (Asynchronous Transfer Mode, 130 - 2500 MBd, Backbone)
- **WLAN** nach IEEE 802.11: Meist als Karte in den PC oder als Hot Spot im Gelände

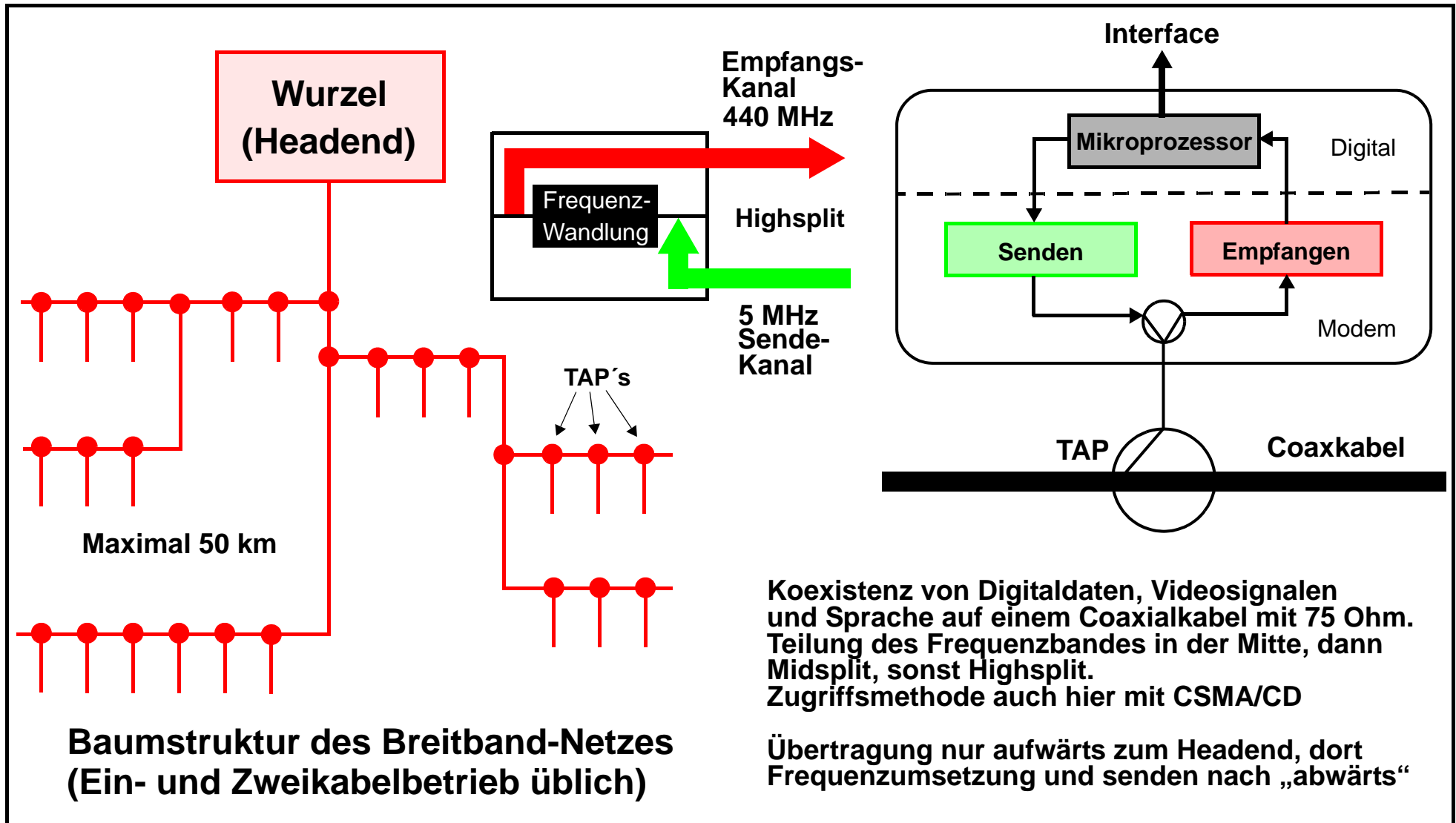
Weiterführende Literatur: A.S.Tanenbaum, Computer-Netzwerke, Prentice Hall Verlag, München 1997

CCITT = Comité Consultatif International de Télégraphique et Téléphonique

CSMA/CD = Carrier Sense Multiple Access / Carrier Detection

TCP/IP = Transmission Control Protocol / Internet Protocol

20.3 Breitband-Netzwerke



20.4 „Rahmen“-Bedingungen

HDLC (High Level Data Link Control)

Blockbegrenzung (Flag) 01111110	Adressfeld 8 Bits	Kontrollfeld 8 Bits	Datenfeld N Bits	Blockprüffeld 16 Bits	Blockbegrenzung (Flag) 01111110
---	----------------------	------------------------	----------------------------	--------------------------	---

Sendedaten in Schicht 1 0110**1111**111111**1111**11111111**1111**010
 Gestopfte Daten in Schicht 2 011011111**0**11111**0**11111**0**11111**0**111110010
 Entstopfte Daten beim Empfänger 0110111111111111111111111111111010

Ethernet (IEEE 802.3 1985a)

Präambel 7 Bytes	Beginn Rahmen- begrenzer 1 Byte	Ziel- adresse 2 oder 6 Bytes	Quell- adresse 2 oder 6 Bytes	Länge des Datenfelds 2 Bytes	Datenfeld 0-1500 Bytes	Pad 0-46 Bytes	Prüfsumme 4 Bytes
---------------------	--	---------------------------------------	--	------------------------------------	-------------------------------------	-------------------	----------------------

Präambel: **10101010...1010**, Rahmenbegrenzer: 10101011, Zieladresse: 1111...11 für Broadcast,
 Pad: Hilfsfeld, Prüfsumme: Spezialcode der Daten. Die Kollisionserkennung ist **analog**.

Token Ring (IEEE 802.5 1985c)

Startbe- grenzer 1 Byte	Zugriffs- Steuerung 1 Byte	Rahmen- Steuerung 1 Byte	Ziel- Adresse 2 oder 6 Bytes	Quell- Adresse 2 oder 6 Bytes	Datenfeld unbe- grenzt	Prüf- summe 4 Bytes	Endbe- grenzer 1 Byte	Rahmen- Status 1 Byte
-------------------------------	----------------------------------	--------------------------------	---------------------------------------	--	-------------------------------------	---------------------------	-----------------------------	-----------------------------

Ohne Datenverkehr kreisen nur die ersten drei Bytes im Ring

20.5 Etwas zu Netzen

Die vorstehend eingezeichneten Rahmenbits, bzw. -Bytes sind alle nach den Manchester-Verfahren codiert. Dieses wird offensichtlich als ausreichend sicher erachtet.

Wir wollen uns zuerst mit dem Frame für **Ethernet** (korrekterweise CSMA/CD, IEEE 802.3-Norm) befassen. Zu Beginn des Rahmens steht eine Prämbel mit einer Folge von 1010... zur **Synchronisation** des Takts auf 10 MHz (daher auch Manchester-Codierung), die mit einer ...11 im Rahmenbegrenzer abgeschlossen wird. Damit ist jedem empfangenden Gerät bekannt, dass nun ein neuer Rahmen folgt. Es folgt die Ziel- (wird von der Vermittlungsschicht benötigt) und die Quell-Adresse (Achtung Häcker, damit kriegt man euch).

Zur weiteren Sicherheit folgt die Länge des Datenfeldes und dann dieses selbst. Falls das Datenfeld die Länge Null hat, wird mit dem Pad entsprechend aufgefüllt (warum überträgt man dann aber?). Abgeschlossen wird der Rahmen mit der vier Bytes langen Prüfsumme, die einen entsprechenden, fehlererkennenden Code (siehe dort) enthält. Der Fall, dass zwei Stationen gleichzeitig senden wollen, wurde schon besprochen, hier sei nur ergänzend angemerkt, dass die Kollision zweier Pakete auf der Leitung nicht digital, sondern analog erkannt wird durch die entsprechende Elektronik. (CSMA / CD)

Wir können uns nun dem **Token Ring** zuwenden, der rein digital aufgebaut ist und auch einen etwas anderen Rahmen-Aufbau zeigt. Er wurde im selben Jahr genormt wie 802.3. Legen wir eine Signalgeschwindigkeit im Kabel mit etwa $200.000 \text{ km.s}^{-1} = 200 \text{ m.}\mu\text{s}^{-1}$ zugrunde und eine Datenrate von 1 MBit.s^{-1} , so ist ein Bit gerade 200 m „breit“. Auf einem Ringumfang von 1 km haben dann zunächst nur 5 Bits Platz.

Nun wird aber im übertragungslosen Zustand je angeschlossene Station immer ein Bit des (3 Bytes = 24 Bits langen) Token „ausgeleitet“ in einen 1-Bit-Puffer und dann zurückgespeichert, dies bedeutet bei n Stationen eine Verzögerung um n Bits. Ein Token Ring kann also erst dann funktionieren, wenn der gesamte Token kreisen kann, in unserem obigen Beispiel müssen mindesten 19 (besser 20) Stationen angeschlossen sein.

Will nun eine Station senden, so wird nur ein spezielles Bit im drei Bytes langen Token invertiert, worauf sofort der Rahmenbeginn (grau unterlegt) vorhanden ist, man muss jetzt nur die übrigen Daten einfüttern. Sofort nach Senden der Zieladresse kann die betreffende Station den Datenstrom zu sich leiten, wobei das Datenfeld unbegrenzt ist. Das Ende des Transfers wird erst durch den Endbegrenzer und den Rahmenstatus erkannt. Nun kann auch die Prüfsumme zur Anwendung kommen.

Hat eine Station erfolglos gesendet, so kommen ja alle Bits wieder vorbei, sie werden „ausrangiert“ und ein neuer Token wird gebildet. Ansonsten muss die vorherige Empfangsstation den neuen Token aufbauen. Die Signale werden auch hier durch differentielle Manchester-Codierung verschlüsselt.

21. Fehler-Erkennung

Zeichen- und Block-Parität

Buch- stabe	Dezi- mal	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	LRC
H	72	1	0	0	1	0	0	0	0
a	97	1	1	0	0	0	0	1	1
m	109	1	1	0	1	1	0	1	1
m	109	1	1	0	1	1	0	1	1
i	105	1	1	0	1	0	0	1	0
n	110	1	1	0	1	1	1	0	1
g	103	1	1	0	0	1	1	1	1
VRC	----	0	1	1	0	1	1	0	1 / 1

LRC = Longitudinal Redundancy Check (Even Parity)

VRC = Vertical Redundancy Check (Odd Parity)

In obiger Tabelle ist die "normale" Parity (LRC) enthalten, z.B. im Falle des "i":

1 1 0 1 0 0 1 **0** mit even Parity

1 1 0 1 0 0 1 **1** mit odd Parity

1 1 0 1 0 0 1 - mit non Parity



Problem bei einfacher LRC-Übertragung besteht darin, dass nur 1-Bit-Fehler erkennbar sind, nicht aber 2-Bit-Fehler (diese heben sich in der jeweiligen Parity gegenseitig auf)

Etwas zur Hamming-Distanz

```
101010101010
100100101010
001110000000
```

Drei Fehler, somit
Hamming-Distanz
d = 3

Beispiel von oben.

11010**111** Fehler im Byte und even Parity
falsch, somit Hamming-Distanz d = 2, Fehler
nicht erkennbar

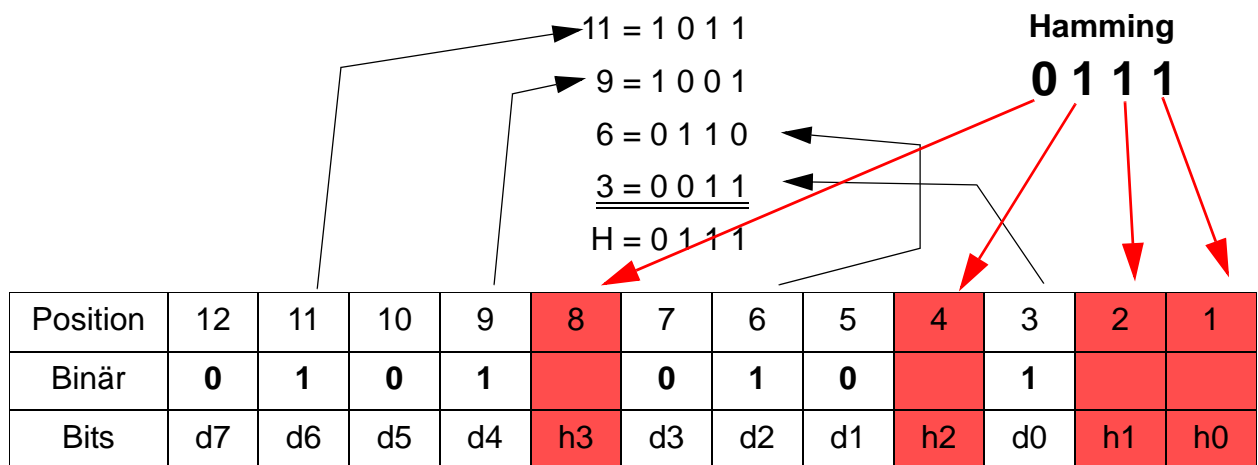
21.1 Fehler-Korrektur

(12,8) Hamming-Codierung beim Sender

Beim Hamming-Code geht man ebenfalls wie beim HDLC von einer Art Bitstopfen aus, nur ist die Funktionalität eine ganz andere: Dabei werden die zu übertragenden Daten (ASCII-Zeichen U = 85 DEZ = 01 01 01 01) nach (12,8) codiert, d.h. vier Bits zusätzlich für die Fehlerkorrektur (Prüfbits) kommen an die Bit-Positionen 2^3 , 2^2 , 2^1 , 2^0 (Pos. 8, 4, 2, 1 sind farbig unterlegt). 12,8 besagt, dass 12 Gesamtbits und 8 Datenbits verwendet werden und dass eine 2^n -Folge zugrundegelegt wird bei den Hamming-Bits.

d_i = Datenbits, h_i = Hamming-Bits.

Jede Position von d_i , die eine „1“ enthält, wird jeweils in ihre Binärfolge 2^n zerlegt und untereinander geschrieben, sodann mit XOR verknüpft.



Die oben erhaltene Prüfsumme von 0 1 0 0 wird in die Tabelle an den Stellen für h3, h2, h1 und h0 eingesetzt und mit dem Code verschickt als Bitfolge 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1

Hamming-Decodierung beim Empfänger

Beim Empfänger werden **alle** Positionen im Bitstrom, die eine „1“ enthalten, in die Binärfolge der Position umgewandelt und mit XOR addiert

Nur für Einbitfehler:
Korrektur nach „1“

11 = 1 0 1 1
6 = 0 1 1 0
4 = 0 1 0 0
3 = 0 0 1 1
2 = 0 0 1 0
1 = 0 0 0 1
H = 1 0 0 1

Position	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Binär	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
Bits	d7	d6	d5	d4	h3	d3	d2	d1	h2	d0	h1	h0

Da H = 9 (statt 0000) als Ergebnis erhalten wurde, ist Bit 9 falsch, da es „0“ ist, muss auf „1“ korrigiert werden. Der ganze Vorgang erfolgt mit entsprechender **Hardware**.

21.2 CRC-8

CRC-Berechnung mit CRC-8 (x^8+x^2+x+1)-Polynom beim **Sender** (Cyclic Redundancy Check, Polynom identisch bei Sender und Empfänger)

Daten (ASCII-Zeichen U) \rightarrow 1010101 \rightarrow 1010101 0000000000 (+ 9 Nullen wg. CRC-8)

CRC-8-Polynom \rightarrow 100000111

1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 : 1 0 0 0 0 0 1 1 1

1 0 0 0 0 0 1 1 1

0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0

1 0 0 0 0 0 1 1 1

0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0

1 0 0 0 0 0 1 1 1

0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0

1 0 0 0 0 0 1 1 1

0 0 1 0 1 1 1 1 1 = Rest

\rightarrow 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 wird gesendet

ASCII 'U' + Rest

Polynom-Division mit XOR (meist
mit Schieberegister)

CRC-Überprüfung mit CRC-8 (x^8+x^2+x+1)-Polynom beim **Empfänger** (Generator-Polynom identisch bei Sender und Empfänger)

Daten (ASCII-Zeichen U) \rightarrow 1010101 \rightarrow 1010101 001011111 (+ 9 Stellen wg. CRC-8)

CRC-8-Polynom \rightarrow 100000111

1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 : 1 0 0 0 0 0 1 1 1

1 0 0 0 0 0 1 1 1

0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0

1 0 0 0 0 0 1 1 1

0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1

1 0 0 0 0 0 1 1 1

0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1

1 0 0 0 0 0 1 1 1

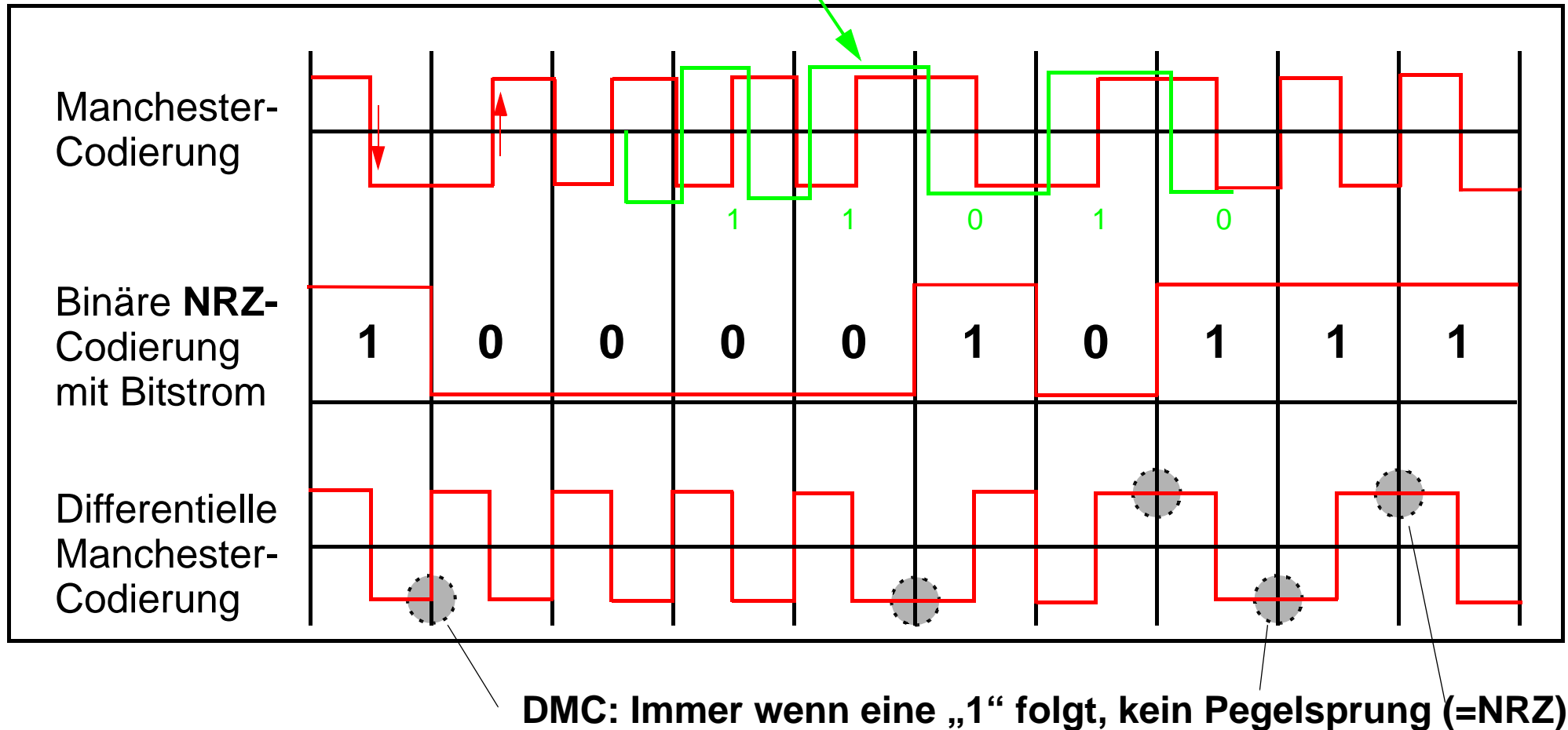
0 0 0 0 0 0 0 0 0 = Rest

Polynom-Division mit XOR

Somit fehlerfreie Übertragung, ansonsten wird verworfen und
eine neue Übertragung beim Sender angefordert, weil effizienter.

21.3 Die beiden Manchester-Codierungen

Achtung: Wenn bei der Manchester-Codierung das Signal um eine halbe Periode verrutscht, dann findet eine Fehlinterpretation statt



Nach: A.S.Tanenbaum, Computer-Netzwerke, Prentice Hall Verlag, München, 1997

21.4 Andere Bus-Konzepte

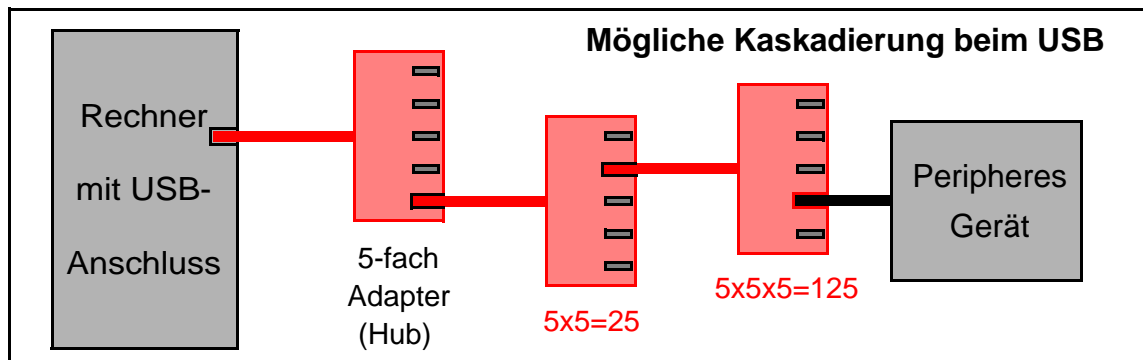
SCSI3 (Small Computer Systems Interface): Schneller Bus für Plattenspeicher, CD-ROMs, Bandlaufwerke. Ursprünglich 8 Bit breit, heute Datenpfadbreite von 16 Bit (parallel, es ist auch ein serieller Bus am Markt). Der Datentransfer erfolgt entweder synchron (mehrere Bytes als Block, dann Bestätigung) oder asynchron (jedes Byte einzeln → langsamer).

- Abwärtskompatibel zu SCSI1, bzw. 2, diese sind die „historischen“ Vorläufer der heutigen, schnelleren Generation
- Anzahl anschließbarer Geräte: max. 16
- Maximale Buslänge: 24 m
- Datentransferrate: 320 Mbits/s (= 40 MBytes/s)

Im Gegensatz zum USB muss hier der Treiber selbst installiert werden.

USB 2.0 (Universal Serial Bus): Neuer Schnittstellenstandard mit automatischem Erkennen der Peripheriegeräte beim Anschliessen („Einstöpseln“ = hot plug). Dadurch automatisches Installieren der Treibersoftware durch den Controller.

- Möglich durch Kaskadieren mit entsprechenden Adaptern (USB-Hubs), da Rechner meist nur 2, höchstens 4 USB-Anschlüsse (ports) aufweisen (siehe nachfolgende Abbildung für Fünfer-Kaskade).
- Anzahl anschließbarer Geräte: max. 127.
- Mit entsprechenden Vorkehrungen sind auch Kabellängen bis ca. 30 m machbar, normalerweise werden kurze Kabelstücke von 50 cm bis ca 1.2 m eingesetzt.
- Datentransferrate: USB 2.0 bis zu 480 Mbits/s (= 60 MBytes/s)



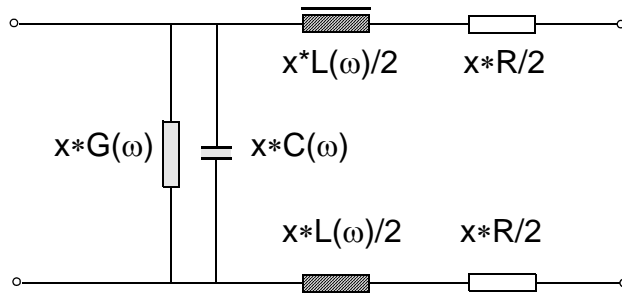
Firewire 1394-1995 (Normung nach IEEE). Konkurrenz zu USB und Fibre Channel (Cu-based).

- Maximale Datenrate 3.2 Gbits/s (= 400 MBytes/s)
- Höchstlängen der Kabel: Glasfaser 100 m, Copper Twisted Pair 4.5 m.
- Daisy-Chain-Anschluss für bis zu 16 Geräte

Welches der Buskonzepte sich längerfristig durchsetzen wird, ist derzeit noch offen. Zur Zeit ist eine Koexistenz vorhanden, die sich bestimmt durch neue Konzepte verschieben wird.

21.5 Physik des Coax-Kabels

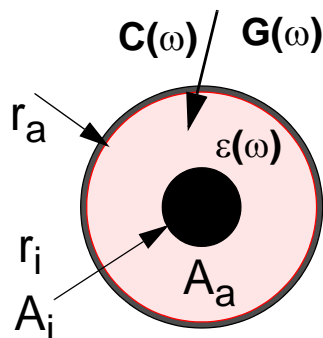
Ersatzschaltbild einer Fernleitung der Länge x:



C, L, R(Cu), G sind jeweils auf die Einheitslänge x bezogen

G ist der „Querwiderstand“ des Dielektrikums im Kabel ($1/R_{\text{diel}}$)

Geometrie- und Frequenzabhängigkeiten:



Frequenzabhängige **Kapazität** des Kabels der Länge x:

$$C(\omega) = (2\pi\epsilon_0\epsilon_r(\omega))/\ln(r_a/r_i)$$

Frequenzabhängige **Induktivität** auf der Kabellänge x:

$$L(\omega) = \frac{(\mu_0\mu_r(\omega))}{2\pi} \ln(r_a/r_i)$$

Frequenzabhängige **Dämpfung** auf der Kabellänge x:

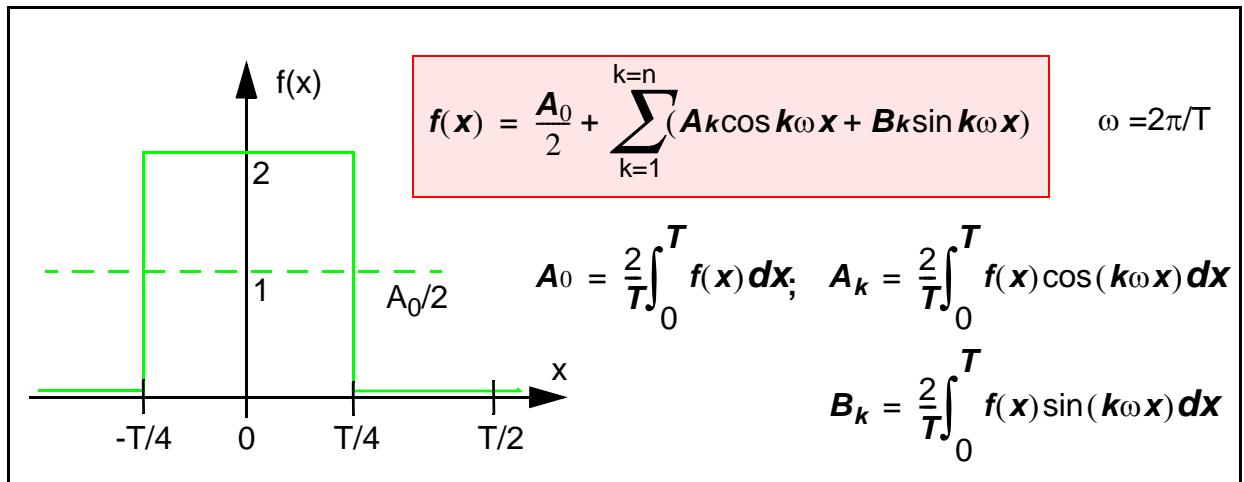
$$\alpha(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} [G(\omega)R - \omega^2 L(\omega)C(\omega)] + \frac{1}{2} \sqrt{[R^2 + \omega^2 L^2(\omega)][G^2(\omega) + \omega^2 C^2(\omega)]}}$$

Frequenzabhängige **Ausbreitungsgeschwindigkeit**:

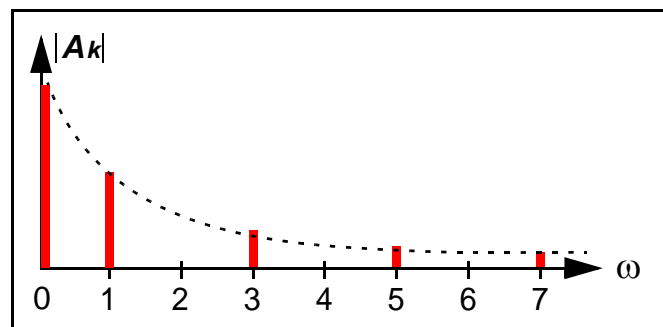
$$\left(\frac{1}{c_{\text{rel}}}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[L(\omega)C(\omega) - \frac{RG(\omega)}{\omega^2} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\left[L(\omega)C(\omega) + \frac{RG(\omega)}{\omega^2} \right]^2 + \left[\frac{RC(\omega)}{\omega} - \frac{LG(\omega)}{\omega} \right]^2}$$

Nebenbedingungen: Es kann $\mu_r = 1$ und unabhängig von ω angenommen werden, es zählt nur $\epsilon_r(\omega)$

21.6 Fourier-Analyse

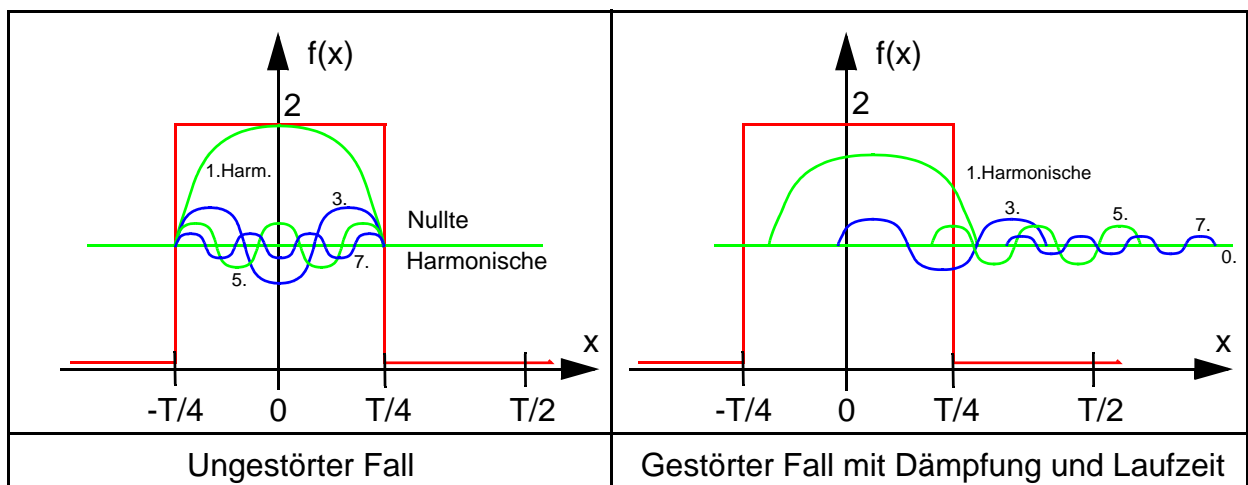


Fourier-Zerlegung mathematisch



- Spektrale Verteilung der Vorfaktoren A_k -

Fourier-Zerlegung physikalisch



Siehe auch bei Bandbreite

21.7 Physik der Glasfasern

Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum:

$$1/c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

aus Fundamentalkonstanten

Lichtgeschwindigkeit im Medium:

$$c_{\text{rel}} = c_0 / n$$

$n > 1$, dimensionsloser Zahlenwert

Maxwellsche Relation für den Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

beide dimensionslos

Dispersion (Exp., Materialgröße) : Lineare Abhängigkeit von $n(\omega)$ im sichtbaren Bereich

Rayleigh'sche Streuung (experimentell und theoretisch) proportional zu ω^4 bzw. $1/\lambda^4$

(Blau wird am stärksten gestreut, Himmelsfarbe, auch als Dämpfung zu betrachten)

Wellenwiderstand des Vakuums

$$Z_0 = \sqrt{(\mu_0)/(\epsilon_0)} = 377\Omega$$

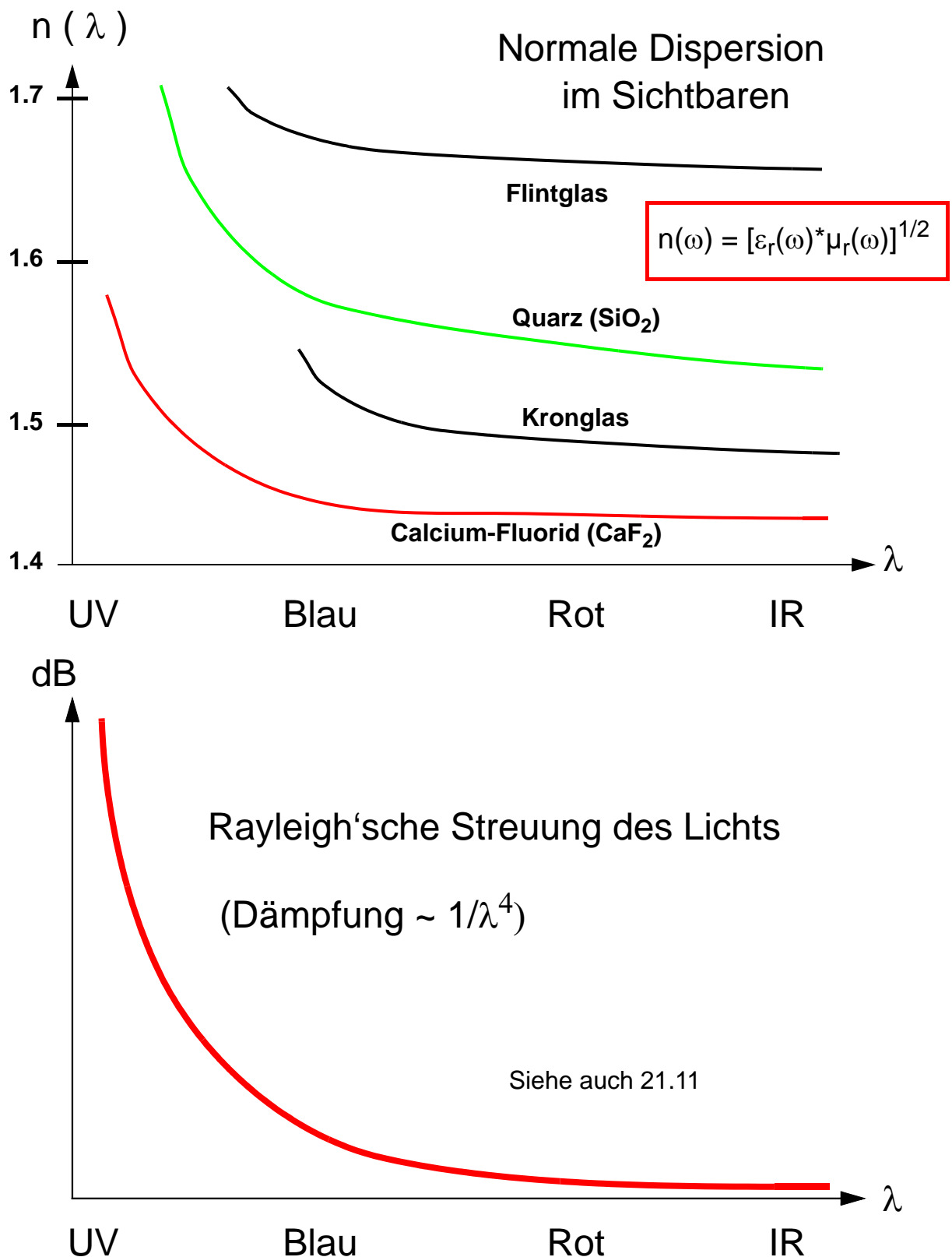
aus Fundamentalkonstanten

Wellenwiderstand des Mediums

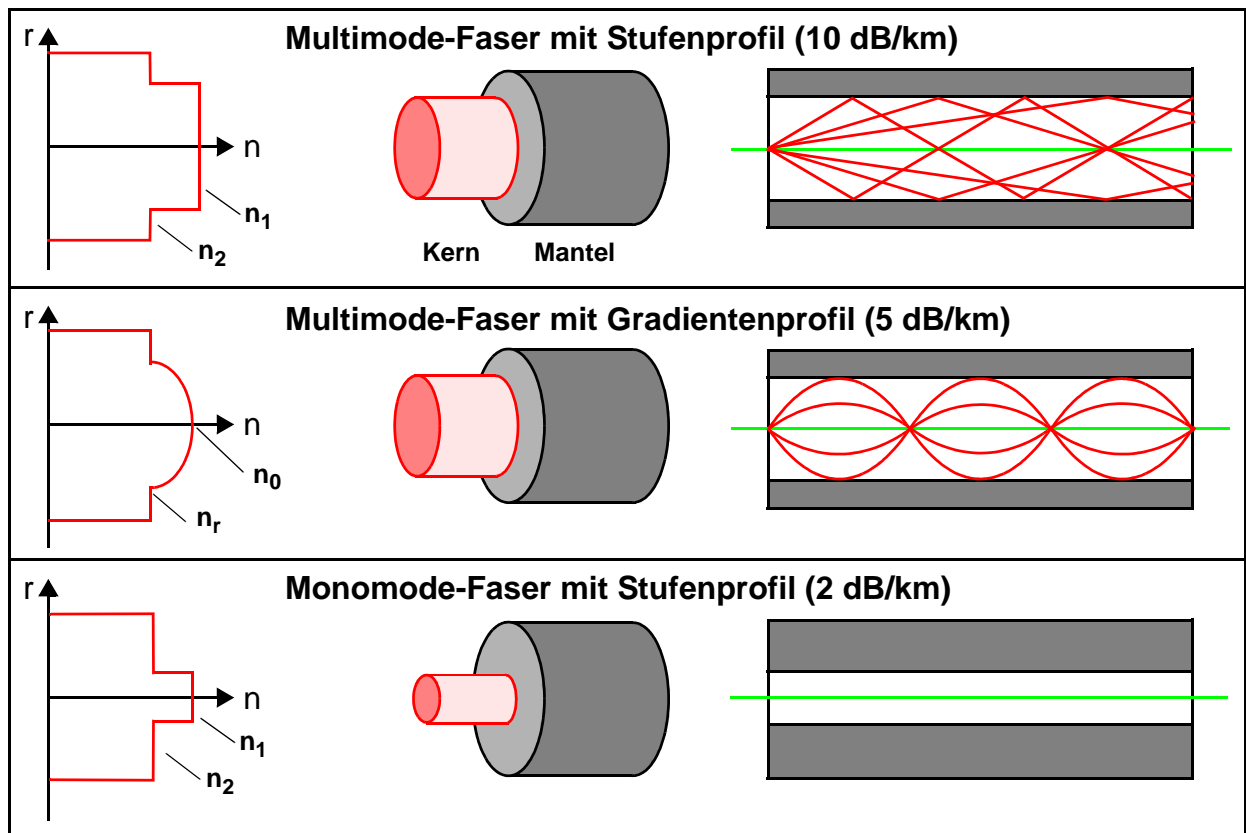
$$Z_r = \sqrt{(\mu_0 \mu_r)/(\epsilon_0 \epsilon_r)}$$

Materialabhängig

21.8 Brechungsindex



21.9 Glasfaser- Profile



Einkopplungsarten in die Faser

■ Optisch aktiver Bereich

Licht emittierende Diode (LED)	Laser-Diode (LD)
<p>Direkt aus Gruben-LED</p> <p>Num. Apertur 0.22 (12°) erreicht</p>	<p>Direkte Einkopplung</p>
<p>Mit Kugel-Linse in der Gruben-LED</p>	<p>Mit angeschmolzener Kugel</p>
<p>Mit selbstfokussierender Gradienten-Linse</p>	<p>Mit selbstfokussierender Gradienten-Linse</p>

21.10 Das Dezibel

Bandbreite = Maximale Datenrate

Nyquist/Shannon: Rauschfrei, Bandbreite H [Hz], Abtastrate $2H/\text{sec}$, V diskrete Stufen (Harmonische)

- **Maximale Baudrate = $2H \cdot \log_2 V$ [bits/sec]**

Rauschfrei: Kanal mit 3 KHz kann binäre Signale bis zu 6.000 Baud übertragen

Shannon: Rauschstärke N , Signalstärke S , Rauschabstand S/N , Bandbreite H

- **Maximale Baudrate = $H \cdot \log_2(1 + S/N)$ [bits/sec]**

Thermisches (Gauss'sches) Rauschen: Rauschabstand S/N in **$10 \log_{10} (S/N)$ = Dezibel (dB)** für **Leistungsangaben** und

$20 \log_{10} (S/N)$ = Dezibel (dB) für **Strom/Spannungsangaben**

Rauschabstand S/N (Linear)	S/N in Dezibel (Logarithmisch)
10	10
100	20
1.000	30
10.000	40

Wieder 3 KHz-Kanal als Grundlage mit 30 dB Dämpfung (Post-norm): Maximal 30.000 Bd

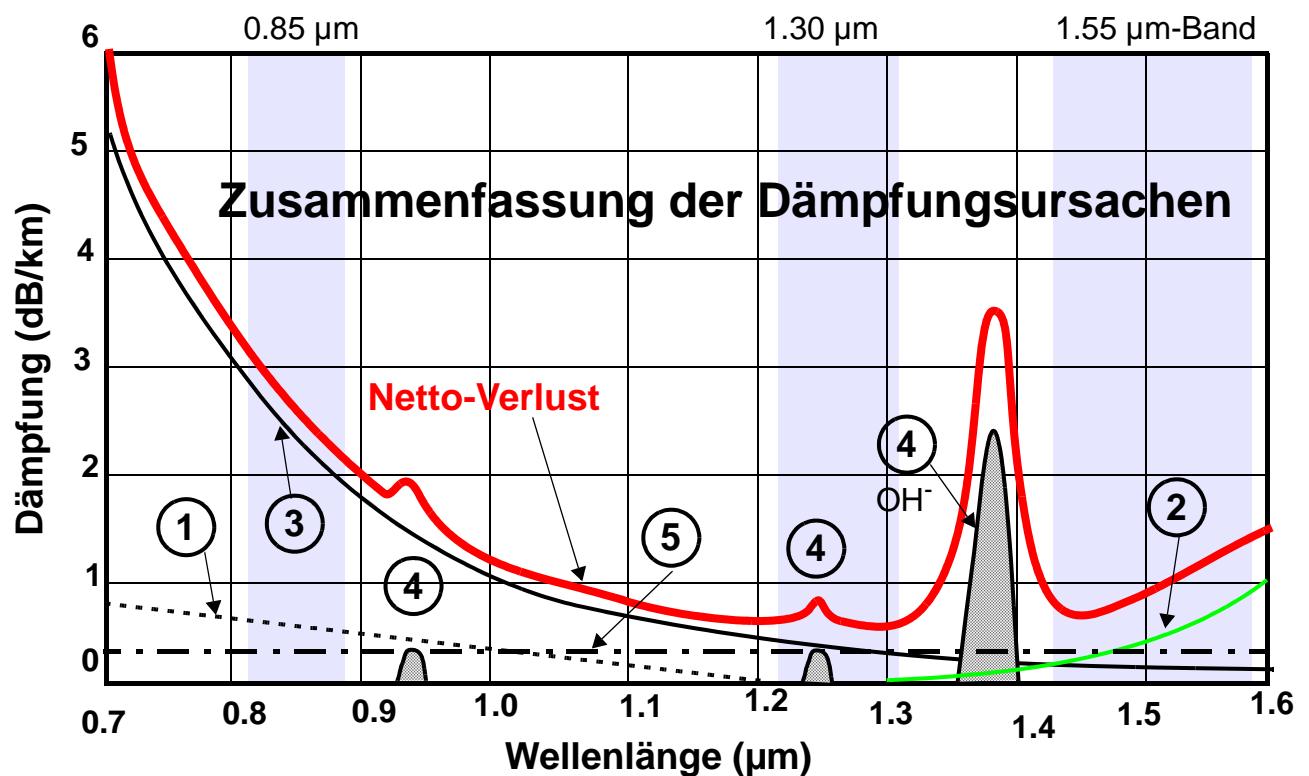
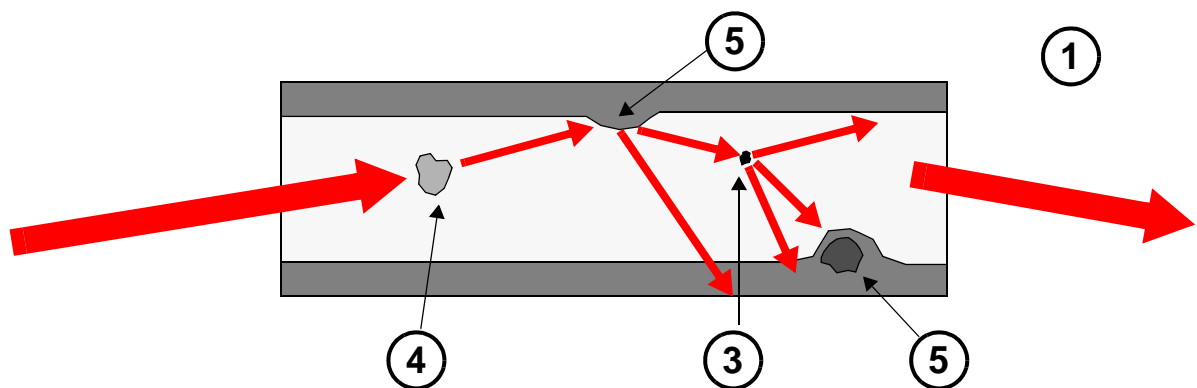
Theoretischer oberer Grenzwert, eigentlich nicht erreichbar

Nach: A.S.Tanenbaum, Computer-Netzwerke, Prentice Hall Verlag,
München, 1997

21.11 Dämpfungsursachen

Verschiedene Ursachen der Dämpfung in der Faser

1. Ultraviolett-Absorption
2. Infrarot-Absorption
3. Rayleigh-Streuung (Luftbläschen)
4. Absorption an Verunreinigungen (OH^- -Problem)
5. Schwankungen in der Geometrie der Schichten

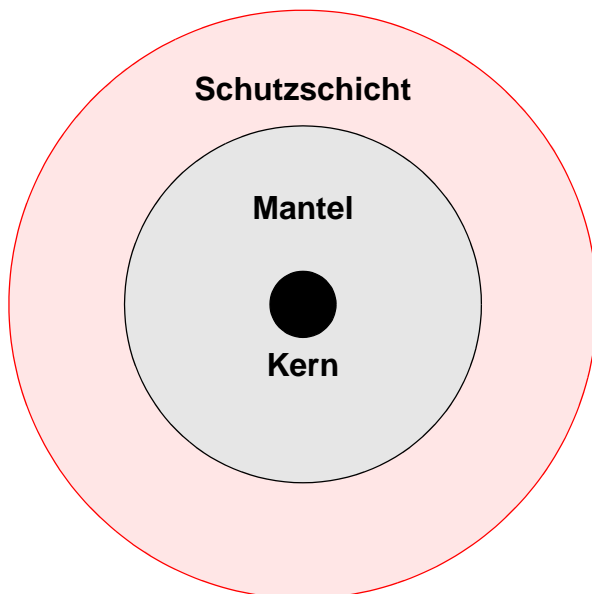


Dämpfungswerte durch OH⁻-Ionen

14 ppm: unbrauchbar (weit über 100 dB/km)
0.5 ppm: 30 dB/km
50 ppb: 3 dB/km (etwaiger Wert im vorigen Bild)
0.04 ppb: 0.1 dB/km (Traumwert, nur im Labor)

Je nach OH⁻-Ionen-Gehalt erfolgt eine Aufteilung in
HOH- (High OH) und LOH- (Low OH) Fasern

Querschnitt durch eine Glasfaser



Kenndaten

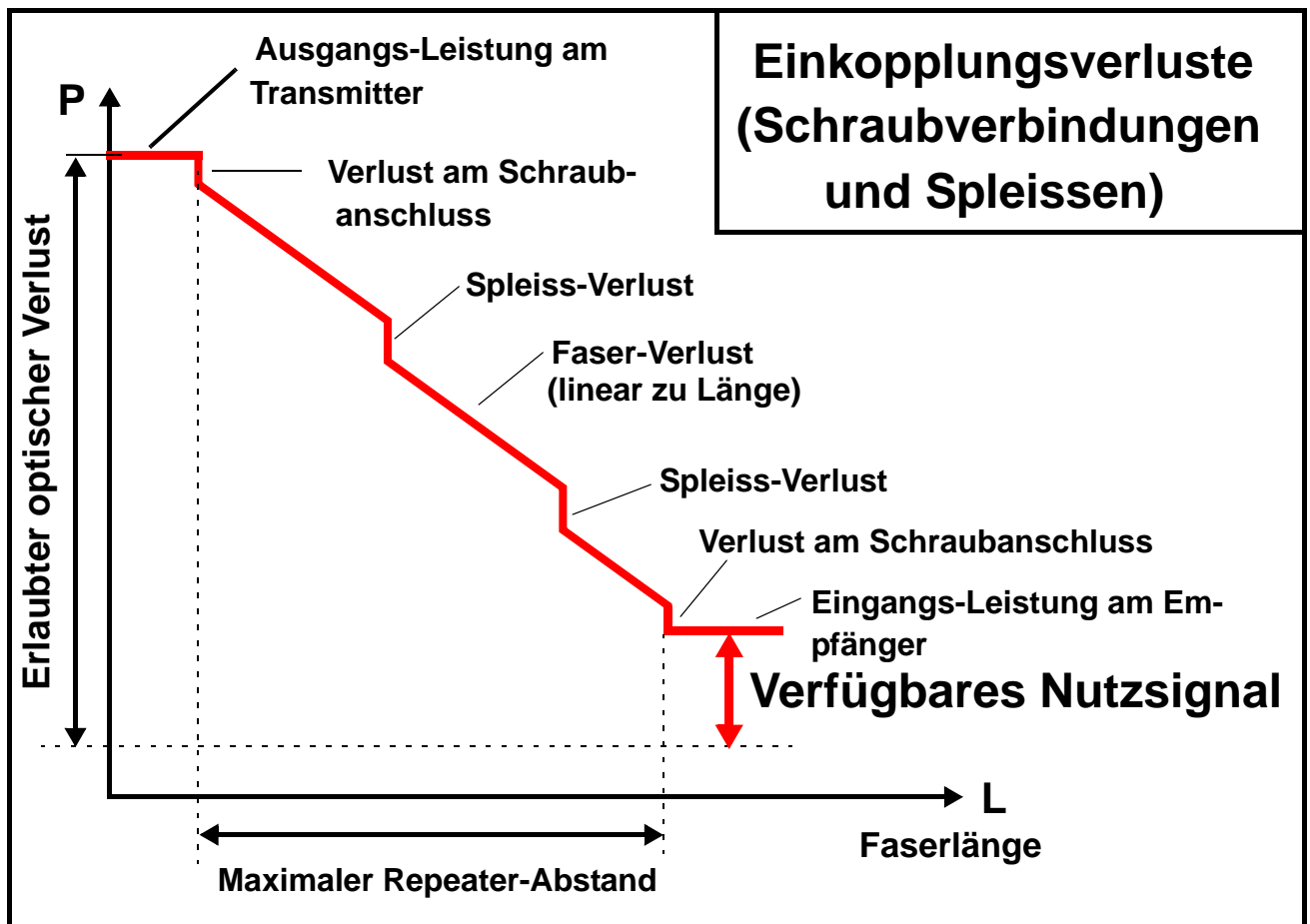
Faser (Kern): 9 - 200 μm
Material: Reines SiO_2

Mantel: 125 μm
Material: Glas mit niedrigem
Brechungsindex

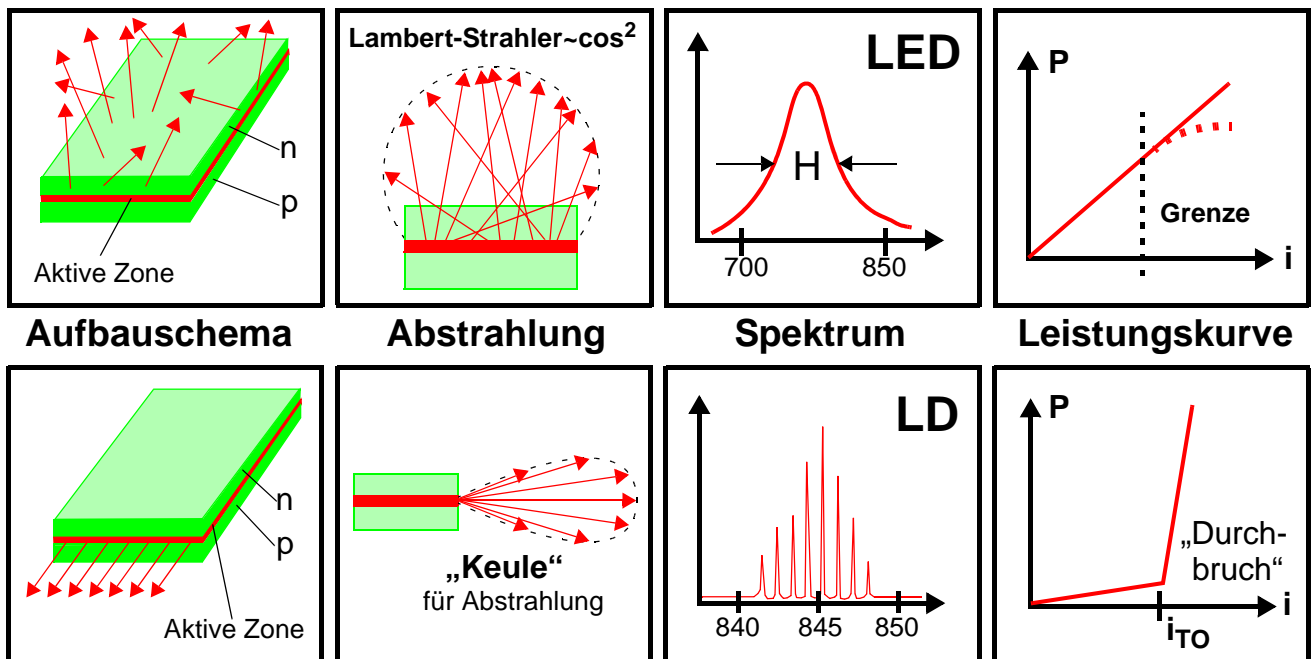
Schutzschicht: 150-500 μm
Material: Kunststoff / V2A-Geflecht

Numerische Apertur: 0.22
= Sinus des Öffnungswinkels (12°)

21.13 Einkopplung



Basis-Charakteristika von Signalquellen



21.13.1 Signalquellen für Glasfasern

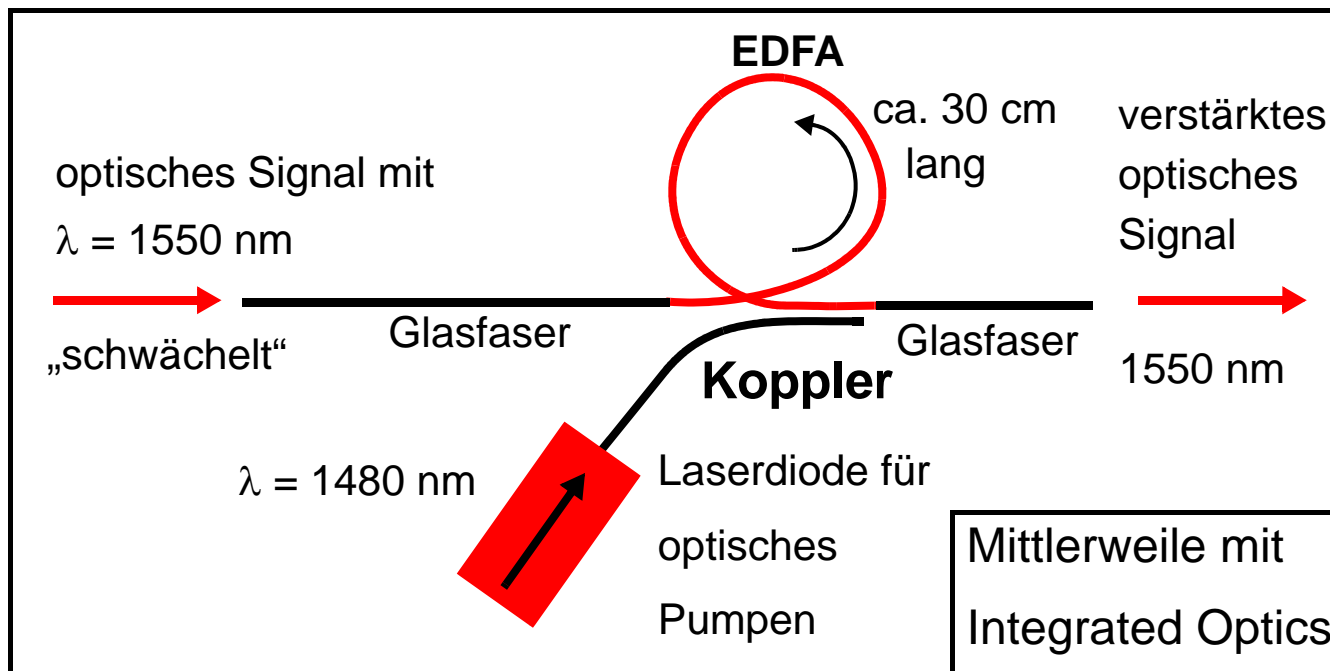
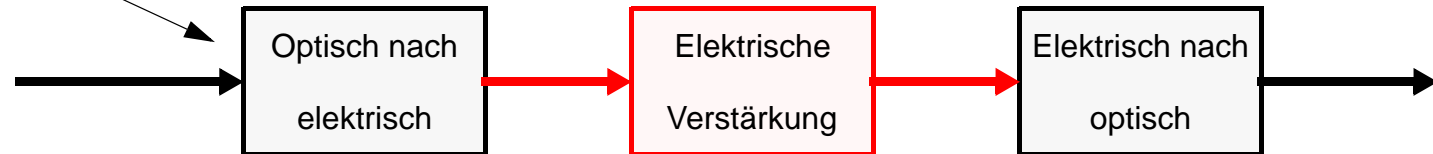
Vergleich von Signalquellen

Bezeichnung	Laser Diode (LD)		Licht emittierende Diode (LED)	
Material	AlGaAs	InGaAsP	AlGaAs	InGaAsP
Wellenlänge in μm	0.8 - 0.9	1.2 - 1.6	0.8 - 0.9	1.1 - 1.6
Optische Leistung mW	5 - 8	3 - 5	1 - 3	1
Einkoppelverlust in dB	3 - 5		15 - 20	
Spektrale Breite	< 2 nm	< 2 nm	50 nm	100 nm
Modulationsfrequenz	1000 MHz	1000 MHz	60 MHz	30 MHz
Modulationsart	Impuls		Impuls und analog	
Lebensdauer in h	10^5		10^7	
Anwendungsbereich	Weitverkehr grosser Kapazität		Lokale, kleinere Systeme	

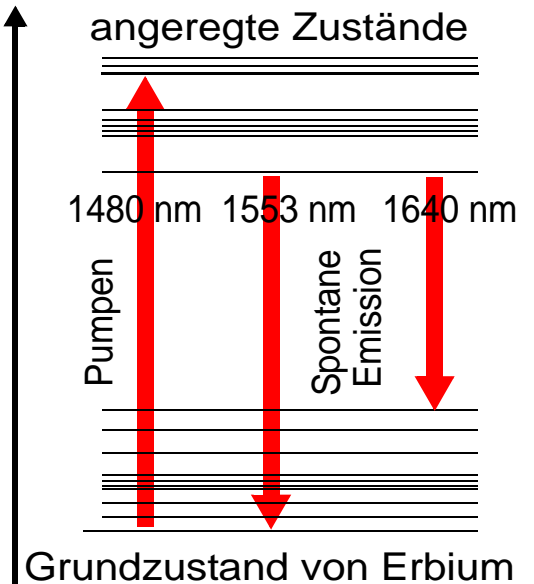
21.14 Erbium-dotierte Faserverstärker (EDFA)

Einst

und jetzt



Energie h.f



21.14.1 Vergleichende Betrachtungen

